

**ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ**  
**ЧАСТЬ 2**  
Курс лекций

# **Содержание**

Модуль 3. Динамический анализ механизмов .....	3
1. Задачи кинетостатики .....	3
2. Силы, действующие на механизм .....	3
2.1. Классификация сил .....	3
2.2. Внешние силы и механические характеристики машин .....	4
2.3. Определение сил инерции .....	6
3. Силовой анализ механизмов. Определение реакций в кинематических парах .....	8
4. Трение в кинематических парах .....	12
4.1. Трение скольжения .....	12
4.2. Сухое трение .....	13
4.3. Жидкостное трение .....	13
4.4. Трение при скольжении ползуна по тали плоскости .....	13
4.5. Трение в кинематической паре шип - подшипник .....	14
5. Коэффициент полезного действия механизма .....	14
6. Определение реакций в кинематических парах с учетом трения .....	15
6.1. Силовой анализ зубчатых механизмов .....	16
6.2. Определение моментов в планетарном механизме без учета трения .....	18
6.3. Определение коэффициента полезного действия планетарного механизма .....	21
6.4. Силовой расчет кулачковых механизмов .....	21
Модуль 4. Анализ движения механизма под действием сил .....	24
1. Уравновешивание механизмов .....	24
1.1. Общие сведения .....	24
1.2. Уравновешивание вращающихся тел .....	24
1.3. Уравновешивание механизмов на фундаменте .....	28
2. Анализ движения механизма под действием сил .....	31
2.1. Основные режимы движения механизма .....	31
2.2. Приведение масс, сил и моментов .....	34
2.3. Уравнение движения механизма .....	36
2.4. Определение момента инерции махового колеса .....	36
2.5. Методика определения момента инерции махового колеса .....	51
Литература .....	54

# **Модуль 3. Динамический анализ механизмов**

## **1. Задачи кинетостатики**

Проектирование новых механизмов сопровождается обычно расчетом их элементов на прочность, и размеры звеньев устанавливаются в соответствии с теми силами, которые на них действуют.

Если в кинематике механизмов, в которой рассматривалась лишь геометрия движения, очертанием звеньев пренебрегали, фиксируя лишь характерные размеры, как, например, расстояние между центрами шарниров и другие размеры, определяющие относительное движение звеньев, то при расчете на прочность необходимо иметь представление о звене в трехмерном пространстве. Силы, действующие на элементы кинематических пар, появляющиеся в результате технологических и механических сопротивлений, определяют напряжения в звеньях, если размеры последних выбраны, или же определяют размеры звеньев, если заданы напряжения материала звеньев.

Таким образом, расчету механизмов на прочность должно предшествовать определение сил, поэтому одной из основных задач кинетостатики является определение тех сил, которые действуют на элементы кинематических пар и вызывают деформации звеньев в процессе работы.

Методы расчета сил, действующих на звенья механизма без учета сил инерции, объединены под названием статики механизмов, а методы расчета сил с учетом сил инерции звеньев, определенных приближенно, - кинетостатики механизмов. Практически методы статического и кинетостатического расчетов механизмов ничем не отличаются, если считать силы инерции заданными внешними силами.

Кинетостатика объединяет методы расчета сил, действующих на звенья механизма, с учетом сил инерции.

## **2. Силы, действующие на механизм**

### **2.1. Классификация сил**

В процессе работы машины к звеньям ее приложены заданные внешние силы, к которым относятся: движущая сила, сила технологического сопротивления, силы тяжести звеньев, механические или добавочные сопротивления и силы инерции, появляющиеся в результате движения звена. Неизвестными силами будут реакции связей, действующие на элементы кинематических пар.

Силы, действующие на звенья, условно разделяют на 2 группы: движущие силы  $P_{\text{дв}}$  и силы сопротивления  $P_C$ .

Движущими силами называют силы, производящие положительную работу, т.е. направления движущей силы и скорости точки её приложения либо совпадают, либо образуют острый угол.

Однако в некоторых случаях сила, приложенная к ведущему звену, может обратиться в силу сопротивления и, следовательно, будет производить отрицательную работу. В качестве примера можно указать тепловые двигатели, в которых сила, действующая на поршень, при сжатии газовой смеси производит отрицательную работу.

В двигателе внутреннего сгорания, например, движущей силой будет равнодействующая от сил давления при воспламенении горючей смеси.

Силами сопротивления называют силы, препятствующие движению звеньев механизма. Работа этих сил всегда отрицательна, т.е. направление силы и скорости точки её приложения либо противоположны, либо образуют тупой угол. Различают силы полезного сопротивления и вредного сопротивления. В рабочих машинах силой полезного сопротивления является, например, сопротивление резанию металла, сопротивление при сжатии газов. Силами вредного сопротивления являются силы трения, силы сопротивления среды.

Кроме этих сил необходимо учитывать силы тяжести (силы веса) звеньев  $G$ , которые приложены в центрах тяжести их, силы инерции звеньев и силы реакций связи.

Силы инерции  $P_u$  появляются при неравномерном движении звена. Силы инерции так же, как и силы веса, могут совершать как положительную, так и отрицательную работу.

Силы реакции связи  $R$ , действующих в кинематических парах, вводим при рассмотрении какого-либо звена изолированного от механизма. При рассмотрении всего механизма в целом реакции связей следует считать внутренними силами, т.е. попарно уравновешивающимися.

Механические или добавочные сопротивления  $F$  в машинах встречаются главным образом в виде сил сопротивления, появляющихся при относительном движении элементов кинематических пар, или, иначе, сил трения, в виде сопротивления среды, например аэродинамических сопротивлений, силы сопротивления, обусловленной жесткостью гибких звеньев, например канатов, цепей, ремней и т. д. Силы трения появляются под действием нормальных реакций, действующих в кинематических парах, и являются известными силами. Силы трения, как правило, производят отрицательную работу, потому что они всегда направлены в сторону, обратную скорости относительного движения элементов кинематических пар. Этот вид добавочного сопротивления, сопровождающего работу машин, наиболее важен, потому что во многих случаях почти вся энергия, затрачиваемая на приведение в движение машины, расходуется на преодоление сил трения. Ввиду этого силы трения будут рассмотрены особо.

## 2.2. Внешние силы и механические характеристики машин

Внешние силы могут быть постоянными, как, например, силы тяжести, сопротивления резанию металла при постоянном сечении стружки и др., или зависящими только от положения звена, на которое они действуют (силы давления газов, действующих на поршень двигателя внутреннего сгорания или компрессора, сопротивление, встречаемое пуансоном пресса при прошивании отверстий и др.), от скорости звена (момент электродвигателя, силы трения смазанных тел и др.), от времени. Кроме того, в машине могут действовать силы, зависящие от ряда перечисленных выше независимых переменных. Определение конкретной величины внешней силы возможно только в том случае, если задана ее характеристика.

Так для основного механизма четырехтактного двигателя внутреннего сгорания закон изменения давления  $P$  газа в цилиндре задается индикаторной диаграммой – зависимостью  $P=f(H)$  (рис.1)

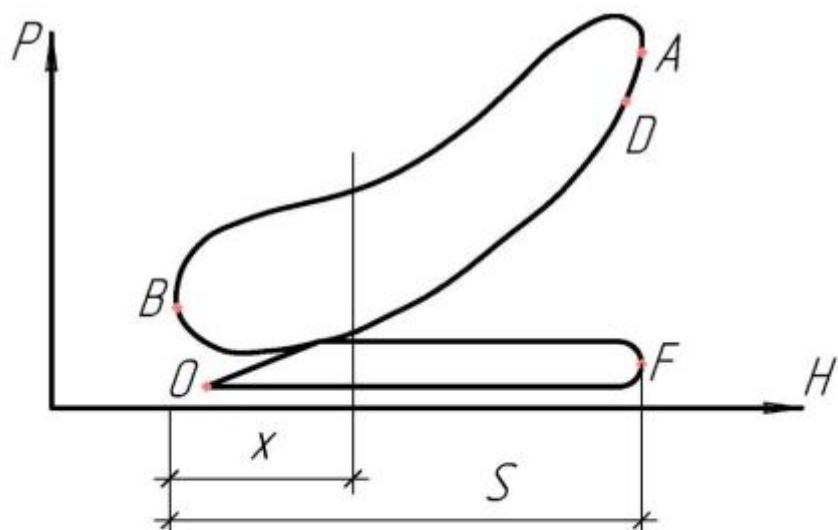


Рис.1

Полный цикл работы двигателя заканчивается в течении двух оборотов кривошипа. За первую половину оборота происходит всасывание горючей смеси FO, за вторую половину оборота сжатие этой смеси OD, по кривой DA – воспламенение смеси, по кривой AB – расширение воспламененной смеси (рабочий ход) по кривой BF – выхлоп.

Откладывая по оси Н перемещение х, взятое с плана механизма, нетрудно найти соответствующую ординату на индикаторной диаграмме.

Избыточное давление  $P_{\text{из}}$  на поршень – это разность давления газа в цилиндре и атмосферного давления, пропорционально ординате, отсчитываемой от линии атмосферного давления.

Силу, действующую на поршень определяют из формулы:

$$P = P_{\text{из}} \cdot \frac{\pi d^2}{4},$$

где  $d$  – диаметр поршня.

Для компрессора простого действия закон изменения давления газа в цилиндре дается также индикаторной диаграммой (рис.2).

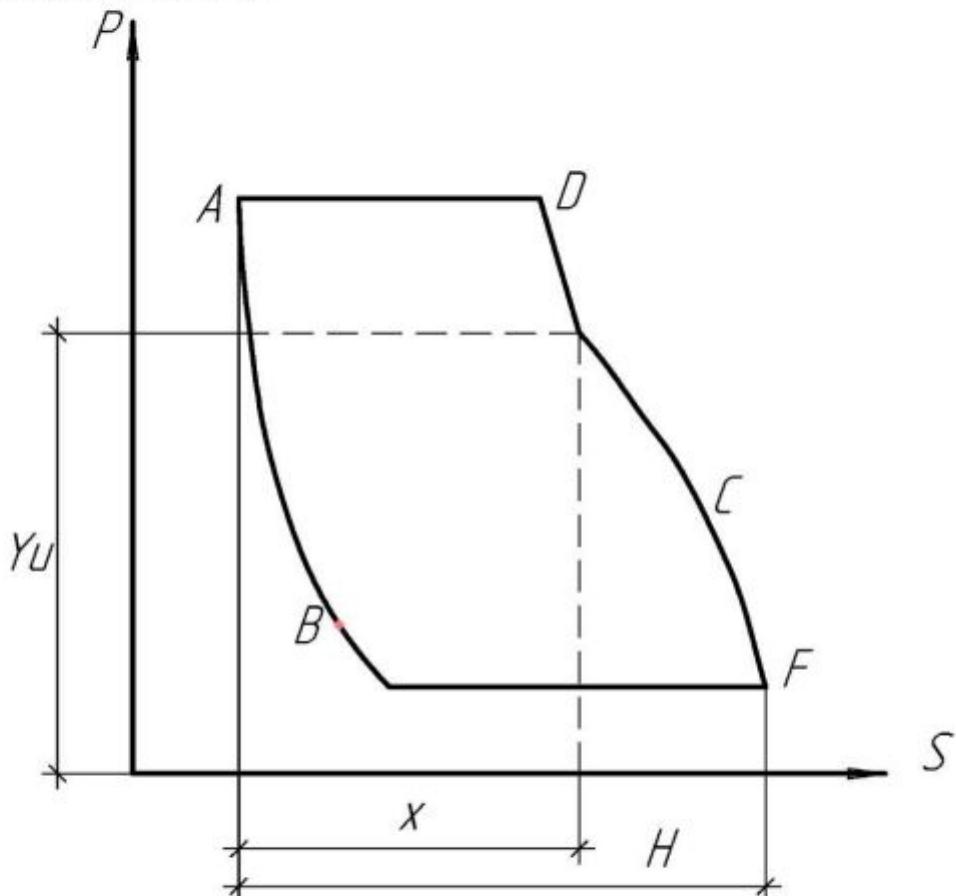


Рис.2

Кривая FCD – сжатие газа,

DA – выхлоп,

AB – расширение газа, оставшегося в мертвом объеме,

BF – всасывание новой порции газа

$\mu_P$  – масштабный коэффициент силы

$$P_{\text{из}} = \mu_p \cdot Y_u \cdot \frac{\pi d^2}{4},$$

где  $Y_u$  – ордината соответствующая переменной  $x$ .

Диаграмма изменения мощности на валу двигателя или среднего момента  $M_{\text{Qep}}$  в зависимости от числа оборотов называется механической характеристикой двигателя (рис. 3).

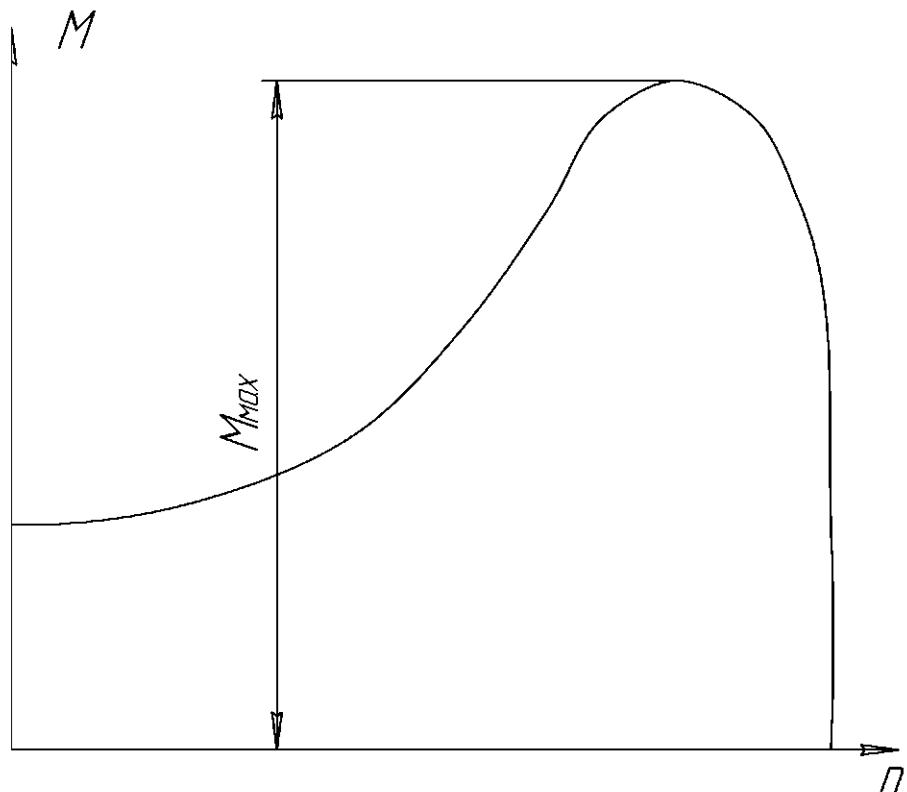


Рис. 3

### 2.3. Определение сил инерции

При работе механизма возникают силы инерции. Они вызывают добавочное давление в кинематических парах. Особенно большой величины эти силы достигают в быстроходных машинах.

Силы инерции определяются по заданному весу звеньев и их ускорениям. Метод определения зависит от вида движения звена.

Первый случай: звено совершает плоскопараллельное движение (шатун). Известно, что элементарные силы инерции в этом случае приводятся к равнодействующей силе  $P_u$  и к моменту сил инерции  $M_u$ .

Сила инерции  $P_u$  приложена в центре тяжести звена и равна:

$$P_u = -ma_s \quad (1)$$

где  $m$  – масса звена

$a_s$  – линейное ускорение центра тяжести звена.

Момент сил инерции:

$$M_u = -J_s \cdot \varepsilon \quad (2)$$

где  $J_s$  – момент инерции звена относительно центра тяжести,

$\varepsilon$  – угловое ускорение звена.

Знак минус указывает на то, что сила инерции  $P_u$  направлена в сторону обратную ускорению  $a_s$ , а момент  $M_u$  – в сторону обратную угловому ускорению  $\varepsilon$ .

Величина и направление ускорений определяются из кинематического расчета. А значение  $m$ ,  $J_s$  должно быть задано.

Сила  $P_u$  и момент  $M_u$  могут быть заменены одной результирующей силой  $R_u$  приложенной в точке качания (рис.4).

Для этого силу инерции  $P_u$  нужно перенести на расстояние равное

$$\overline{SK} = \frac{M_u}{P_u} \quad (3)$$

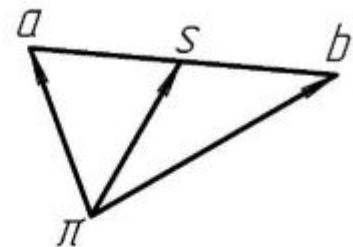
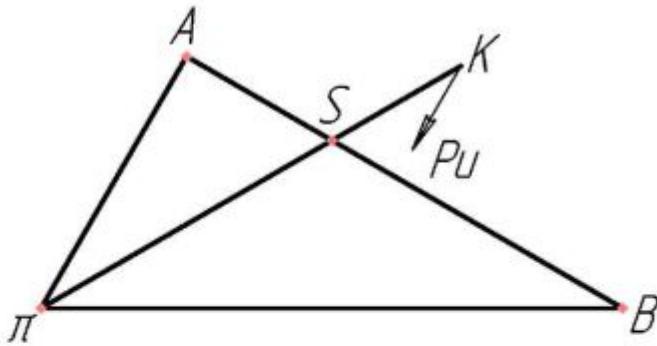


Рис. 4

Величина этого плеча находится следующим способом: с плана ускорения (рис.3) на звено АВ переносится треугольник  $\pi A B \infty \pi a b$

$$SK = \frac{J_s}{m \cdot \pi S} = \frac{J_s}{m \cdot \pi S \cdot \mu_1} \quad (4)$$

отрезок  $\overline{SK} = \frac{SK}{\mu_1}$  найдя точку "К" (точку качания) прикладываем в ней вектор силы инерции, направленный в сторону противоположную вектору ускорения центра тяжести.

Второй случай: звено совершает вращательное движение (рис.5)

а) При неравномерном вращении и при несовпадении центра тяжести с осью вращения имеют место сила инерции  $P_U$  и момент сил инерции  $M_u = -J_s \cdot \varepsilon$ . При приведении силы и момента плечо SK определяется по формуле (4):

$$SK = \frac{J_s}{m \cdot \pi S}$$

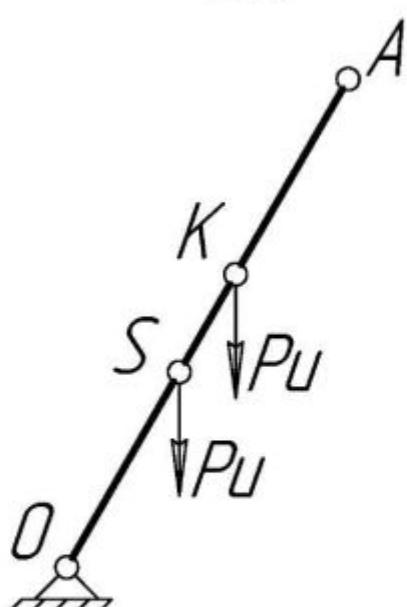


Рис. 5

где SK – расстояние от центра тяжести до точки качания.

$$\pi_s = OS$$

б) При равномерном движении  $P_U$  положена в центре тяжести.

$$M_u = 0 \text{ т.к. } \varepsilon = 0$$

в) Центр тяжести совпадает с осью вращения  $\mathcal{E} = 0$ , то  $P_u = 0; M_u = 0$ .

Третий случай: звено совершает поступательное движение (ползун) (рис.6).

Здесь  $\varepsilon = 0, M_u = 0$ . Если движение звена неравномерное, то возникает сила инерции

$$P_u = -m \cdot a_s$$

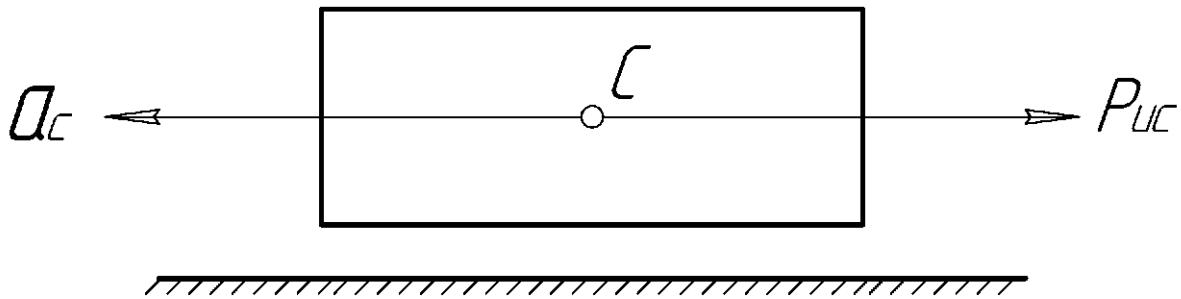


Рис.6

Если в задании на курсовое проектирование не задан момент инерции звена, его можно приблизенно определить по формуле:

$$I_s = \frac{ml^2}{K} \quad (6)$$

где  $m$  – масса звена,

$l$  – длина звена,

$K$  – коэффициент  $8 \div 10$

Одной из задач динамики механизмов является определение сил, действующих на элементы кинематических пар, и так называемых уравновешивающих сил. Знание этих сил необходимо для расчета механизмов на прочность, определения мощности двигателя, износа трущихся поверхностей, установления типа подшипников и их смазки и т. д., т. е. силовой расчет механизма является одной из существенных стадий проектирования машин.

Под уравновешивающими силами принято понимать силы, уравновешивающие заданные внешние силы и силы инерции звеньев механизма, определенные из условия равномерного вращения кривошипа. Число уравновешивающих сил, которые нужно приложить к механизму, равно количеству начальных звеньев или, иначе, – числу степеней свободы механизма. Так, например, если механизм обладает двумя степенями свободы, то в механизме должны быть приложены две уравновешивающие силы.

### 3. Силовой анализ механизмов. Определение реакций в кинематических парах

Силовой анализ механизмов основывается на решении прямой, или первой, задачи динамики – по заданному движению определить действующие силы. Поэтому законы движения начальных звеньев при силовом анализе считаются заданными. Внешние силы, приложенные к звеньям механизма, обычно тоже считаются заданными и, следовательно, подлежат определению только реакции в кинематических парах. Но иногда внешние силы, приложенные к начальным звеньям, считаются неизвестными. Тогда в силовой анализ входит определение сил, при которых выполняются принятые законы движения начальных звеньев. При решении обеих задач используется принцип Д'Аламбера, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции. Уравнения равновесия в этом случае называют уравнениями кинетостатики, чтобы отличить их от обычных уравнений статики, т. е. уравнений равновесия без учета сил инерции. Обычно звенья плоских механизмов имеют плоскость симметрии, параллельную плоскости движения. Тогда главный вектор сил инерции звена  $P_u$  и главный момент сил инерции звена  $M_u$ , определяются по формулам:

$$P_u = -m \cdot a_s \overline{M_u} = -J_s \cdot \ddot{\varepsilon},$$

где  $m$  - масса звена;

$a_s$  - вектор ускорения центра масс.

При кинетостатическом расчете механизма необходимо определить реакции в кинематических парах и либо уравновешивающую силу, либо уравновешивающий момент пары сил.

Силовой расчет механизмов будем вести в предложении, что трение в кинематических парах отсутствует и все силы, действующие на механизм расположены в одной плоскости.

Одним из известных методов силового расчета является метод рассмотрения каждого звена механизма в равновесии. При этом методе механизм расчленяется на отдельные звенья.

Вначале рассматривается равновесие крайнего звена, считая от главного (ведущего), затем равновесие звена, соединенного с крайним, и т.д. Равновесие главного звена рассматривается в последнюю очередь.

Рассматривая отдельно взятое звено в равновесии, необходимо приложить к нему все внешние силы ( $P_{db}$ ,  $P_{nc}$ ,  $P_u$ ,  $G$ ) включая реакции связей, с которыми отсоединенное звено действует на взятое звено.

Изложим методику расчета на примере четырехзвенного механизма. Вначале рассмотрим в равновесии звено 3 (коромысло), приложив к нему все действующие силы, включая реакции связей. (Рис. 7)

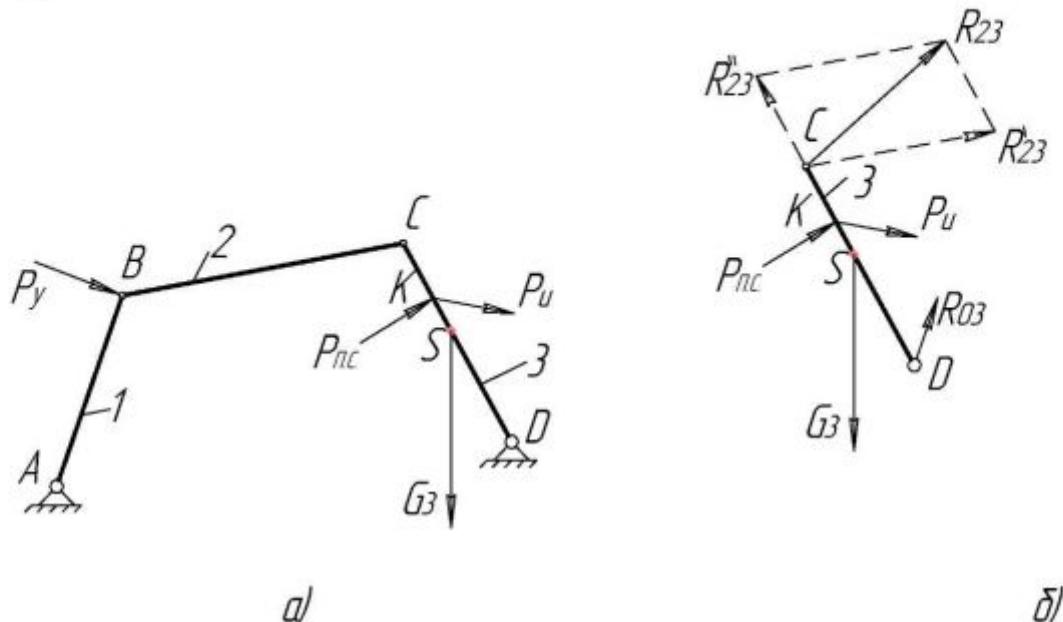


Рис. 7

Реакция во вращательной паре "С" неизвестна ни по величине, ни по направлению.

Для определения этой реакции заменяем её двумя составляющими

(рис. 7б), одну из которых –  $R'_23$  направляем по шатуну (2), вторую составляющую  $R''_23$  – по коромыслу (3).

$$\overline{R_{23}} = \overline{R'_23} + \overline{R''_23}$$

Величина  $R'_23$  может быть найдена из условия равновесия рассматриваемого звена.

Звено (3) находится в равновесии под действием следующих сил  $P_{nc}$ ;  $P_u$ ;  $G_3$ ;  $R_03$ ;  $R'_23$ ;  $R''_23$ .

Составляем уравнение моментов всех сил относительно точки D

$$\sum M_D(P_i) = 0$$

$$-P_{\text{П.С.}} \cdot h_{p\text{П.С.}} - P_{u_3} \cdot h_{p_u} + G_3 \cdot h_G - R'_{23} \cdot h_{R'_{23}} = 0$$

откуда

$$R'_{23} = \frac{G_3 \cdot h_G - P_{\text{П.С.}} \cdot h_{p\text{П.С.}} - P_{u_3} \cdot h_{p_u}}{h_{R'_{23}}}$$

Если после определения этой величины она окажется отрицательной, то её направление будет противоположно выбранному.

Составляющую  $R'_{23}$  можно найти, рассмотрев в равновесии отдельно взятое звено (2) (рис.8а).

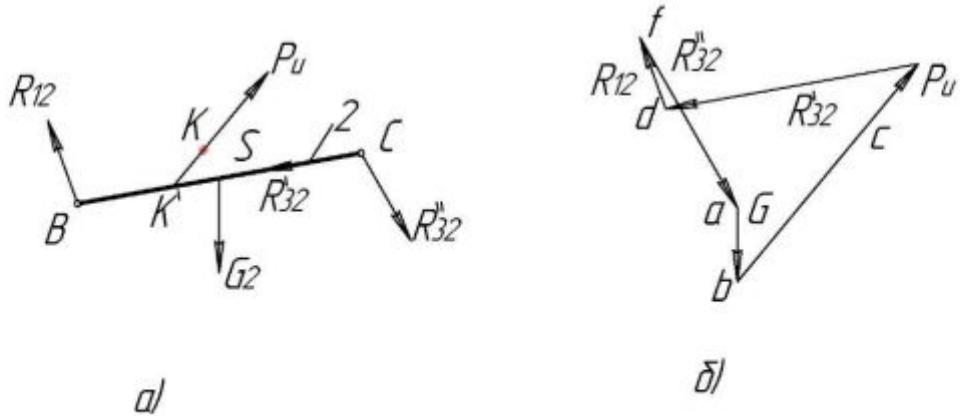


Рис. 8

Из условия равновесия звена (2) можно написать

$$\sum M_n(P_i) = 0$$

$$P_{u_2} \cdot h_{p_u} - G_2 \cdot h_{G_2} - R''_{23} \cdot h_{R''_{23}} = 0$$

$$\text{причем } R''_{32} = -R''_{23}$$

$$R''_{32} = \frac{P_{u_2} \cdot h_{p_u} - G_2 \cdot h_{G_2}}{h_{R''_{32}}}$$

Оставшуюся неизвестную реакцию  $R_{12}$  можно найти графическим методом, построив план сил этого звена (рис. 8б).

Уравнение равновесия звена (2) имеет следующий вид:

$$\overline{R_{12}} + \overline{G_2} + \overline{P_{u_2}} + \overline{R'_{32}} + \overline{R''_{32}} = 0$$

Из произвольно выбранного полюса  $f$  откладываем в масштабе  $\mu_p$  силу  $R''_{32}$  в виде вектора

$\overline{fd}$ , к нему геометрически прибавляем вектор  $\overline{db}$ , изображающий в том же масштабе  $\mu_p$  силу  $G$  и т.д.

Вектор  $\overline{df}$  дает нам величину реакции  $R_{12}$  в масштабе  $\mu_p$ .

Далее приступаем к нахождению силы, уравновешивающей механизм.

Для этого рассматриваем в равновесии кривошип АВ. (рис.9).

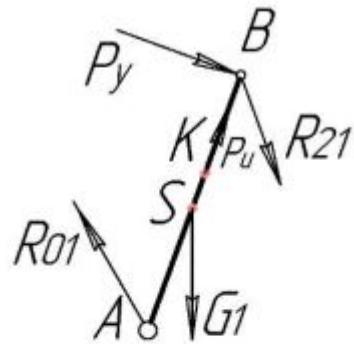


Рис. 9

Кривошип находится под действием силы веса  $G_1$ , реакции шатуна (2) на кривошип  $R_{21}$ , силу инерции  $P_{u1}$ .

Под действием этих сил кривошипы в общем случае не будет находиться в равновесии. Для равновесия необходимо приложить уравновешивающую силу  $P_y$ , или уравновешивающий момент  $M_y$ .

Этими уравновешивающими силой и моментом являются реактивные силы или момент от двигателя.

Пусть уравновешивающая сила будет направлена по нормали к кривошипу и приложения в точке В. Из условия равновесия звена АВ можно составить уравнение суммы моментов всех сил относительно точки А.

$$\sum M_A(P_i) = 0$$

$$-R_{21} \cdot h_{R_{21}} - G \cdot h_{G1} - P_y \cdot h_{P_y} = 0$$

откуда

$$P_y = \frac{-R_{21} \cdot h_{R_{21}} - G \cdot h_{G1}}{h_{P_y}},$$

Уравновешивающую силу можно найти также методом, при котором в равновесии рассматривается весь механизм.

Условие равновесия механизма можно выразить следующим уравнением:

$$\sum N(P_i) = 0 \quad (7)$$

Сумма мощностей всех сил, приложенных к механизму, с учетом сил инерции и уравновешивающих сил равна нулю.

Мгновенная мощность силы, приложенной в  $i$ -той точке пропорциональна моменту этой силы относительно конца вектора повернутой скорости данной точки (рис.10).

$$N_i = \mu_p \cdot \mu_o \cdot \bar{P}_i \cdot h_i \quad (8)$$

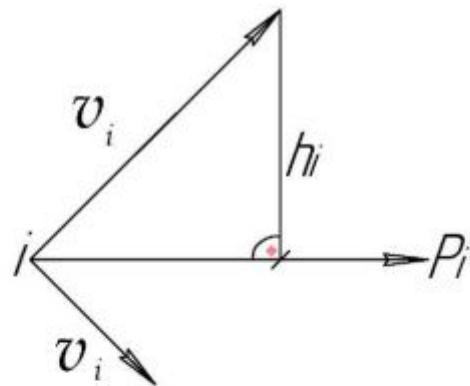


Рис. 10

Из уравнения равновесия можно найти уравновешивающую силу. Часто удобно находить Ру с помощью вспомогательного рычага Жуковского, когда для механизма построен полярный план скоростей, повернутый на  $90^\circ$ . В последнем случае к концам найденных векторов скоростей следует приложить действующие внешние силы.

После этого, рассматривая повернутый план скоростей как жесткий рычаг, врачающийся вокруг полюса Р можно написать уравнение равновесия рычага в виде суммы моментов сил относительно полюса:

$$\sum M_p(P_i) = 0$$

Уравнение равновесия плана скоростей, рассматриваемого как жесткий рычаг, тождественно уравнению мощностей.

Если к звеньям механизма кроме сил приложен еще и момент М (рис. 11), то его можно рассматривать как пару сил, составляющая которой равна:

$$P = \frac{M}{l_{AB}} \quad (11)$$

Найденные силы Р прикладываются в соответствующих изображающих точках плана скоростей.

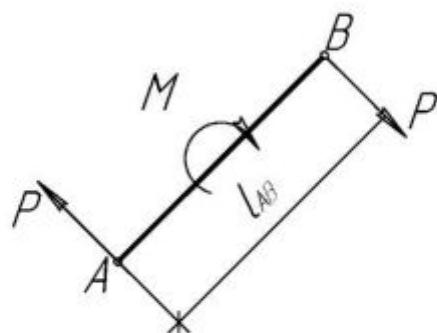


Рис. 11

## 4. Трение в кинематических парах

### 4.1. Трение скольжения

Под потерями на трение в механизме имеют в виду потери на трение в его кинематических парах. Различают трение двух основных видов: трение скольжения и трение качения. В низших кинематических парах возникает трение скольжения, в высших – только трение качения или трение качения совместно с трением скольжения.

Если поверхности движущихся тел А и В (рис. 13) соприкасаются, то трение, возникающее при этом, называют сухим. Если поверхности не соприкасаются (рис. 14) и между ними имеется слой смазки, то такое трение называют жидкостным. Встречаются также случаи, когда имеется полусухое (преобладает сухое), или полужидкостное, трение.

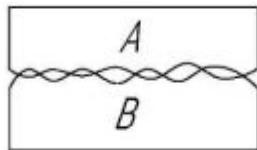


Рис. 12

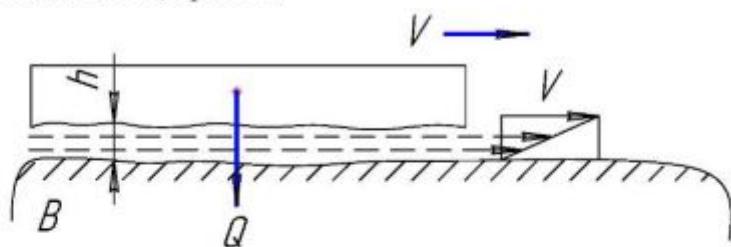


Рис. 13

#### 4.2. Сухое трение

Основные законы:

1. В определенном диапазоне скоростей и нагрузок коэффициент трения скольжения можно считать постоянным, а силу трения —  $F$  пропорциональной нормальному давлению:

$$F = fN,$$

где  $f$  - коэффициент трения скольжения,

$N$  - нормальное давление.

2. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и состояния трущихся поверхностей.

3. Силы трения всегда направлены в сторону, противоположную относительным скоростям.

4. Коэффициент трения покоя несколько больше коэффициента трения при движении.

5. С увеличением скорости движения сила трения в большинстве случаев уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению; при малых скоростях коэффициент трения почти не зависит от скорости.

6. С возрастанием удельного давления коэффициент трения в большинстве случаев увеличивается. При малых удельных давлениях коэффициент трения почти не зависит от величины удельного давления и площади соприкосновения.

7. С увеличением времени предварительного контакта сила трения возрастает.

#### 4.3. Жидкостное трение

При сухом трении происходит большая затрата работы, превращающейся в теплоту, и износ трущихся поверхностей. Для устранения этих явлений между трущимися поверхностямиводится слой смазки. В этом случае при соблюдении определенных условий слой смазки может полностью разделять трущиеся поверхности (рис. 14).

#### 4.4. Трение при скольжении ползуна по тали плоскости

Поступательная кинетическая пара, состоящая из горизонтальной направляющей 2 и ползуна 1, показана на рисунке 15. Пусть на ползун 1 действуют следующие силы:  $P_d$  - движущая,  $G$  - вес груза или нагрузка, действующая на ползун,  $N$  - нормальная реакция,  $F_0$  - сила трения (касательная реакция) при покое. При движущемся ползуне вместо силы трения  $F_0$  действует сила трения  $F$  при движении, причем  $\vec{N} = -\vec{G}$ , и полная реакция  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$ .

Угол  $\phi$  отклонения полной реакции от нормали в сторону, противоположную движению ползуна, называют углом трения.

Учитывая, что  $F = N \cdot \operatorname{tg}\phi = G \cdot \operatorname{tg}\phi$ ,  $F = fG$ , то  $f = \operatorname{tg}\phi$ .

Следовательно, коэффициент трения равен тангенсу угла трения.

#### 4.5. Трение в кинематической паре шип - подшипник

При наличии зазора цапфа под действием  $M_d$  из своего низшего положения перекатывается в новое положение, которое характеризуется наступившим равновесием между движущими силами и силами сопротивления. На рис. 16а приняты следующие обозначения:  $r$  - радиус шипа,  $Q$  - внешняя на грузка,  $R$  - реакция подшипника, действующая на шип,  $\phi$  - угол трения,  $\rho$  - радиус круга трения (рис.15)

Силы  $Q$  и  $R$  образуют пару момент которой представляет собой момент сопротивления  $M_{\text{сопр}}$ ; в каждый данный момент он уравновешивает момент движущих сил  $M_d$ , т.е.

$$M_{\text{сопр}} = M_d .$$

$$\text{Момент сил сопротивления } M_{\text{сопр}} = R\rho = N \frac{\rho}{\cos \phi} ,$$

$$\text{где } R = \frac{N}{\cos \phi}$$

$$\text{Момент сил трения } M_F = M_{\text{сопр}} = Fr ,$$

где  $F = fN$ ;  $r$  - радиус шипа;

$$M_F = fNr = N \frac{\rho}{\cos}$$

Вследствие малости угла  $\phi$  величина  $\cos \phi \approx 0$ . Следовательно, радиус круга трения  $\rho = fr$  равен смещению полной реакции  $R$  от внешней нагрузки  $Q$ .

Итак, момент сил трения  $M_F = fQr$

#### 5. Коэффициент полезного действия механизма

Механическим к. п. д. машины называют отношение абсолютного значения работы полезных сопротивлений  $A_{\text{П.С.}}$  к работе движущих сил  $A_d$  за период установившегося движения:

$$\eta = \frac{A_{\text{П.С.}}}{A_d} \quad (1)$$

Из уравнения движения машины при установившемся движении  $A_{\text{П.С.}} + A_{\text{в.с.}} = A_d$  находим  $A_{\text{П.С.}} = A_d - A_{\text{в.с.}}$ .

После подстановки  $A_{\text{П.С.}}$  в выражение (1) получим следующее выражение для к. п. д.:

$$\eta = \frac{A_d - A_{\text{в.с.}}}{A_d} = 1 - \frac{A_{\text{в.с.}}}{A_d} = 1 - \psi ,$$

где  $\psi = \frac{A_{\text{в.с.}}}{A_d}$  - коэффициент потерь.

К. п. д. тем больше, чем меньше работа вредных сопротивлений. Определив, например, мгновенные к. п. д. в двенадцати положениях рычажного механизма за один оборот установившегося движения, можно построить график функции  $\eta = \eta(\phi)$ . На практике обычно пользуются средним арифметическим значением к. п. д. за период установившегося движения:

$$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{12}}{12} .$$

Машина может иметь очень низкий мгновенный к. п. д. в отдельных положениях механизма. Мгновенный к. п. д. рычажного механизма можно выразить как отношение мощностей:

$$\eta = \frac{N_{\text{п.с.}}}{N_{\text{д}}},$$

где  $N_{\text{п.с.}}$  - мгновенная мощность сил полезного сопротивления для каждого положения механизма;

$N_{\text{д}}$  - мгновенная мощность движущих сил для соответствующего положения механизма.

К. п. д. группы последовательно соединенных механизмов или машин. Ряд машин или механизмов, входящих в агрегат, может быть соединен последовательно (рис. 11а), параллельно (рис. 11б)

Общий к. п. д. машины при последовательном соединении механизмов равен произведению их к. п. д.

В общем случае

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n.$$

К. п. д. группы параллельно соединенных механизмов или машин. Это соединение характеризуется разветвлением общего потока энергии.

Общий к. п. д. равен:

$$\eta = \frac{\eta' A_{\text{д}} + \eta' A_{\text{д}}'}{A_{\text{д}} + A_{\text{д}}'}$$

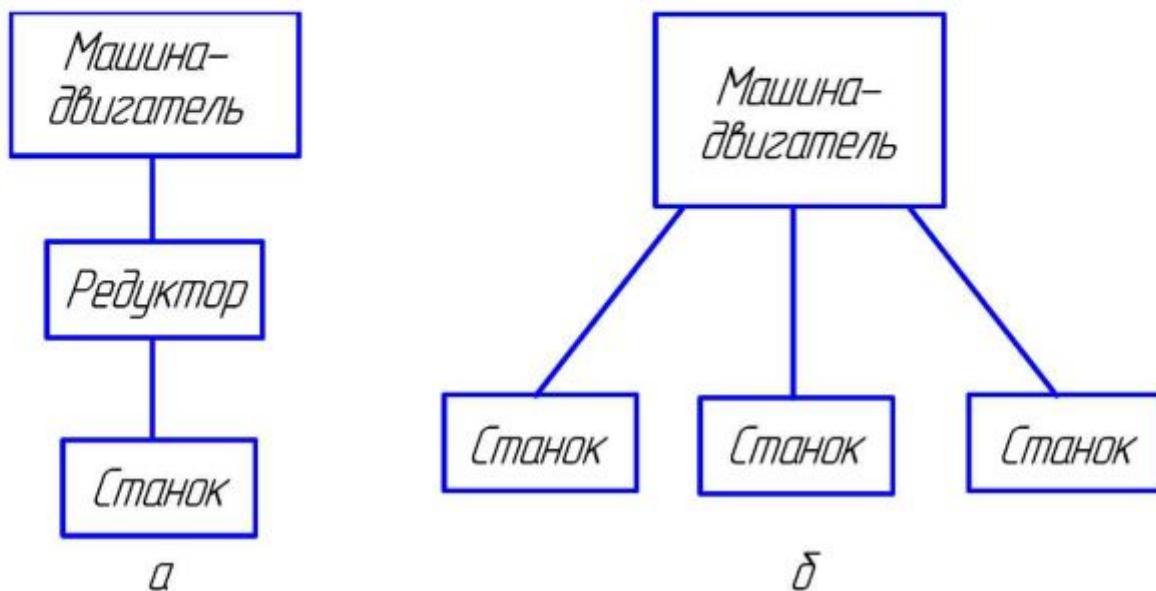


Рис. 16

## 6. Определение реакций в кинематических парах с учетом трения

Выполненный в первой части расчет без учета трения дает значения реакций в кинематических парах механизма в первом приближении. Определение же сил с учетом трения является дальнейшим уточнением и проводится обычно (и в нашем случае) методом последовательного приближения. Для выполнения второго приближения задаются значения коэффициентов трения скольжения во всех парах и диаметры цапф вращательных пар. Методика расчета механизма с учетом и без учета трения одна и та же. Разница только в том, что силы реакций в поступательных парах отклоняются от своих прежних нормалей на угол трения и направлены против вектора скорости поступательной пары. Во вращательных – линиях их действия пройдет касательно к кругам трения, эти реакции можно заменить реакцией приложенной в центре шарнира, при этом нужно приложить к данному шарниру момент трения определяемого по формуле:

$$M^T = R \cdot r \quad (11)$$

где  $r$  – радиус трения, определяемый по формуле:

$$r = \frac{D_y}{2} \cdot \sin \rho \quad (12)$$

где  $D_y$  – диаметр цапф,

$\rho$  - угол трения.

$R$  в формуле (11) – это реакция в данном шарнире, полученная в первой части, без учета сил трения. Направление момента противоположно угловой скорости звена относительно данного шарнира.

#### 6.1. Силовой анализ зубчатых механизмов

Для подавляющего большинства зубчатых передач основным является установившийся режим работы. Поэтому в передачах этого типа моменты от сил инерции будут равны нулю (без учета колебаний, вызываемых переменной жесткостью и ошибками шага).

Давление между эвольвентными профилями передается по линии зацепления, которая совпадает с их общей нормалью.

Если к ведомому колесу приложен момент сопротивления  $M_C$ , то сила сопротивления:

$$P_C = \frac{M_C}{r_{O_2}} = \frac{M}{r}$$

Сила  $P_C$  приложена к ведущему колесу 1; ведомому колесу 2 приложена движущая сила  $\bar{Q} = -\bar{P}_C$ . Из формулы следует, что, если  $M_C = \text{const}$ , то сила  $P_C$  давления между зубьями постоянна как по величине, так и по направлению; она увеличивается с увеличением угла зацепления.

В центре ведущего колеса 1 приложим две равные и противоположно направленные силы  $P_C$ . Силы  $R^*$  — давление в опорах колеса; две другие силы  $R$  образуют пару сил, момент которой равен моменту  $M_D$ . Подставляя значение  $P_C$  из формулы, получаем

$$M_D = \frac{M_C}{r_{O_2}} r_{O_1} = M_C \frac{r_1}{r_2} = \frac{M_C}{u_{12}}$$

Пара  $Qr_{O_2}$ , приложенная к колесу 2, преодолевает приложенный к этому колесу момент сопротивления  $M_C$ .

Равные и обратно направленные силы  $R^*$  и  $Q^*$  образуют пару с моментом

$$M_p = R(r_{O_1} + r_{O_2}) = R \frac{A}{\cos \alpha}$$

Эта пара стремится повернуть стойку (раму) передачи (в нашем случае по часовой стрелке). Для того чтобы этого не произошло, стойка должна быть закреплена. Момент, создаваемый рассматриваемой парой, получил название реактивного момента.

Очевидно, что и при переменном  $M_C$  направления сил давления между зубьями и в опорах валов будут постоянны. Это является одним из преимуществ эвольвентного зацепления, так как обеспечивает спокойную работу передачи.

Так как профили зубьев в процессе их зацепления имеют относительное скольжение, то между ними возникают силы трения, равнодействующая  $F$  которых направлена против скорости скольжения  $v_{sk}$

Величина этой силы

$$F = fR = f \frac{M_C}{r_{O_2}} = f \frac{M_C}{r_2 \cos \alpha},$$

где  $f$  - коэффициент трения скольжения профилей.

Мощность сил трения в наружном зацеплении

$$N_{tp} = Fv_{ek} = fR(\omega_1 + \omega_2)P_0M = f \frac{M_c}{r_2 \cos \alpha} (\omega_1 + \omega_2)P_0M.$$

Следовательно, мощность сил трения в зацеплении переменна и увеличивается по мере того, как точка М касания профилей удаляется от полюса зацепления.

В опорах валов также возникают силы трения, пропорциональные давлениям  $R$  и  $Q$  в этих опорах. Величины этих сил трения зависят от ряда факторов (от условий смазки соприкасающихся поверхностей, от их упругих свойств, определяющих закон распределения удельных давлений, от скорости скольжения опорных поверхностей и т. д.). Равнодействующая этих сил  $F_t = f_{n1}R$ ,

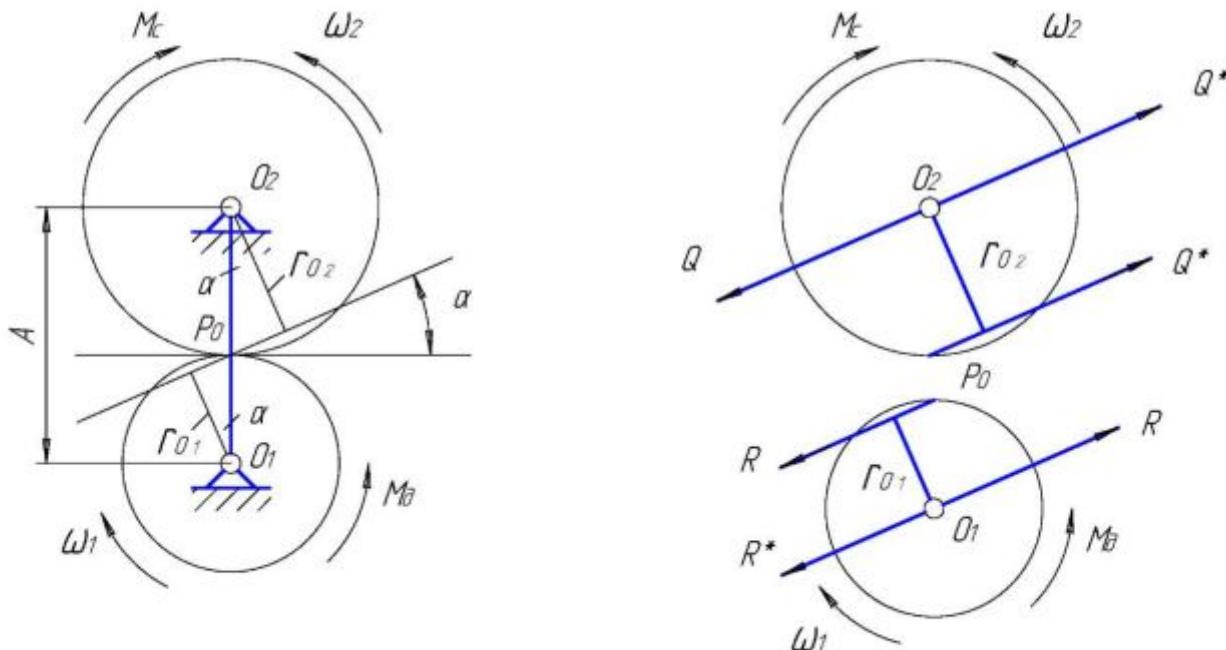


Рис. 17

где  $f_{n1}$  - коэффициент трения, учитывающий условия работы вала в подшипниках. Приложена эта сила в одной из точек опорной поверхности вала на расстоянии  $r_B$  от его оси.

Мощность сил трения в опорах

$$N_{tp1} = M_{tp1}\omega_1 = F_1r_{B1}\omega_1 = f_{n1}Rr_{B1}\omega_1 = f_{n1} \frac{M_c}{r_2 \cos \alpha} r_{B1}\omega_1;$$

$$N_{tp2} = f_{n2} \frac{M_c}{r_2 \cos \alpha} r_{B2}\omega_2.$$

Из формул видно, что если  $M_c = \text{const}$ , то и мощность сил трения в опорах постоянна.

Пользуясь этой формулой, можно определить момент  $M_d$  и мощность  $N_d$  двигателя, который должен быть соединен с ведущим валом передачи, если заданы  $M_c$  и  $i_{12}$

Величины коэффициентов  $f$  и  $f_n$  зависят от большого числа различных факторов и могут колебаться в очень широких пределах. Например, коэффициенты трения профилей зависят не только от материалов и точности их обработки, но и от смазки; кроме трения скольжения, между профилями имеет место трение качения; если передача работает в масляной ванне, то затрачивается работа на перемешивание масла и т. д.

## 6.2. Определение моментов в планетарном механизме без учета трения

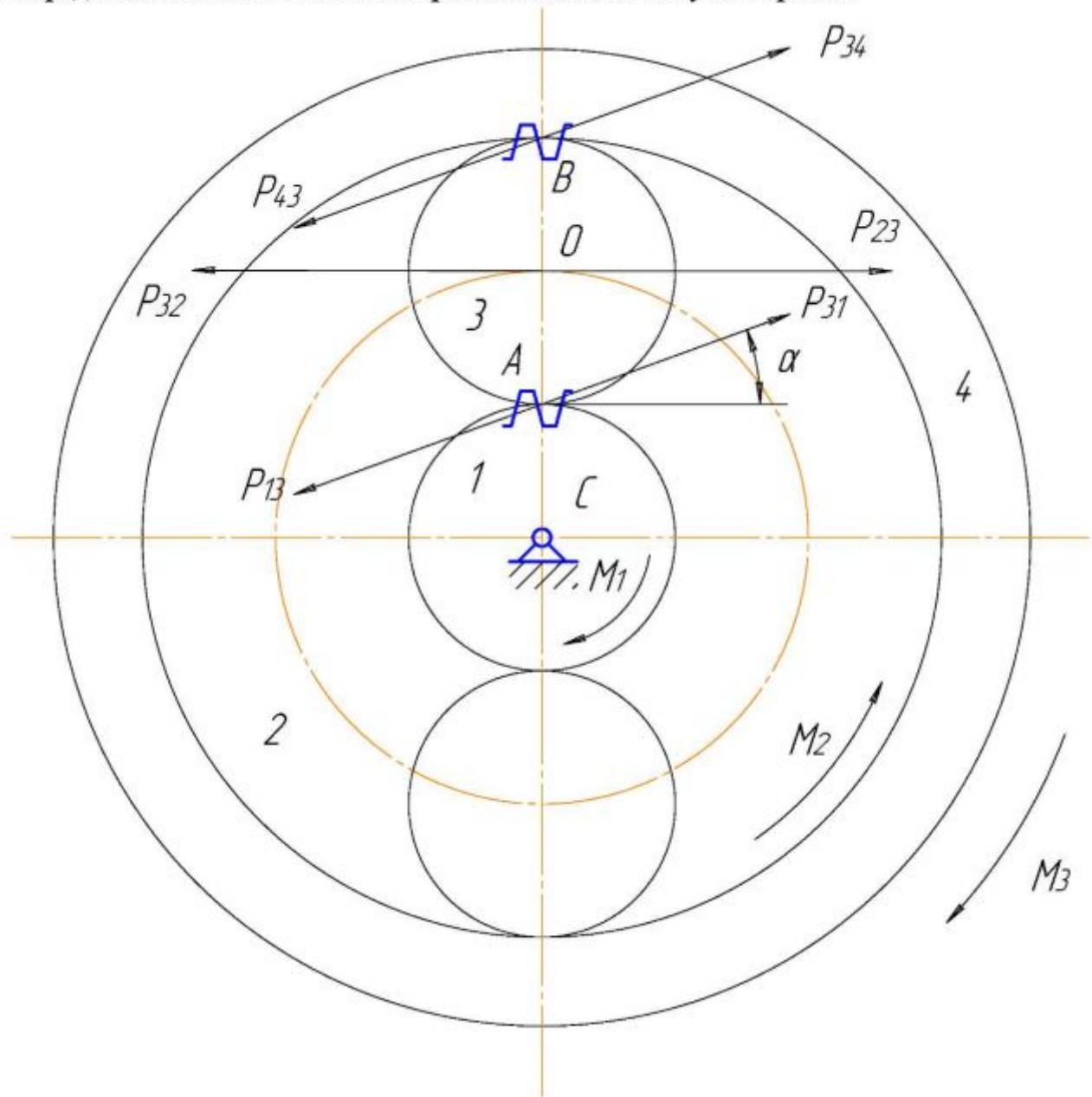


Рис. 18

Рассмотрим вопрос определения моментов в планетарном механизме, звенья которого вращаются равномерно. В планетарном механизме изображенном на (рис.13 солнечное колесо 1, водило 2 и коронное колесо 4 вращаются вокруг центральной оси С. Тангенциальная составляющая  $P_{31}$  реакции на сателлит 3 со стороны солнечного колеса 1 без учета силы трения приложена в полюсе зацепления А. В обратную сторону направлена сила  $P_{13}$ . В точке В действуют составляющие реакции  $P_{34}$  и  $P_{43}$ , а в центре сателлита –  $P_{23}$  и  $P_{32}$ .

Будем рассматривать такие планетарные механизмы, в которых сателлит не является выходным звеном, т.е.  $M_3=0$ . Тогда  $\overline{P_{31}} = \overline{P_{34}}$  и потому:

$$\overline{P_{32}} = \overline{P_{34}} + \overline{P_{31}} = 2\overline{P_{31}} \quad (13')$$

Рассматривая равновесие звена 1 получим:

$$kP_{13} \cdot r_1 - M_1 = 0$$

откуда

$$P_{13} = \frac{M_1}{k r_1} \quad (13)$$

где  $k$  – количество сателлитов механизма.

Из равновесия звена 2 имеем:  $-kP_{23} \cdot r_2 + M_2 = 0$

Откуда

$$M_2 = kP_{23} \cdot r_2 \quad (14)$$

Учитывая (13) и (13), перепишем (14):

$$M_2 = -2kP_{13} \cdot r_2$$

из (14) и (13) получим:

$$\frac{M_2}{M_1} = -2 \frac{r_2}{r_1} \quad (14)$$

Запишем условие равновесия звена 4:

$$-M_4 + kP_{43}r_4 = 0$$

Откуда

$$M_4 = kP_{43}r_4 \quad (15)$$

Поэтому, учитывая условие:  $P43 = -P13$  из (13) имеем:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{r_4}{r_1}$$

Следовательно, если один из моментов, действующих в планетарном механизме, известен, то зная радиусы начальных окружностей, по формулам (15) и (15) можно определить неизвестные моменты.

Задачу определения моментов можно решить и с помощью общего плана угловых скоростей. Рассмотрим методику определения моментов.

Пусть для планетарного редуктора с корректированными зубчатыми колесами построен общий план угловых скоростей (рис.19)

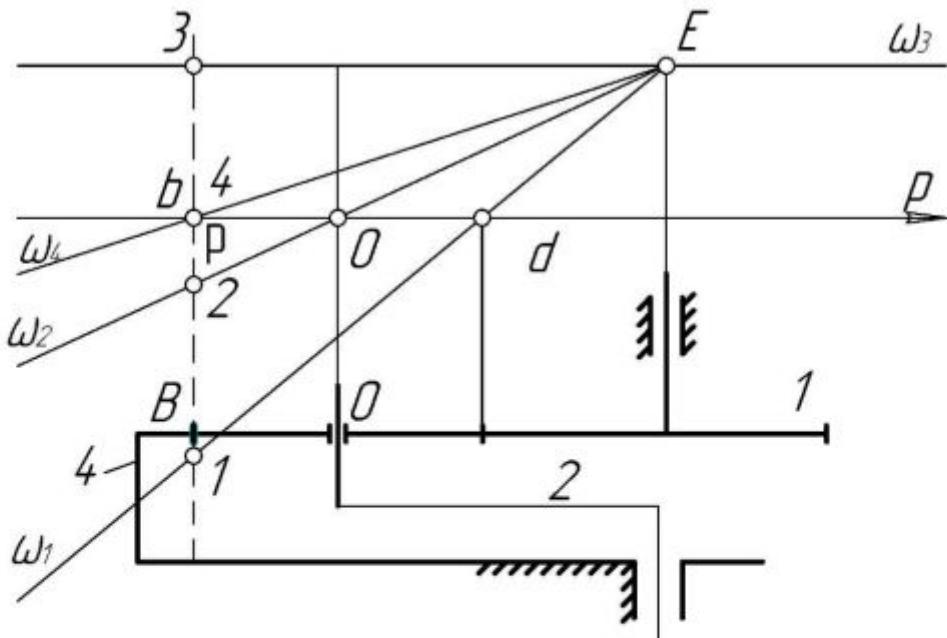


Рис. 19

$M_1\omega_1$  – мощность, подводимая к звену 1.  $M_2\omega_2$  – мощность, снимаемая с водила. Так как потери не учитываются, то:

$$M_1\omega_1 = M_2\omega_2$$

откуда: 4

$$\text{но } \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\overline{P}_2}{\overline{P}_1} = \frac{\overline{42}}{\overline{41}}$$

поэтому

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{12}}{\overline{24}} \quad (16')$$

Так как под действием моментов, планетарный механизм в установившемся равновесном режиме находится в равновесии, то имеет место равенство

$$M_1 + M_2 + M_4 = 0 \quad (16)$$

где  $M_4$ , при  $\omega_4 = 0$  следует понимать как момент, который необходимо приложить к звену 4, чтобы удержать его от вращения.

Из (16) получим:

$$\frac{M_4}{M_1} = -\frac{M_2}{M_1} - 1 \quad (17)$$

Учитывая (16') перепишем (17) так:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{41}}{\overline{42}} - 1$$

или после упрощения:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{41} - \overline{42}}{\overline{42}} = \frac{\overline{21}}{\overline{42}}$$

Окончательно получим:

$$\frac{M_4}{M_1} = \frac{\overline{12}}{\overline{24}}$$

Из (16) и (17) следует правило для определения моментов.

### 6.3. Определение коэффициента полезного действия планетарного механизма

К.п.д. механической передачи зависит от многих факторов, из которых наибольшее значение имеют потери мощности в зацеплении пар зубчатых колес. Определим к.п.д. планетарного редуктора при передаче моментов от звена 1 к звену 2 по формуле:

$$\eta_{12} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{\widetilde{M}_2 \cdot \omega_2}{\widetilde{M}_1 \cdot \omega_1} = \frac{\widetilde{U}_{12}}{U_{12}} \quad (18)$$

где  $\widetilde{U}_{12} = \frac{\widetilde{M}_{12}}{M_1}$  называется силовым передаточным отношением. Здесь  $\widetilde{M}_2$  и  $\widetilde{M}_1$  — моменты,

действующие на звенья 2 и 1 с учетом трения в зацеплении  $U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  — кинематическое передаточное отношение.

### 6.4. Силовой расчет кулачковых механизмов.

#### Схема действия сил.

Так как ведомое звено (штанга-толкатель)-движется с переменной скоростью, то схемы действия сил, приложенных к кулачковому механизму на разных участках интервала его перемещения, различны.

В интервале рабочего перемещения к ведомому звену приложена сила

полезного сопротивления  $R$ , направленная против скорости звена. Сила  $R$ , как правило, всегда задана; она может быть постоянной или переменной.

Если в механизме осуществлено силовое замыкание высшей пары, то на ведомое звено в том же направлении действует упругая сила  $P_P$  пружины, которая в это время сжимается.

Из-за неравномерного движения штанги возникает сила инерции:

$$\overline{P}_i = -m_{ш} \overline{a}_{ш},$$

где  $m_{ш}$  — масса штанги,  $\overline{a}_{ш}$  — ее ускорение; направлена сила  $\overline{P}_i$  Равно противоположно ускорению штанги. Так как масса штанги постоянная  $m_{ш} = \frac{v_{ш}}{g}$ , то закон (график) изменения силы  $\overline{P}_i$  совпадает с законом (графиком) изменения ускорения штанги.

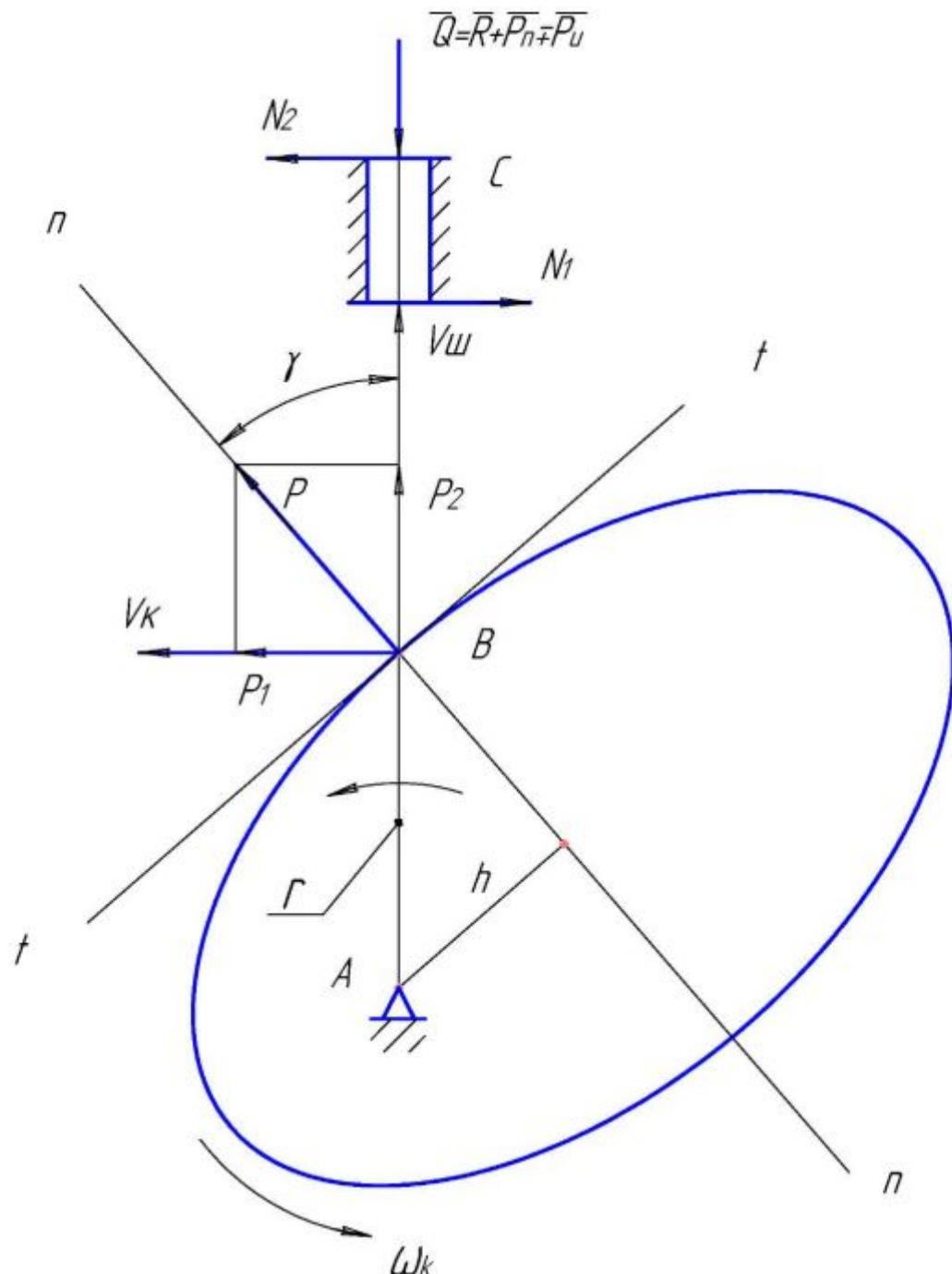


Рис. 20

Равнодействующая  $Q$  всех сил, приложенных к штанге равна:

$$\bar{Q} = \bar{R} + \bar{P}_n \pm \bar{P}_u$$

Если пренебречь трением в паре кулачок – штанга, то направление силы  $P$  давления кулачка на штангу совпадает с нормалью к профилю кулачка. Если не учитывать трение в направляющей  $C$ , то, для того чтобы штанга двигалась по заданному закону, надо, чтобы в каждом положении механизма сила  $P$  давления кулачка на штангу равнялась бы

$$P = \frac{Q}{\cos \gamma},$$

где  $\gamma$  - угол между силой  $P$  и направлением движения штанги – угол передачи движения.

Если не учитывать трение в подшипниках вала кулачка, то движущий момент на валу кулачка

$$M_{jl} = Ph = \frac{Q}{\cos \gamma} r \sin = Qr \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

где  $r$  - радиус-вектор профиля кулачка.

Самоторможение. Учитывая силы трения при силовом расчете механизма, можно выявить такие соотношения между параметрами механизма, при которых вследствие трения движение звена в требуемом направлении не может начаться независимо от величины движущей силы.

В большинстве механизмов самоторможение недопустимо, но в некоторых случаях оно используется для предотвращения самопроизвольного движения в обратном направлении (домкрат, некоторые типы подъемных механизмов и др.).

Угол давления. Углом давления на звено  $i$  со стороны звена  $j$  называется угол между направлением силы давления (нормальной реакции) на звено  $i$  со стороны звена  $j$  и скоростью точки приложения этой силы. Угол давления на звено  $i$  со стороны звена обозначается через  $\vartheta_{ij}$ . Часто, однако, рассматривается лишь один угол давления. Тогда индексы в обозначениях опускаются.

Например, при синтезе кулачкового механизма, показанного на рис. 21 имеет значение лишь угол давления  $\vartheta_{21}$ , который обозначается через  $\vartheta$ . С увеличением угла  $\vartheta$  увеличиваются составляющие  $x$  и  $y$  и, соответственно, увеличиваются потери на трение. При больших значениях угла давления возможно даже самоторможение. Поэтому параметры механизма выбираются так, чтобы угол давления  $\vartheta$  не превосходил, допускаемого значения  $\vartheta_{\text{доп}}$ . Выбор этого значения зависит от типа механизма.

# Модуль 4. Анализ движения механизма под действием сил

## 1. Уравновешивание механизмов

### 1.1. Общие сведения

Динамические давления – это дополнительные усилия, которые возникают в кинематических парах при движении механизма. Эти давления являются причиной вибраций некоторых звеньев механизма, они переменны по величине и направлению. Станина данного механизма тоже испытывает динамические давления, которые оказывают вредное воздействие на его крепления и нарушая тем самым связь станины с фундаментом. Также динамические давления увеличивают силы трения в точках опоры вращающихся валов, увеличивают износ подшипников. Поэтому при проектировании механизмов стараются достичь полного или частичного погашения динамических давлений (задача об уравновешивании сил инерции механизмов).

Звено механизма будет считаться уравновешенным, если его главный вектор и главный момент сил инерции материальных точек будут равны нулю. Неуравновешенным может быть каждое звено механизма в отдельности, но механизм при этом в целом может быть уравновешен полностью или частично. Проблему уравновешивания сил инерции в механизмах можно разделить на две задачи: 1) об уравновешивании давлений в кинематических парах механизма 2) об уравновешивании давлений механизма в целом на фундамент.

Огромное значение имеет уравновешивание вращающихся звеньев. Незначительный дисбаланс быстро вращающихся роторов и электродвигателей вызывает большие динамические давления на подшипники.

### 1.2. Уравновешивание вращающихся тел

Задача об уравновешивании вращающихся тел состоит в таком выборе их масс, при котором произойдет полное или частичное погашение добавочных инерционных давлений на опоры.

$$\text{Результирующая центробежная сила инерции: } \bar{P}_u = \omega^2 \sum m_i \bar{r}_i = \omega^2 m \bar{r}_s$$

Результирующий момент всех сил инерции тела относительно плоскости, проходящей через центр масс.

$$M_u = \omega^2 \sum m_i r_i a_i = \omega^2 J_{ra},$$

где  $m$  – масса всего тела,  $r_s$  - расстояние центра S масс тела от оси вращения;  $J_{ra}$  - центробежный момент инерции относительно оси вращения и плоскости, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр S масс тела.

При вращение тела угол между векторами  $\bar{P}_u$  и  $\bar{M}_u$  сохраняет всё время одно и тоже значение  $\alpha$ . Если результирующая сила инерции  $\bar{P}_u$  и результирующий момент  $\bar{M}_u$  сил инерции равны нулю, тогда тело будет полностью уравновешенным, а значит вращающееся тело не оказывает никаких динамических давлений на опоры.

$$\bar{m} \bar{r}_s = \sum m_i \bar{r}_i = 0 \quad (1)$$

$$J_{ya} = \sum m_i r_i \bar{a}_i = 0 \quad (2)$$

Эти условия будут выполняться только тогда, когда центр масс тела будет лежать на оси вращения, которая будет являться одной из его главных осей инерции. Если одновременно выполняются равенства (1) и (2), то центробежный момент инерции  $J_{ra}$  будет равен нулю. Если

выполняется (1) условие, то тело считается уравновешенным статически, если выполняется (2) условие, то тело считается уравновешенным динамически.

Статический дисбаланс  $\Delta_c$  измеряется статическим моментом.

$$\Delta_c = G^c (\text{н} \cdot \text{м}) \quad (3)$$

$G$  – вес вращающегося тела, н.

Динамический дисбаланс  $\Delta_d$  вращающегося тела измеряется величиной

$$\Delta_d = \sum G_i r_i a_i (\text{н} \cdot \text{м}^2) \quad (4)$$

На практике неуравновешенное тело уравновешивают при помощи противовесов. Вращающиеся тела, у которых общая длина  $a$  значительно меньше их диаметра, имеют незначительные центробежные моменты инерции  $J_{ta}$ ; поэтому такие тела достаточно уравновесить только статически.

Предположим, что тело A статически неуравновешено. В простейшем случае противовес помещают на линии, проходящей через центр тяжести S, по другую сторону от оси вращения на расстоянии  $r_{np}$  от неё. (рис. 1)

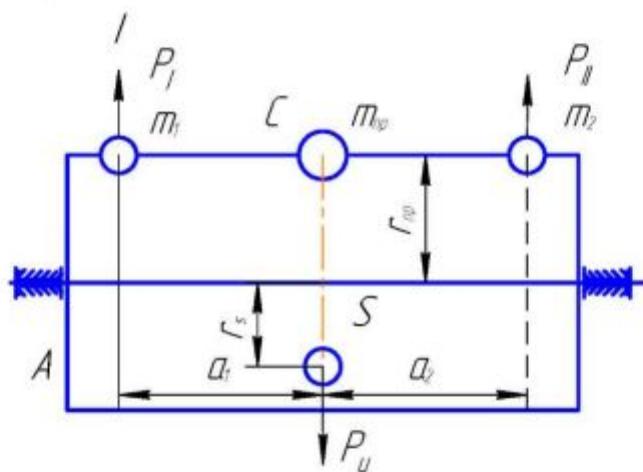


Рис. 1

Массу  $m_{np}$  противовеса находим из уравнения (1) :

$$m_{np} = m \frac{r_s}{r_{np}} \quad (5)$$

Вместо установки противовеса можно удалить часть массы. Величина удаляемой массы определяется по формуле (5). Иногда плоскость крепления противовеса не может быть выбрана конструктивно в той плоскости вращения, в которой расположены неуравновешенные массы. В этом случае можно установить два противовеса в двух перпендикулярных к оси вращения плоскостях, обычно называемых плоскостями исправления, но при этом необходимо исключить возможность появления давления на опоры не только от результирующей силы инерции, но и от моментов сил инерции. Массы  $m_1$  и  $m_2$  противовесов определяем мы соответственно с формулами (1) и (2) из уравнений

$$mr_s = m_1 r_{np} + m_2 r_{np}$$

и

$$m_1 r_{np} a_1 - m_2 r_{np} a_2 = 0,$$

откуда

$$m_1 = m \frac{r_s a_2}{r_{\text{пп}}(a_1 + a_2)} \quad \text{и} \quad m_2 = m \frac{r_s a_1}{r_{\text{пп}}(a_1 + a_2)} \quad (6)$$

Сложив массы этих противовесов, получим

$$m_1 + m_2 = m \cdot \frac{r_s}{r_{\text{пп}}} = m_{\text{пп}},$$

а из их отношения найдём

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Полное уравновешивание вращающегося тела может быть достигнуто также при помощи двух противовесов, расположенных в произвольно выбранных плоскостях 1 и 2 и на произвольных расстояниях от оси вращения.

Вращающиеся тела обычно выполняют так, чтобы они были уравновешены сами по себе. Чаще всего вращающиеся тела выполняют в форме одного или нескольких цилиндров, имеющих общую ось, совпадающую с осью вращения тела. Однако во многих случаях такая форма не может быть выполнена и вращающееся тело без противовесов является неуравновешенным. Для определения величины и положения противовесов необходимо по чертежу выделить уравновешенную часть тела и определить для оставшихся частей – колен, кулаков и т.д. центры тяжести их, считая, что в них сосредоточены массы этих частей.

Предположим, что для какого-либо тела все его неуравновешенные массы свелись к трём неуравновешенным массам (рис.2). Пользуясь методом приведения вектора к заданному центру, можно любое число вращающихся в различных плоскостях масс уравновесить двумя противовесами. Пусть центры тяжести масс  $m_1, m_2$  и  $m_3$  расположены в трёх плоскостях, перпендикулярных к оси вращения. Условия отсутствия давления на подшипники от главного вектора и главного момента относительно центра приведения  $O_1$  центробежных сил инерции выражаются уравнениями:

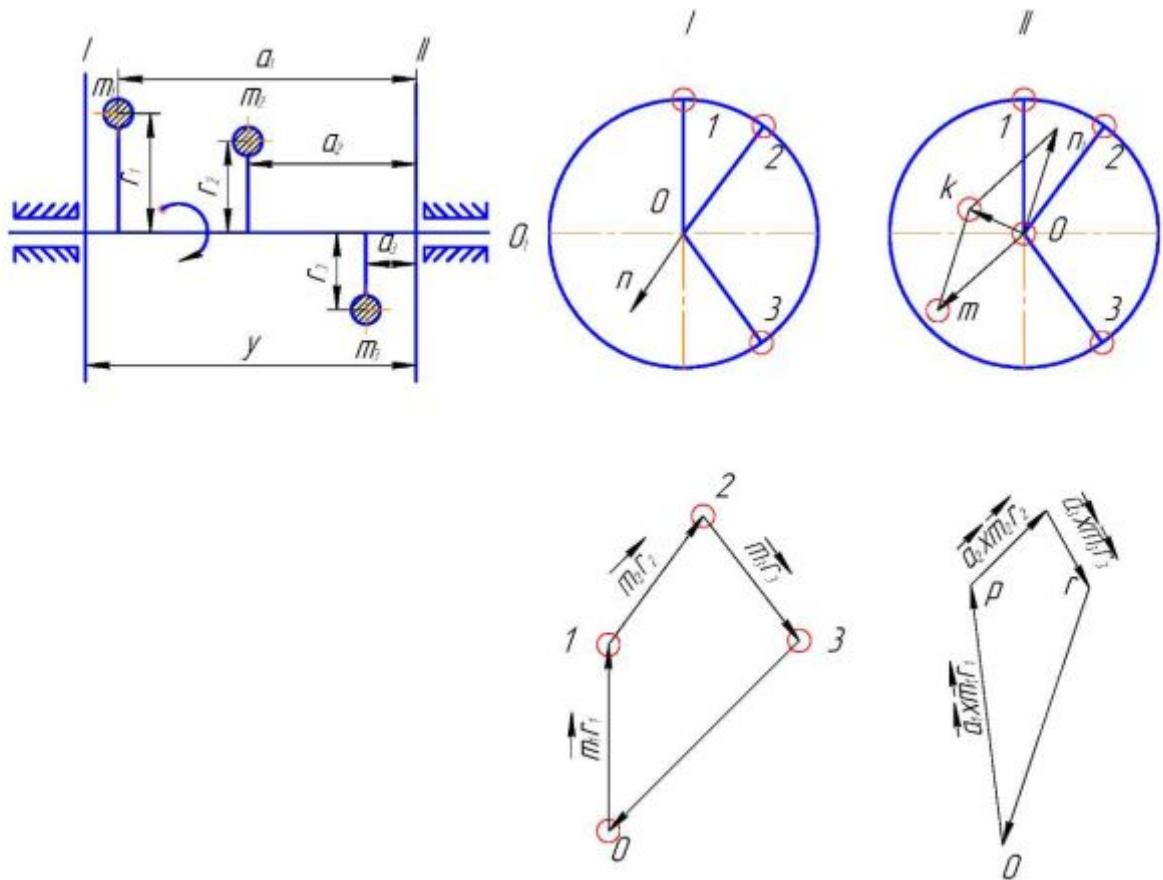


Рис. 2

$$\sum_1^n \bar{m_i r_i} = 0$$

$$\sum_1^n \bar{a_i \cdot m_i r_i} = 0$$

Строим многоугольники векторов сил и векторов моментов рис. 2(г, д). Уравновешивающим в первом случае является вектор  $\bar{3O}$ , изображённый в плоскости 2 вектором  $\bar{Om}$ , (рис. 2 в) а во втором – вектор  $\bar{rO}$  (рис. 2 д), изображающий повёрнутый момент пары векторов  $\bar{On}$ , расположенного в плоскости 1, и  $\bar{On}_1$ , расположенного в плоскости 2. Каждый из них равен по

величине  $\frac{\bar{rO}}{a}$ . Таким образом, заданные массы  $m_1, m_2$  и  $m_3$  будут полностью уравновешены

двумя массами, расположенными вдоль  $\bar{On}$  в плоскости 1 и вдоль равнодействующей  $\bar{Ok}$  в плоскости 2. Из изложенного следует, что:

**1.)** любое количество вращающихся масс, расположенных в одной плоскости вращения, уравновешивается одним противовесом, находящимся в той же плоскости, при соблюдении условия равновесия

$$\sum_{i=1}^n \overline{m_i r_i} = 0 \quad (7)$$

2.) любое количество масс, лежащих в разных плоскостях вращения, уравновешивается двумя противовесами, установленными в двух произвольных плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, при соблюдении двух условий равновесия:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \overline{m_i r_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^m \bar{a}_i \cdot \overline{m_i r_i} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

### 1.3. Уравновешивание механизмов на фундаменте

Для уравновешивания плоского механизма на фундаменте необходимо и достаточно так подобрать массы звеньев этого механизма, чтобы общий центр масс движущихся звеньев его оставался неподвижным:

$$x_s = \text{const} \quad (9)$$

$$y_s = \text{const}$$

и центробежные моменты инерции масс звеньев относительно осей x и z, y и z были постоянными:

$$J_{xz} = \text{const}, J_{yz} = \text{const}. \quad (10)$$

При соблюдении этих условий будут уравновешены главный вектор сил инерции и главные моменты сил инерции относительно осей x и y. Главный момент сил инерции относительно оси z, перпендикулярной к плоскости движения механизма, уравновешивается моментом движущих сил и сил сопротивлений на главном валу машины.

На практике при уравновешивании механизмов указанные условия (9) и (10) выполняются частично.

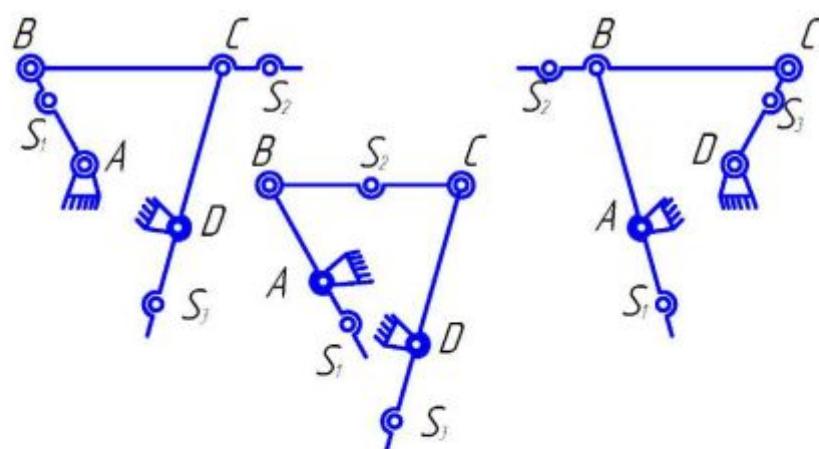


Рис. 3

Пусть, например, дан механизм шарнирного четырёхзвенника ABCD (рис. 3) требуется уравновесить только главный вектор сил инерции. Обозначим массы звеньев AB, BC и CD соответственно через  $m_1, m_2$  и  $m_3$ ; длины звеньев – через  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , а расстояние центров тяжести  $S_1, S_2$  и  $S_3$  этих звеньев от точек A, B и C – через  $s_1, s_2$  и  $s_3$ . Для удовлетворения условия (9.) необходимо, чтобы общий центр S масс механизма находился на прямой AD, либо между точками A и D, либо за ними. В этом случае центр S масс механизма при его движении будет оставаться неподвижным и, следовательно, главный вектор сил инерции механизма будет уравновешен.

Массы звеньев и положения центров тяжести их должны быть подобраны так, чтобы

$$m_1 S_1 = -\frac{m_2 l_1}{l_2} (l_2 - S_2) \quad (11)$$

$$m_2 S_2 = -\frac{m_3 l_2}{l_3} (l_3 - S_3). \quad (12)$$

Если механизм состоит из  $n$  подвижных звеньев, то при решении задачи о подборе масс механизма, удовлетворяющих условию уравновешенности главного вектора сил инерции механизма, имеем  $2n$  неизвестных величин; уравнений же, связывающих эти величины, можно составить  $(n-1)$ . После произвольного выбора  $(n+1)$  величин остальные величины получают определённые значения. В исследуемом механизме количество подвижных звеньев  $n=3$ , количество подбираемых величин  $2n=6$ , число же независимых уравнений  $n-1=2$ . Таким образом, задаваясь, например, значениями  $m_3$  и  $s_3$ , из уравнения (12) получаем значение  $m_2 s_2$ , в котором можно задаваться одним из неизвестных и получать другое. Подставляя полученные значения в уравнение (11), определяем значение  $m_1 s_2$ , в котором также можно задаваться одной величиной. Из уравнений (11) и (12) при различных исходных заданиях можно получить три варианта схем уравновешенного четырёхзвенного механизма Рис. 3(а, в, д). Следовательно, если считать, что расположение центра тяжести звена за его шарнирами соответствует как бы установке противовеса, то можно сказать, что задачу уравновешивания главного вектора сил инерции механизма шарнирного четырёхзвенника можно решить путём установки противовесов на двух его звеньях.

Аналогичным образом можно решить задачу подбора масс отдельных звеньев для уравновешивания шарнирного шестизвенника и любого механизма, образованного путём наслаждения двухпроводковых групп. Дав уравнения (9.) можно заменить одним векторным уравнением

$$\mathbf{r}_s = \text{const} \quad (13)$$

Где  $\mathbf{r}_s$  – вектор, определяющий положение общего центра масс.

Условие (13) удовлетворяется в частности, когда  $\mathbf{r}_s=0$ ; это условие приводит к способу подбора механизмов с симметрично расположенными звеньями равных масс, вследствие чего получается самоуравновешивание механизма в целом.

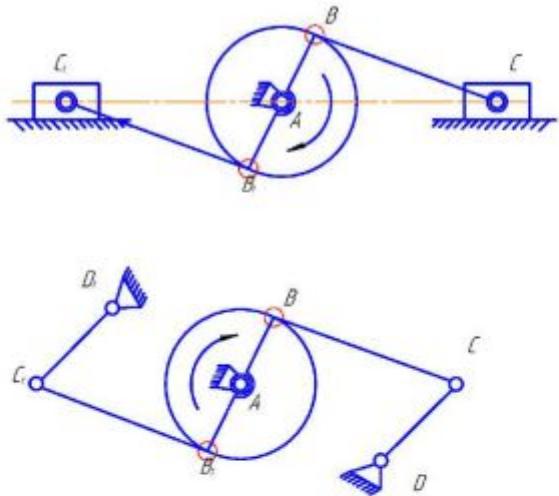


Рис. 4

На рисунке 4 показаны схемы симметричных кривошипно-ползунного и шарнирного четырёхзвенного механизмов. В тех случаях, когда размещение звеньев в симметричных механизмах очень громоздко или подбор масс конструктивно нецелесообразен, применяется метод установки противовесов.

Пусть, например, требуется уравновесить только главный вектор сил инерции кривошипно-ползунного механизма, схема которого изображена на рисунке 5. Обозначим массы кривошипа 1, шатуна 2 и ползуна 3 через  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и будем считать их сосредоточенными соответственно в центрах тяжести  $S_1$ ,  $S_2$  и В звеньев. Устанавливаем на линии АВ в точке D противовес и определяем его массу  $m_{np}$  из условия, чтобы центр тяжести масс  $m_{np}$ ,  $m_2$  и  $m_3$  совпадал с точкой А. Из уравнения статических моментов относительно точки А имеем

$$m_3 L + m_2 a = m_{np} c,$$

откуда

$$m_{np} = \frac{1}{c} (m_3 L + m_2 a).$$

Массу  $m_{np_1}$ , противовеса, установленного в точке С кривошипа, определяем из условия, чтобы центр тяжести масс  $m_{np_1}$ ,  $m_1$  и  $m_A = m_{np_2} + m_2 + m_3$  совпадал с точкой О. Из уравнения статических моментов относительно точки О находим

$$m_{np_1} = \frac{1}{s} (m_A R + m_1 l).$$

Радиусы  $s$  и  $c$  противовесов выбираются произвольно. После установки противовесов центр масс механизма во всех его положениях будет совпадать с точкой О и, следовательно, будет во всё время работы оставаться неподвижным. Таким образом, два противовеса  $m_{np_1}$  и  $m_{np_2}$  полностью уравновешивают все силы инерции рассматриваемого механизма. Однако подобное полное уравновешивание сил инерции кривошипно-ползунных механизмов на практике применяют редко, так как при малом значении радиуса с масса  $m_{np_2}$  получается весьма большой, что ведёт к появлению добавочных нагрузок в кинематических парах и звеньях механизма. При большом значении радиуса с сильно увеличиваются габаритные размеры всего механизма. Поэтому часто ограничиваются лишь приближённым уравновешиванием сил инерции. Так, в кривошипно-ползунных механизмах метод установки противовеса на кривошипе является наиболее распространённым методом приближённого уравновешивания сил инерции. В этих механизмах на практике часто применяют уравновешивание только массы кривошипа и части массы шатуна.

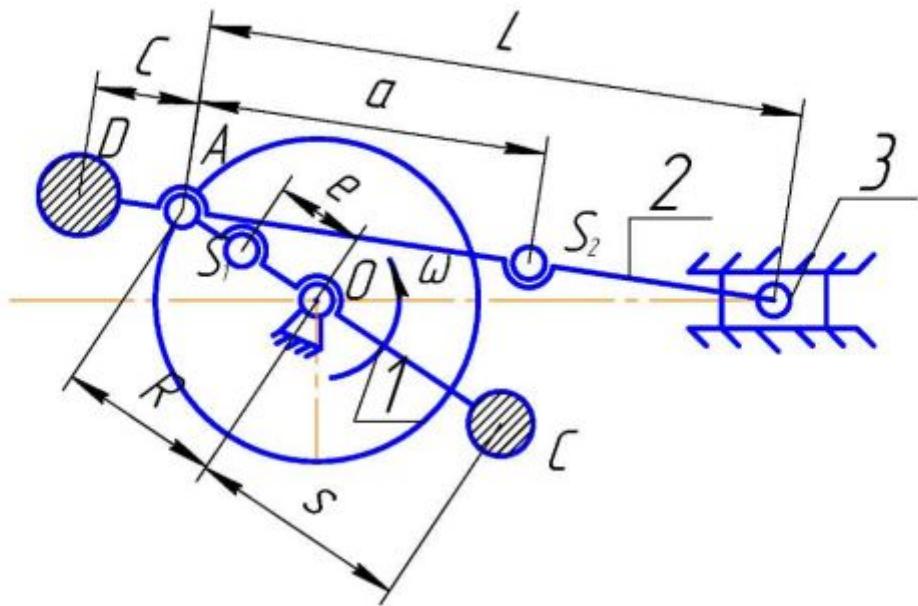


Рис. 5

## 2. Анализ движения механизма под действием сил

### 2.1. Основные режимы движения механизма

При решении некоторых вопросов динамики механизма с одной степенью свободы можно применить закон изменения кинетической энергии, который формулируется так: приращение кинетической энергии механизма на конечном его перемещении равно алгебраической сумме работ всех задаваемых сил.

$$T - T_0 = \sum A,$$

где  $T = \sum \frac{mv^2}{2}$  - кинетическая энергия механизма в произвольном положении

$T_0 = \sum \frac{mv_0^2}{2}$  - кинетическая энергия механизма в начальном положении

$\sum A$  - алгебраическая сумма работ всех сил и моментов, приложенных к механизму

Для плоскопараллельного движения:

$$T = \frac{J_s \omega^2}{2} + \frac{mv_s^2}{2},$$

где  $J_s$  - момент инерции звена относительно оси проходящей через центр масс S

По характеру изменения кинетической энергии полный цикл работы машинного агрегата в общем случае складывается из трех частей: разгона (пуска), установившегося и выбега (остановки) (рис. 1). Время  $t_p$  характеризуется увеличением скорости ведущего звена, а это возможно когда  $A_o > A_c$ , а время выбега  $A_o < A_c$ , т.е. кривая зависимости кинетической энергии в первом случае монотонно возрастает, во втором случае - монотонно убывает.

Установившееся движение является более продолжительным. В течение этого этапа выполняется полезная работа, для совершения которой предназначен механизм. Поэтому полное время установившегося движения может состоять из любого числа циклов движения, соответствующих одному или нескольким оборотам кривошипа.

Имеем два варианта установившегося движения.

Первый вариант: кинетическая энергия Тмеханизма в течение всего режима движения постоянна. Пример: система зубчатых колес, вращающихся с постоянными угловыми скоростями, обладает постоянной кинетической энергией.

Второй вариант: характеризуется периодичностью движения ведущего вала механизма с небольшими колебаниями Т внутри периода. Периодичность может включать один или два оборота кривошипа, например для двигателя периодичность изменения Т- два оборота кривошипа.

Весь поток энергии, подводимой к машине, а также кинетическая энергия самой машины в процессе ее работы может быть сбалансирована так:

$$A_D - A_{nc} - A_{Tp} \pm A_T \pm A_u = 0,$$

где  $A_D$  - работа сил движущая

$A_{nc}$  - работа сил полезного сопротивления

$A_{Tp}$  - работа сил трения

$A_T$  - работа сил тяжести

$A_u$  - работа сил инерции

Для времени установившегося движения, когда в конце цикла и в начале следующего цикла величина скорости одинакова, т.е. работа  $A_u$  и  $A_T$  равны нулю, т.е.

$$A_D = A_{nc} + A_{Tp}$$

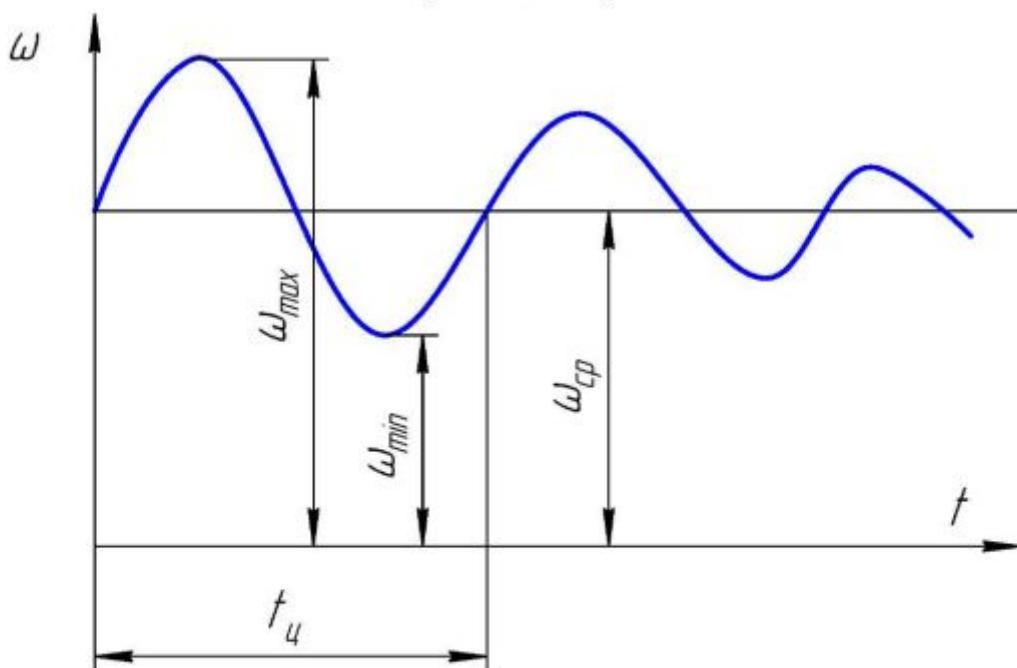


Рис. 1

Пренебрегая силой трения, имеем  $A_D = A_{nc}$

Это уравнение является основным энергетическим уравнением установившегося периодического движения механизма.

Угловая скорость ведущего звена в пределах цикла установившегося движения в общем случае является величиной переменной.

Изменения угловой скорости звена приведения вызывают в кинематических парах дополнительные (динамические) давления, которые снижают общий КПД машины, надежность ее работы и долговечность. Кроме того колебания скоростей ухудшают рабочий процесс машины.

Колебание скорости является следствием двух факторов – периодического изменения приведенного момента инерции механизма и периодического характера действия сил и моментов.

Кроме периодических колебаний скоростей в механизме могут происходить колебания и не-периодические, т.е. неповторяющиеся, вызываемые различными причинами, например внезапное изменение нагрузки.

Первый тип колебаний регулируется в пределах допустимой неравномерности движения, насаживанием на вал дополнительной массы (маховика).

Во втором случае задачу регулирования решают, устанавливая специальный механизм, называющийся регулятором.

Пределы допускаемого изменения угловой скорости устанавливают опытным путем. Неравномерность движения машины характеризуется отношением абсолютной неравномерности  $\omega_{\max} - \omega_{\min}$  к ее средней скорости

$$\delta = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{\omega_{cp}}$$

Обычно задают  $\delta$  и  $\omega_{cp}$ , где  $\omega_{cp} = \frac{\pi n}{30}$

Имея следующие соотношения:

$$\begin{cases} \omega_{cp} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \\ \delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} \end{cases} \quad (1)$$

Решаем совместно два уравнения (1) и находим:

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \\ \omega_{\min} &= \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\delta^2$$

Или пренебрегая величиной  $\delta^2$  ввиду ее малости получаем:

$$\begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \omega_{cp}^2 (1 + \delta) \\ \omega_{\min}^2 &= \omega_{cp}^2 (1 - \delta) \end{aligned}$$

Периодическая неравномерность хода машины, как правило, представляет вредное влияние и может быть допущена для большинства машин лишь в определенных пределах. Эти вредные явления в машинах выражаются, например, в следующем: рывки при движении транспортных машин, обрыв нити в текстильных машинах, перегревание обмоток электродвигателей, мигание света из-за неравномерности вращения якоря генератора электрического тока, недостаточная чистота и точность обработки поверхностей деталей на металлорежущих станках, неоднородность и не одинаковая толщина сварных швов при сварке с помощью сварочных автоматов, разрыв листа во время вытяжки изделий на прессах и т. п.

Допускаемая неравномерность хода машины задается коэффициентом  $\delta$  и зависит от назначения машины. Эти величины установлены многолетним опытом эксплуатации машины.

### Вот примеры значений $\delta$ :

металлорежущие станки

$$\delta = \frac{1}{25} \dots \frac{1}{50}$$

электрогенераторы переменного тока

$$\delta = 1/200 \dots 1/300,$$

с/х машины

$$\delta = 1/5 \dots 1/50,$$

судовые двигатели

$$\delta = 1/20 \dots 1/150,$$

авиационные двигатели

$$\delta = 1/300 \text{ и менее},$$

асинхронные двигатели

$$\delta = 1/20 \dots 1/30$$

Таким образом,  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  отличаются от заданной средней угловой скорости  $\omega_{cp}$  на

$\frac{\delta}{2} \omega_{cp}$ , что при  $\delta=1/25$  составляет всего 2%, а при  $\delta=1/50$  наибольшее отклонение составит всего 2%

1% от  $\omega_{cp}$ . Отсюда видно, что даже при сравнительно больших  $\delta$ , движение ведущего звена машины достаточно равномерно.

Движение ведущего звена тем ближе к равномерному, чем больше приведенный момент инерции или приведенная масса механизма. Увеличение приведенных масс и момента инерции производится практически посадкой на вал машины маховика с определенной массой и моментом инерции.

## 2.2. Приведение масс, сил и моментов

При анализе работы машины и определении закона движения начального звена механизма с одной степенью свободы удобно оперировать не действительными массами, которые движутся с переменными скоростями, а массами, или эквивалентными, условно перенесенными на какое-либо звено механизма.

Точно так же силы или моменты, приложенные к отдельным звеньям, могут быть условно заменены силой или моментом, приложенным к какому-либо звену механизма.

Приведенной силой называется такая сила, мощность которой равна сумме мощностей всех сил, приложенных к звеньям.

Звено, к которому приложена приведенная сила, называется звеном приведения.

Пусть на кривошипно-ползунный механизм действуют силы:  $G_1, P_{nc}$  (рис.2)

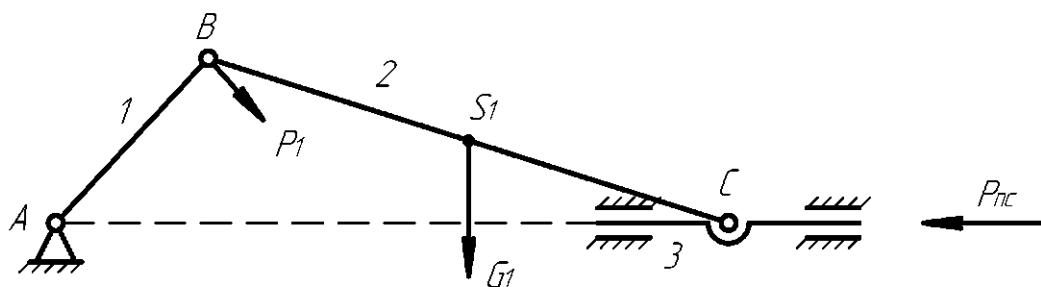


Рис. 2

Условно заменим эти две силы, приведенной силой,  $P_n$ , приложенной в точке В, мощность которой

$$N = P_n \cdot v_A \quad (2)$$

где

$$N = \sum N_{pi}, \quad (3)$$

то есть сумме мощностей всех сил.

Мощность любой силы, приложенной в " $i$ " точке исходя из предыдущего раздела может быть определена как момент этой силы относительно конца вектора скорости  $M_{pi}$

Поэтому

$$P_n = \frac{\sum N_{pi}}{V_B} = \frac{\sum M_{pi}}{\omega} = \sum P_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha + M_i \cdot \omega_i \quad (4)$$

Мощность можно записать через приведенный момент сил

$$N = M_n \cdot \omega \quad (5)$$

Откуда приведенный момент

$$M_n = \frac{\sum N_{pi}}{\omega} = \frac{\sum P_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha}{\omega} + \sum \frac{M_i \cdot \omega_i}{\omega} \quad (6)$$

Приведенная масса есть такая фиктивная масса, сосредоточенная в точке звена приведения, кинетическая энергия которой равна кинетической энергии всего механизма

$$\frac{m_n \cdot V_B^2}{2} = \sum E_i = \sum \frac{J_{pi} \cdot \omega_i^2}{2}$$

Откуда

$$m_n = \sum \frac{J_{pi} \cdot \omega_i^2}{V_B^2},$$

где  $J_n$  – приведенный момент инерции звена,

$\omega_n$  - угловая скорость звена приведения,

$v_B$  - скорость точки В звена приведения.

### Приведенный момент инерции

Приведенным к главному валу (звену приведения) моментом инерции  $J_n$  называется такой условный момент инерции, обладая которым главный вал имеет в данном положении машины кинетическую энергию, равную кинетической энергии всего механизма.

Кинетическая энергия звена приведения равна

$$E_n = \frac{J_n \cdot \omega_n^2}{2} \sum E_k = \sum \frac{J_n \cdot \omega_n^2}{2} + \sum \frac{m_i \cdot v_{si}}{2} \quad (8)$$

где  $J_{pi}$  – момент инерции " $i$ " звена,

$\omega_i$  – угловая скорость " $i$ " звена.

### Расчетная формула приведенного момента инерции в общем виде

$$J_n = \sum \left[ J_{si} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 + m_i \left( \frac{v_{si}}{\omega_n} \right)^2 \right] \quad (9)$$

### 2.3. Уравнение движения механизма

Большинство машин работает, как правило, в установившемся режиме, который характеризуется тем, что машина получает от двигателя за 1 цикл столько энергии, сколько она расходует её за то же время на производство работы, для которой она предназначена.

Циклом называют промежуток времени, по истечении которого все параметры, характеризующие работу машины, повторяются (периодическое повторение скоростей, ускорений, нагрузки и т. п.). Движение звеньев машины, таким образом, носит периодический характер. Понятие об установившемся движении вовсе не означает, что ведущее звено машины движется равномерно.

Рассмотрим уравнение движения звена приведения:

$$M_{\dot{\varphi}}^n - M_c^n = J_n \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}, \text{ откуда}$$

$$\varepsilon = \frac{M_{\dot{\varphi}}^n - M_c^n - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}}{J_n}$$

Из этого уравнения следует, что для равномерного движения (т. е. когда  $\varepsilon=0$ ) в любой момент цикла должны соблюдаться условия:

$$J_n = \text{const} \text{ и } M_{\dot{\varphi}}^n = M_c^n \text{ или } M_{\dot{\varphi}}^n - M_c^n = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi},$$

т.е. изменения момента должен следовать закону изменения произведения  $\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}$ , что на практике не может быть доступно простыми средствами.

Таким образом, даже при

$$M_{\dot{\varphi}}^n = M_c^n, \text{ но } J_n = \text{var}, \varepsilon \neq 0,$$

так как в таком случае

$$J_n \varepsilon = -\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}$$

Так, например, кривошип строгательного станка, в состав которого входит кулисный механизм, или кривошипного пресса, в состав которого входит кривошипно-ползунный механизм, даже без нагрузки ( $M_{\dot{\varphi}}^n = M_c^n = 0$ ) не будут двигаться равномерно.

Равенство моментов на практике соблюдается чрезвычайно редко. Вследствие этих причин установившееся движение машин происходит с периодическим изменением скорости, которая внутри цикла изменяется в пределах:

$$\omega_{\max} \geq \omega \geq \omega_{\min} \text{ (см. рисунок 1).}$$

Большинство машин работает, как правило, в установившемся режиме, который характеризуется тем, что машина за один цикл затрачивает такую работу, которую она получает за цикл от двигателя, т. е. обязательным условием установившегося движения является.

### 2.4. Определение момента инерции махового колеса

#### Физическая роль маховика в машине

Физическую роль маховика в машине можно представить себе следующим образом. Если в пределах некоторого угла поворота начального звена механизма работа движущих сил больше

работы сил сопротивления, то начальное звено вращается ускоренно и кинетическая энергия механизма увеличивается.

При отсутствии маховика весь прирост кинетической энергии распределяется между массами звеньев механизма. Маховик увеличивает общую массу механизма и поэтому при том же увеличении кинетической энергии прирост угловой скорости без маховика будет больше, чем при наличии маховика.

Итак, маховик является аккумулятором кинетической энергии, расходующим ее, когда работа сил сопротивления больше работы сил движущих.

Маховик выполняют в форме сплошного диска или шкива со спицами и массивным ободом и укрепляют на валу машины. Особенno большое значение имеет установка маховика для машин, работающих с резко возрастающей нагрузкой (пресса, дробилки, прокатные станы). В данных машинах накопленная маховиком энергия используется для преодоления повышенных полезных нагрузок без увеличения мощности двигателя.

Определение момента инерции маховика при  $J_n = const$ .

Задача об удержании скорости ведущего звена в заранее заданных пределах  $\omega_{max} \geq \omega \geq \omega_{min}$  может быть решена с помощью постановки на одно из звеньев машины, совершающих вращательное движение, диска с необходимым (расчетным) моментом инерции.

Пусть задано  $\delta$ ,  $\omega_{cp}$ ,  $M_c^n(\phi)$  ( $\phi$ ) и  $J_n = const$

Последнее означает, что движение всех звеньев связано с движением ведущего звена механизма постоянным передаточным отношением.

Требуется определить такой момент инерции маховика  $J_M$ , чтобы скорости ведущего звена не выходили за пределы  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$ , которые определяются по формуле:

$$\omega_{min} = \omega_{cp} \left( 1 \pm \frac{\delta}{2} \right)$$

В случае, когда  $J_n = const$  эти значения угловой скорости будут соответствовать положениям звена приведения, когда кинетическая энергия механизма будет принимать экстремальные значения, что в общем случае не имеет места при  $J_n = const$ .

Отметим, что случай  $J_n = const$  в известном смысле распространяется и на случай, если  $J_n = var$ . Дело в том, что методах Мерцалова и Гутьяра прежде, чем рассчитать момент инерции маховика, его кинетическая энергия выделяется из кинетической энергии машины и таким образом задача сводится к определению момента инерции маховика для системы с  $J_n = const$ .

Получим уравнение, с помощью которого можно определить JM механизма, удовлетворяющий постоянному условию.

В случае  $J_n = const$ ,  $dJ_n/d\phi = 0$  и дифференциальное уравнение движения машины принимает вид:

$$M_\delta^n - M_c^n = J_n \varepsilon$$

и т. к.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} = \omega \frac{d\omega}{d\phi},$$

$\omega$

то, обозначив  $M_{\partial}^n - M_c^n = M_n$ ,

$$\text{будем иметь } M_n = J_n \frac{d\omega}{d\phi}$$

Интегрируя это уравнение на участке углов поворота звена приведения от  $\varphi_i$  до  $\varphi_K$ , будем иметь:

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_n d\phi = J_n \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \omega d\omega \text{ или } \Delta T_{\varphi_i \sim \varphi_k} J_n \frac{\omega_k^2 - \omega_i^2}{2} \quad (*)$$

Т. к. полученное равенство справедливо для любых значений угла поворота главного вала, то выберем углы поворота  $\varphi_i$  и  $\varphi_K$  так, чтобы они соответствовали экстремальным значениям угловых скоростей звена приведения. Пусть  $\varphi_i$  соответствует  $\omega_{\min}$ , а  $\varphi_K$  —  $\omega_{\max}$ . Тогда  $\Delta T_{\varphi_i \sim \varphi_k} = T_{\max} - T_{\min} = \Delta T_{\text{наиб}}$  представит наибольший перепад кинетической энергии машины за цикл и уравнение (\*) запишется так:

$$\Delta T_{\text{наиб}} = J_n \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2} = J_n \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{2} \cdot \frac{(\omega_{\max} + \omega_{\min}) \omega_{cp}}{\omega_{cp}} = J_n \omega_{cp} \delta$$

откуда

$$J_n = \frac{\Delta T_{\text{наиб}}}{\omega_{cp}^2 \delta} \quad (**)$$

По этой формуле может быть определен приведенный момент инерции механизма при заданной нагрузке,  $\omega_{cp}$  и  $\delta$ . Как видим, для совершенно равномерного движения звена приведения ( $\delta=0$ )  $J_n = \infty$ .

Заметим, что вид этой формулы сохраняется и в том случае, если  $J_n = \text{var}$ , т. к. из кинетической энергии механизма выделяется

кинетическая энергия маховика, у которого  $J_n = \text{const}$  и тогда  $\Delta T_{\text{наиб}}$  будет отнесено к маховику. Можно так же показать, что при одной и той же нагрузке потеря скорости звена приведения будет тем меньше, чем больше момент инерции звена приведения:

$$\Delta T_{\text{наиб}} = J_n \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2} = J_n \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} (\omega_{\max} - \omega_{\min}) = J_n \omega_{cp} \Delta \omega_{\text{наиб}}$$

откуда

$$\Delta \omega_{\text{наиб}} = \frac{\Delta T_{\text{наиб}}}{J_n \omega_{cp}}$$

Эта зависимость оправдывает наше утверждение, т. е. чем больше инерционность механизма, тем меньше потери скорости. Заданного значения  $\delta$  добиваются путем постановки на одно из вращающихся звеньев механизма маховика с требуемым приведенным к звену приведения моментом инерции, который вычисляется из условия:

$$J_M = J_n - \sum_1^n J_{ni}^{36},$$

Где  $J_m$  - приведенный к звену приведения момент инерции маховика;

$\sum_{ni}^{3B}$  - сумма приведенных к звену приведения моментов инерции всех звеньев механизма (без маховика);

$J_n$  - расчетный приведенный момент инерции звена приведения, вычисленный по формуле (\*\*).

Обычно нагрузка на машину задается в виде графика приведенных моментов сил сопротивления и по этой нагрузке подбирается соответствующий двигатель, момент которого задается в виде графика приведенных к звену приведения движущих сил. Интегрируя эти графики на протяжении одного цикла, получают работу сил движущих и сил сопротивления за цикл (рис. 3). Для установившегося движения ( $A_d$ ) цикла = ( $A_c$ ) цикла – это является основным условием установившегося движения и служит основанием для определения мощности двигателя.

Затем, вычитая из ординат графика  $A_d(\phi)$  ординаты графика  $A_c(\phi)$ , получают график избыточных работ или, что одно и тоже, график приращений кинетической энергии машины, по которому и определяют  $\Delta T_{найб}$  и подставляют в формулу (\*\*).

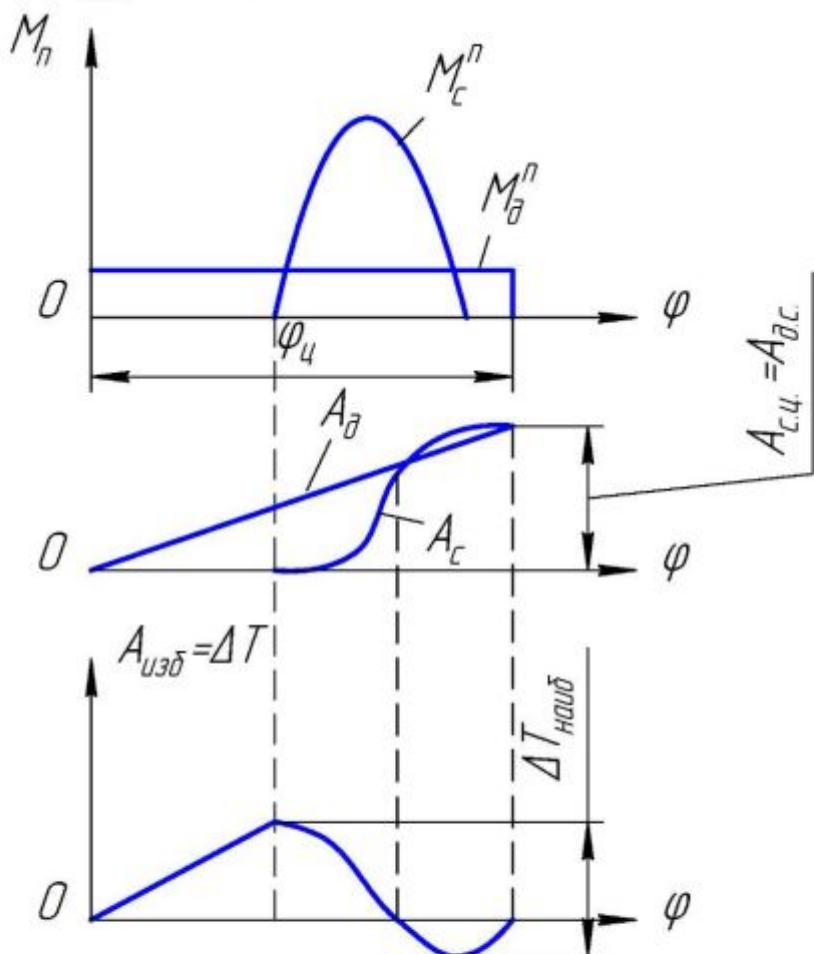


Рис. 3

Отметим, что операцию вычитания можно произвести сразу на графике моментов и, минуя при этом график работ, получить график  $\Delta T(\phi)$ . Это следует из того, что интеграл суммы равен сумме интегралов.

Как видим,  $M_d^n$  и  $M_c^n$  имеют не одинаковые значения в различных положениях механизма. Маховик накапливает кинетическую энергию на участках цикла, где  $M_d^n > M_c^n$  и поэтому

скорость звена приведения возрастает. На участках же, где  $M_D^n < M_C^n$ , маховик и другие звенья механизма отдают кинетическую энергию, снижая скорость, и дополняют момент движущих сил до равенства с моментом сил сопротивления за счет инерционного момента сил тормозящихся масс. Таким образом, маховик выполняет роль аккумулятора кинетической энергии, который накапливает и отдает ее в соответствующих положениях механизма, снижая потерю скорости звена приведения.

**Отметим следующее:**

1. Для определения  $\Delta T_{\text{наиб}}$  нет необходимости иметь график полной кинетической энергии машины. Достаточно иметь график ее приращений.

2. Нет необходимости вычислять предельные скорости  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  кроме отдельных специальных случаев, когда по ним определяется  $\delta$  (например определения  $\delta$ , если машина приводится от асинхронного двигателя).

3. При постоянном приведенном моменте инерции механизма и постоянной нагрузке  $\Delta T = 0$  при любом  $\phi$ , в этом случае маховик не нужен.

4. После того, как найден  $J_n = \frac{\Delta T_{\text{наиб}}}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta}$ , можно построить график полной кинетической энергии машины  $T(\phi)$  (рис. 4) и, следовательно могут быть определены действительные угловые скорости звена приведения в любом положении механизма. Положение оси абсцисс графика полной кинетической энергии машины определяется из тех соображений, что известны значения полной кинетической энергии при экстремальных значениях угловых скоростей звена приведения:

$$T_{\max} = \frac{J_n \omega_{\max}^2}{2}, \quad T = (OA)\mu_T,$$

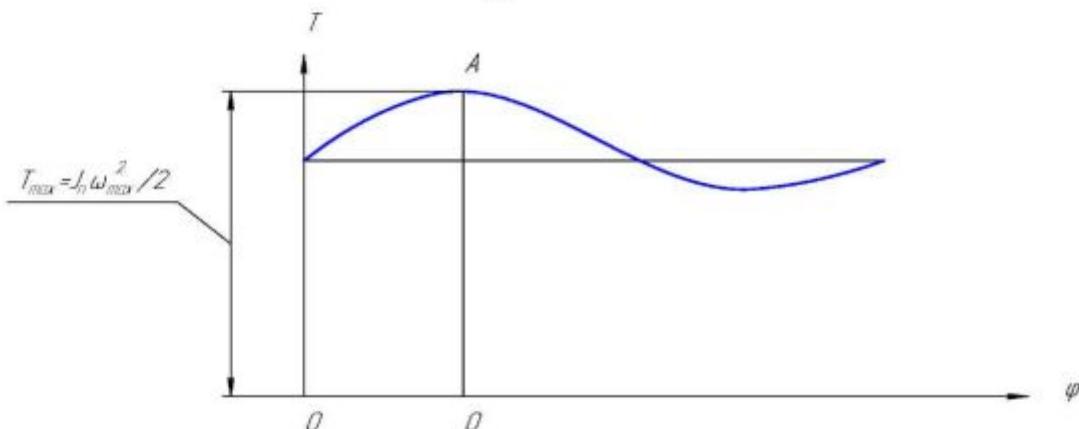


Рис. 4

$$\text{откуда } (OA) = \frac{T_{\max}}{\mu_T} = \frac{J_n \omega_{\max}^2}{2 \mu_T}.$$

5. Форма кривой графика  $T(\phi)$  определяется внешними силами, действующими на механизм, и при отсутствии последних будет представлена прямой параллельной оси абсцисс для любого механизма независимо от его структуры, как при  $J_n = \text{const}$ , так и при  $J_n = \text{var}$ .

Как отмечалось выше, задача об удержании скорости ведущего звена машины в заранее заданных пределах  $\omega_{\max} \geq \omega \geq \omega_{\min}$  может быть решена с помощью постановки на одно из звеньев, совершающих вращательное движение, маховика с необходимым моментом инерции.

Покажем, как рассчитать  $\delta$  для асинхронного двигателя.

Из технического задания на проектирование машины обычно бывают известными: производительность машины, механическая характеристика силы сопротивления и тип двигателя.

В подавляющем большинстве случаев в качестве двигателя принимается асинхронный электродвигатель как наиболее простой и дешевый.

По заданной производительности машины рассчитывается средняя угловая скорость  $\omega_{cp}$  главного вала машины, а затем определяется работа силы сопротивления за цикл и мощность двигателя:

$$N_{cp} = \frac{A_{c.y.}}{t_y} = \frac{A_{c.y.} \cdot \omega_{cp}}{\varphi_y}$$

После того, как проведен энергетический расчет машины и определена мощность электродвигателя, производится расчет момента инерции маховика. Для привода проектируемой машины по каталогу можно выбрать электродвигатели различных типов с одной и той же мощностью. Например, для привода машин с неравномерной и пиковой нагрузками применяются электродвигатели типов АО и АОС. Покажем, как выбор того или иного типа электродвигателя влияет на величину коэффициента неравномерности движения машины, а следовательно на размеры ее маховика.

Исходя из данных механической характеристики асинхронного электродвигателя (рис. 5), можно установить математическую связь между номинальным скольжением ротора электродвигателя и коэффициентом неравномерности движения машины.

С достаточной для практики точностью можно принять, что устойчивая часть механической характеристики асинхронных двигателей прямолинейна, тогда (рис. 4) из подобия треугольников имеем:

$$\frac{\omega_c - \omega_{kp}}{M_{kp}} = \frac{\omega_c - \omega_n}{M_n} = \frac{\omega_c - \omega_n}{S_n} = \lambda$$

где:  $M_{kp}$  - критический момент, при котором двигатель переходит на неустойчивую часть механической характеристики;

$M_n$  - номинальный момент на валу электродвигателя;

$\omega_c$  - синхронная угловая скорость ротора электродвигателя;

$\omega_n$  - номинальная угловая скорость электродвигателя;

$\omega_{kp}$  - критическая угловая скорость ротора электродвигателя;

$S_{kp}$  - критическое скольжение ротора электродвигателя,

определенное равенством:

$$S_{kp} = \frac{\omega_c - \omega_n}{\omega_c},$$

где  $S_H$  - номинальное скольжение ротора электродвигателя, определяемое равенством:

$$S_H = \frac{\omega_c - \omega_n}{\omega_c}$$

$\lambda$ - коэффициент опрокидывания.

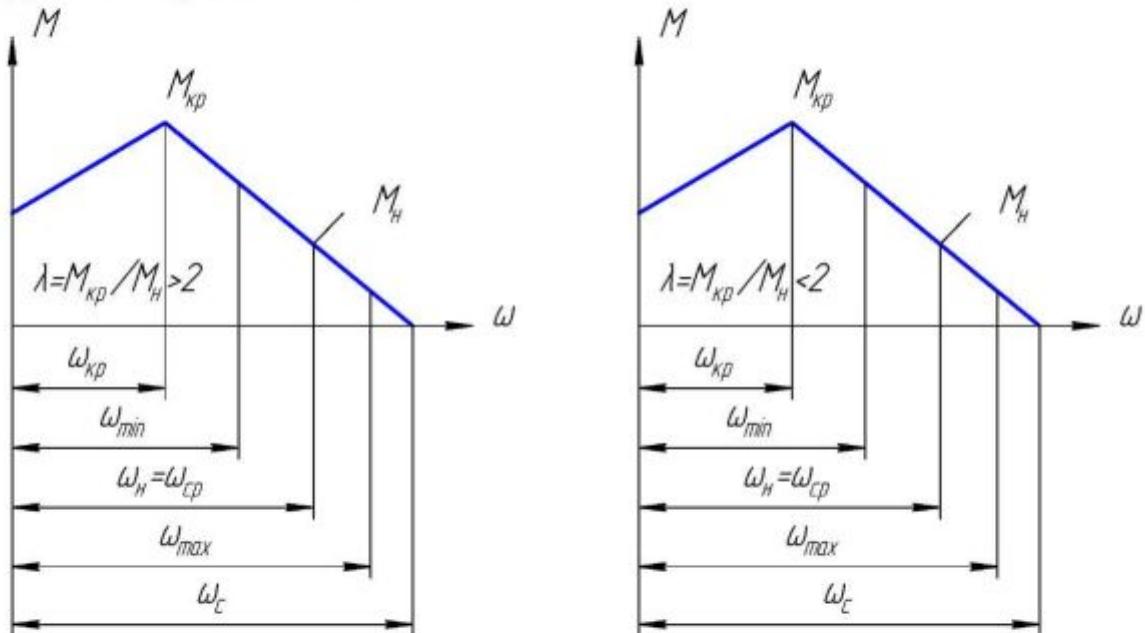


Рис. 5

Из таблицы технических данных асинхронных электродвигателей с короткозамкнутым ротором общего назначения следует, что для двигателей типа АО (электродвигатели в закрытом обдуваемом исполнении) с синхронным числом оборотов ротора, равным 1000 об/мин коэффициент опрокидывания колеблется в пределах  $\lambda=1,8\dots2,2$ , а для двигателей для АОС (электродвигатели с повышенным скольжением в закрытом обдуваемом исполнении) при том же значении синхронных чисел оборотов коэффициент опрокидывания лежит в пределах:

$$\lambda=2,2\dots2,6.$$

В соответствии с этим рассмотрим два случая, предварительно заметив, что в качестве средней угловой скорости принята номинальная угловая скорость ротора электродвигателя и предельные значения угловых скоростей ротора  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  поэтому должны симметрично располагаться по отношению к его номинальной угловой скорости  $\omega_n = \omega_{cp}$

Случай 1. Этот случай соответствует, когда коэффициент  $\lambda \geq 2$ , тогда  $\omega_{\min} > \omega_{kp}$ , а максимальное значение угловой скорости принимаем равным синхронной угловой скорости. Исходя из этих соображений, находим предельные угловые скорости ротора:

$$\begin{aligned}\omega_{\max} &= \omega_c, \\ \omega_{\min} &= \omega_n - (\omega_c - \omega_n) = 2\omega_n - \omega_c\end{aligned}$$

Далее определяем коэффициент неравномерности движения машины:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} = \frac{\omega_c - (2\omega_c - \omega_c)}{\omega_n} = \frac{2\omega_c - 2\omega_n}{\omega_n} = \frac{2}{\omega_n} \frac{\omega_c - \omega_n}{\omega_c}$$

И так  $\omega_n = \omega_c - S_n \omega_c = \omega_c (1 - S_n)$ , то

$$\delta = \frac{S_n}{1 - S_n} \quad (1)$$

Случай 2. Этот случай соответствует коэффициенту опрокидывания  $\lambda < 2$ , тогда  $\omega_{\max} < \omega_c$ , а минимальное значение угловой скорости принимаем равной критической угловой скорости ротора. Как и прежде, находим предельные значения угловых скоростей ротора:

$$\begin{aligned}\omega_{\min} &= \omega_{kp} \\ \omega_{\max} &= \omega_n + (\omega_n - \omega_{kp}) = 2\omega_n - \omega_{kp}\end{aligned}$$

Далее определяем коэффициент неравномерности движения машины:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} = \frac{2\omega_n - \omega_{kp} - \omega_{kp}}{\omega_n} = \frac{2\omega_n - 2\omega_{kp}}{\omega_n} = 2 \left( 1 - \frac{\omega_{kp}}{\omega_n} \right) = 2 \left( 1 - \frac{\omega_c (1 - S_{kp})}{\omega_c - (1 - S_n)} \right) = \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1 - S_{kp}}{1 - S_n} \right) = 2 \frac{S_{kp} - S_n}{1 - S_n}\end{aligned}$$

Итак,

$$\delta = 2 \frac{S_{kp} - S_n}{1 - S_n} \quad (2)$$

Полученные в обоих случаях  $\delta$  являются одновременно и критическими значениями.

В качестве примера возьмем два электродвигателя одинаковой мощности и с одинаковыми синхронными числами оборотов ротора

Но разных типов: Двигатель типа АО мощностью 40 квт и синхронным числом оборотов ротора, равным 1000 об/мин и двигатель типа АОС с теми же показателями. Для обоих двигателей коэффициент опрокидывания  $\lambda > 2$ , поэтому коэффициент неравномерности движения вычисляем по формуле (1). Для двигателя типа АО получим  $\delta = 0,0204$ ; а для типа двигателя АОС  $\delta = 0,087$ .

Рассматривая эти результаты видим, что при всех прочих равных условиях момент инерции маховика, работающего с двигателем типа АО должен быть в 4,3 раза больше момента инерции маховика, работающего с двигателем типа АОС.

Надо иметь в виду, что двигатель никогда не доведет угловую скорость маховика до значения соответствующего синхронной скорости ротора, т. к. в машине всегда присутствуют вредные сопротивления (трение, гидравлические сопротивления смазки, сопротивление воздуха и т. п.). В силу этих причин  $\omega_{\max} > \omega_c$  и при определении  $\delta$  следует всегда вводить на это некоторую поправку. Кроме того, нельзя доводить значение  $\omega_{\min}$  до критической скорости и поэтому должно иметь место следующее соотношение:  $\omega_{kp} < \omega_{\min}$

Технические данные асинхронных электродвигателей с короткозамкнутым ротором общего назначения. Синхронное число оборотов ротора 1500 об/мин.

Номинальная мощность кВт	Тип АО – электродвигатели в закрытом обдуваемом исполнении			Тип АОС - электродвигатели с повышенным скольжением в закрытом обдуваемом исполнении		
	Номинальное число оборотов ротора об/мин	Коэф-т опрокидывания	Номинальное скольжение	Номинальное число оборотов ротора об/мин	Коэф-т опрокидывания	Номинальное скольжение
1,0	1410	2,0	0,060	1300	2,3	0,133
1,7	1420	2,0	0,053	1300	2,3	0,133
2,8	1420	2,0	0,053	1300	2,3	0,133
4,5	1440	2,0	0,040	1335	2,3	0,110
7,0	1440	2,0	0,040	1335	2,3	0,110
10	1460	2,3	0,027	1350	2,5	0,100
14	1460	2,3	0,027	1350	2,5	0,100
20	1460	2,3	0,027	1350	2,5	0,100
28	1460	2,3	0,027	1365	2,6	0,090
40	1470	2,3	0,020	1380	2,6	0,080
55	1470	2,3	0,020	1395	2,6	0,070
75	1470	2,3	0,020	1395	2,6	0,070
100	1470	2,3	0,020	1395	2,6	0,070

Определение угловой скорости главного звена при заданном приведенном моменте.

Пусть для машины задан закон изменения приведенного момента

$$M_g = f(\varphi) \quad \text{и} \quad M_C = f(\varphi) = \text{const}$$

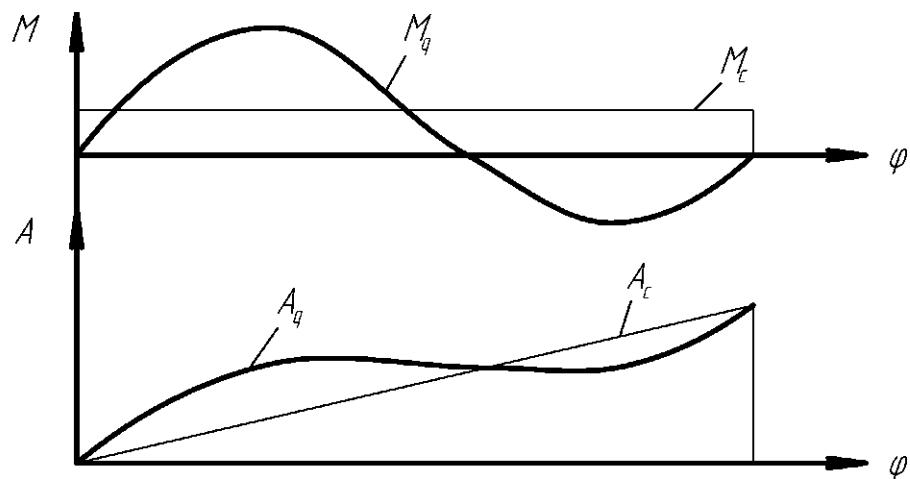


Рис. 6.

Согласно закону сил изменение кинетической энергии механизма равно работе внешних сил

$$E_1 - E_0 = A(\varphi) = \int_0^\varphi (M_g + M_Q) d\varphi \quad (11)$$

где  $E_0$  – кинетическая энергия механизма в начальный момент,

$A(\varphi)$  – работа внешних сил, произведенная внешними силами движущими и силами сопротивления за время поворота начального звена на угол  $\varphi$ .

После построения диаграммы избыточного момента нетрудно построить диаграмму изменения кинетической энергии

$$E_1 - E_0 = A(\varphi) = \int_0^\varphi M(d\varphi)$$

Интегральную кривую можно построить методом графического интегрирования

$$A_g = \int_0^\varphi M_g(d\varphi) \quad \text{и} \quad A_C = \int_0^\varphi M_C(d\varphi) \quad (\text{рис. 6})$$

Работа  $A_g$  есть площадь между кривой  $M_g$  и осью  $\varphi$ .

Работа  $A_C$  есть площадь между кривой  $M_C$  и осью  $\varphi$ :

$$E_2 - E_1 = A_g - A_C$$

Для нахождения реальной угловой скорости главного звена используем уравнение 8.

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{I_h}$$

откуда

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{I_h} \quad (12)$$

Строим в масштабе  $\mu_{Ip}$  диаграмму приведенного момента инерции  $I_h(\varphi)$

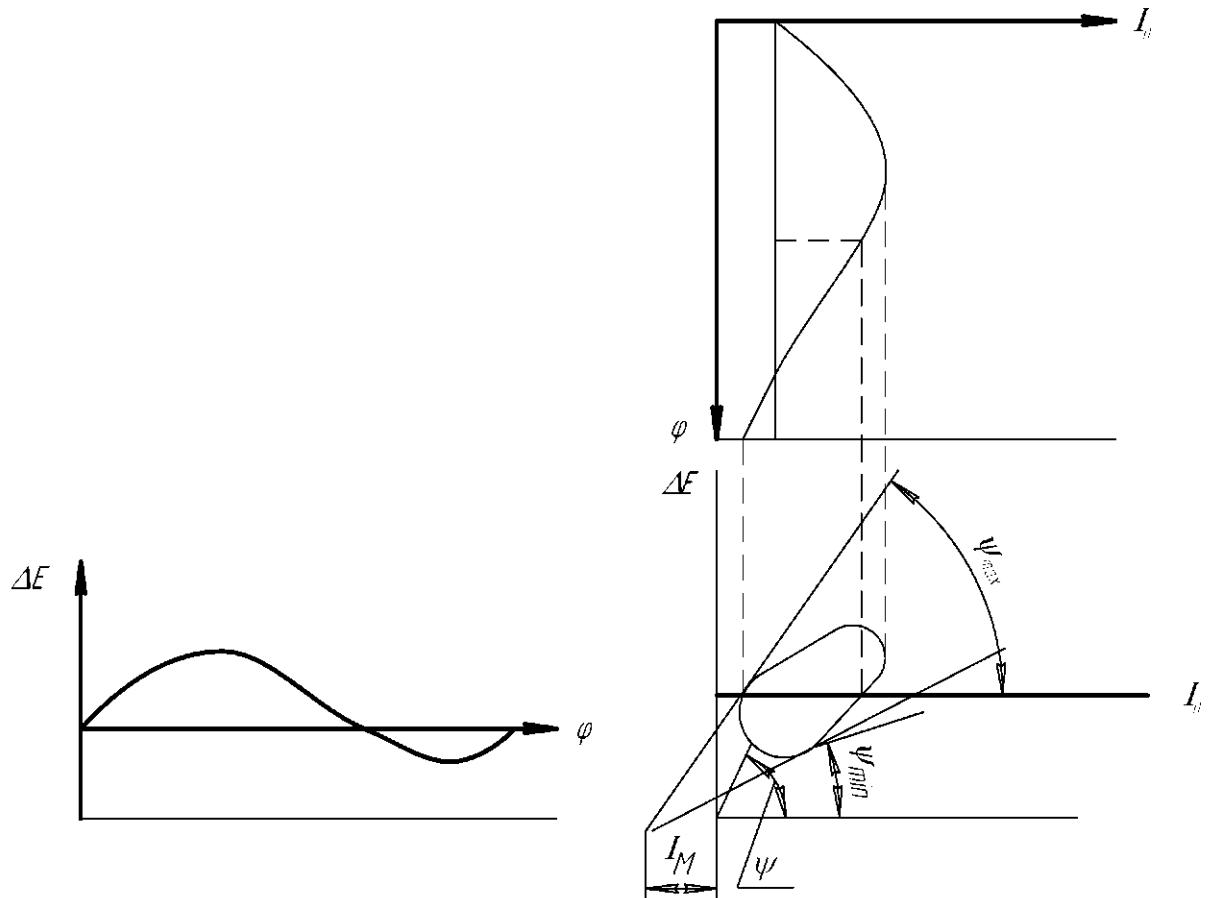


Рис. 7

Построением добиваемся исключения параметра  $\varphi$ . Получаем замкнутую кривую  $\Delta E = f(I_n)$ .

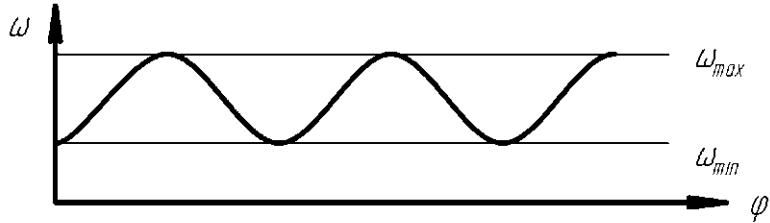
Отметим произвольную точку К и соединим ее с началом координат

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{\overline{E_k}}{I_{nk}} = \frac{E_k \cdot \mu_I}{I_{nk} \cdot \mu_E} \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13)

$$\omega^2 = 2 \operatorname{tg} \Psi \frac{\mu_E}{\mu_I}$$

Подсчитав для каждого положения  $\varphi$  можно построить график  $\omega = f(\varphi)$  (рис. 8)



$$\text{Рис. 8}$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{\mu_I} \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\max}} \quad (14)$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{2\mu_E}{\mu_I} \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\min}} \quad (15)$$

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} \quad (16)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \omega_{cp} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \quad u \quad \omega_{\max}^2 \cong \omega_{cp}^2 (1 + \delta) \\ \omega_{\min} &= \omega_{cp} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \quad u \quad \omega_{\min}^2 \cong \omega_{cp}^2 (1 - \delta) \end{aligned}$$

Такое допущение можно сделать, так как  $\delta$  – очень мало.

Тогда

$$\operatorname{tg} \Psi_{\max} = \frac{\omega_{cp}^2 \cdot (1 + \delta) \cdot \mu_I}{2\mu_E} \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \Psi_{\min} = \frac{\omega_{cp}^2 \cdot (1 - \delta) \cdot \mu_I}{2\mu_E} \quad (18)$$

При заданных  $\omega_{cp}$  и  $\delta$  можно определить  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$ .

Если при этом уже построены диаграммы  $E = f(I_n)$ , то можно определить дополнительный момент инерции, который необходимо добавить к механизму с целью получения механизма с лучшим коэффициентом неравномерности.

Под углами  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$  проводим лучи касательно к кривой  $E = f(I_n)$ . В точке пересечения этих лучей получим новую систему координат с новым значением  $I_n$  и  $E$ .

$I_M$  – приведенный момент инерции маховика.

**Определение момента инерции маховика в случае, когда  $J_n = \text{var}$**

Трудность решения задачи о маховике в этом случае заключается в том, что положения механизма с экстремальными значениями кинетической энергии и угловых скоростей в общем случае не совпадают и, следовательно, нет основания полагать, что наибольшему перепаду энергии  $\Delta T_{\text{наиб}}$  соответствуют положения звена приведения, где имеют место  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ ,

тогда  $\Delta T_{\text{наиб}} \neq J_n \omega_{cp}^2 \delta$ , как это было при  $J_n = \text{const}$

Тогда, представляя приведенный момент инерции состоящим из постоянной и переменной частей, запишем:

$$J_n = J_M + J_{zb},$$

где  $J_n$  - приведенный момент инерции механизма;

$J_M$  - приведенный момент инерции маховика;

$J_{zb}$  - приведенный момент инерции звеньев, движение которых связано с движением звена приведения переменным передаточным отношением (т. е. звеньев, направления движений которых изменяются).

Заметим, что кинетическая энергия маховика будет иметь экстремальные значения в тех же положениях звена приведения, где будут иметь место экстремальные значения его угловой скорости;

$$\Delta T_{\text{наиб}} = T_{M \max} - T_{M \min} = J_n \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2}$$

(где индекс М означает принадлежность к маховику)

т. к. .

Поэтому, если из кинетической энергии машины выделить кинетическую энергию маховика  $T_M$ , то можно определить наибольший перепад его энергии, а затем определить и его необходимый момент инерции тем же методом, как это делалось для машин с  $J_n = \text{const}$ .

Интегральные методы расчета маховика, основанные на решении уравнения движения машины, представленного в виде закона изменения кинетической энергии, отличаются друг от друга способами определения наибольшего перепада энергии маховика  $\Delta T_{\text{наиб}}$ .

Здесь существуют принципиально точные методы расчета без использования каких-либо упрощенных предположений и приближенные методы, использующие эти предположения.

**Метод Мерцалова Н. И.  
(приближенный метод)**

Предложен в 1914 году. Основан на выделении из кинетической энергии машины кинетической энергии маховика, как имеющего постоянный приведенный момент инерции  $J_M = \text{const}$ .

Пусть задана нагрузка на машину в виде зависимостей  $M_c^n(\varphi)$  и  $M_g^n(\varphi)$ . Тогда, интегрируя уравнение движения, получим:

$$T = T_0 + \Delta T \quad (*)$$

Представляя Т состоящей из энергии  $T_M$  и  $T_{zb}$  звеньев будем иметь:

$$T_M + T_{36} = T_0 + T;$$

выделяя из кинетической энергии механизма энергию  $T_M$ , получим:

$$T_M = T_0 + T - T_{36}.$$

Представим теперь  $T_M$  таким образом:  $T_M = T_0 + \Delta T$ ; (за  $T_0$  можно принять любое значение кинетической энергии и вести от него отсчет приращений  $\Delta T_M$ ).

Для удобства примем  $T_0$ , равным его значению в выражении (\*),

т. е. отсчет значений  $\Delta T_M$  будем производить от той же оси абсцисс, что и отсчет приращений кинетической энергии машины, тогда:

$$T_0 + T_M = T_0 + \Delta T - T_{36} \text{ или } \Delta T_M = \Delta T - T_{36}$$

Таким образом, чтобы построить график  $\Delta T_M(\phi)$ , надо иметь график  $\Delta T(\phi)$  и кинетическую энергию звеньев  $T_{36}(\phi)$

$$T_{36} = \frac{J_{36} \omega^2}{2}.$$

График  $\Delta T(\phi)$  получим, интегрируя диаграмму моментов.

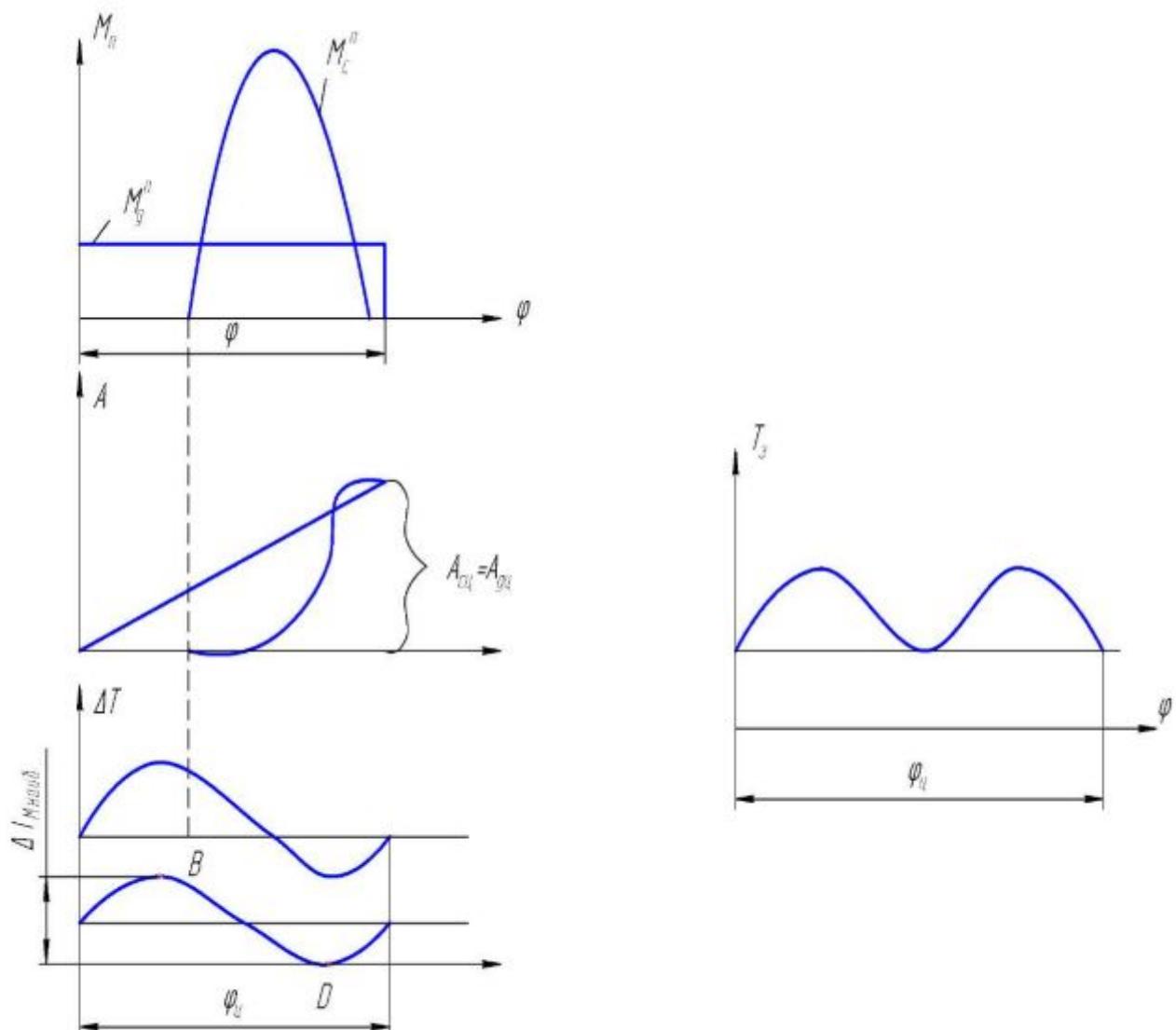


Рис. 9

Точки В и Д (рис. 9) приближенно соответствуют максимальному и минимальному значениям кинетической энергии маховика  $T_{M\max}$  и  $T_{M\min}$  соответственно.

Далее надо построить график  $T_{3B}(\phi) = \frac{J_{3B}\omega_{cp}^2}{2}$ , однако мы не располагаем истинными значениями угловых скоростей и поэтому не можем построить этот график точно, но принимая во внимание, что при задаваемых значениях коэффициента неравномерность хода машины  $\delta$ , истинные скорости машины будут очень мало отличаться от средней  $\omega_{cp}$ , можно построить этот график приближенно по зависимости:

$$J_{3B}(\phi) = \frac{J_{3B}\omega_{cp}^2}{2},$$

тогда, вычитая из ординат графика  $\Delta T(\phi)$  ординаты графика  $T_{3B}(\phi)$  получим график  $\Delta T_M(\phi)$ , по которому графически легко найти приближенное значение наибольшего перепада кинетической энергии маховика  $\Delta T_M$  наиб, а затем и его момент инерции:

$$J_M = \frac{\Delta T_{M\text{наиб}}}{\omega_{cp}^2 \delta}$$

### Метод Гутьяра Б.М. (точный метод)

Этот метод был предложен в 1939 году. Ход рассуждений, касающийся Мерцалова, применим и в методе Гутьяра, однако из графика  $\Delta T(\phi)$  будем вычитать энергию звеньев, вычисленную по формуле:

$$T_{36}(\phi) = \frac{J_{36}\omega_{\max}^2}{2}, \text{ тогда}$$

$$\Delta T_M = \Delta T - \frac{J_{36}\omega_{\max}^2}{2}.$$

Очевидно, что в этом случае мы вычитаем завышенные по абсолютной величине значения ординат графика  $T_{36}(\phi)$ , т. к. из  $\Delta T(\phi)$  мы вычитаем величины больше чем следует по отношению к истинному значению ординат, которые получились бы, если бы мы вычитали:

$$T_{36} = \frac{J_{36}\omega^2}{2}$$

где  $\omega$  – истинное значение угловой скорости звена приведения.

Определим на сколько завышены по абсолютной величине ординаты графика  $\Delta T_M(\phi)$ .

Нам следовало вычесть:

$$T_{3B} = \frac{J_{3B}\omega^2}{2},$$

а мы вычтем

$$T_{36} = \frac{T_{36}\omega_{\max}^2}{2}$$

следовательно, в каждом положении нами внесена ошибка

$$\Delta = \frac{J_{36}\omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_{36}\omega^2}{2} = \frac{J_{36}}{2}(\omega_{\max}^2 - \omega^2)$$

$J_{3B}$  выносится за скобки т. к. это приведенный момент инерции звеньев в одном и том же положении.

Однако в положении звена приведения, где  $\varphi = \omega_{\max}$ , ошибка  $\Delta=0$ . Значит, в этом положении мы имеем истинное значение  $\Delta T_M$ . Этому положению соответствует:

$$T_{M\min} = \frac{J_M \omega_{\min}^2}{2}$$

В результате построения кривых 1 и 2 (рис. 6), получим точки А и В, соответствующие максимуму и минимуму кинетической энергии маховика  $T_{M\max}$  и  $T_{M\min}$ .

Имея эти точки А и В на графике, находим точное значение наибольшего перепада кинетической энергии маховика  $\Delta T_M$  наиб и вычисляем момент инерции маховика:

$$J_M = \frac{\Delta T_{M\text{наиб}}}{\omega_{cp}^2 \delta}$$

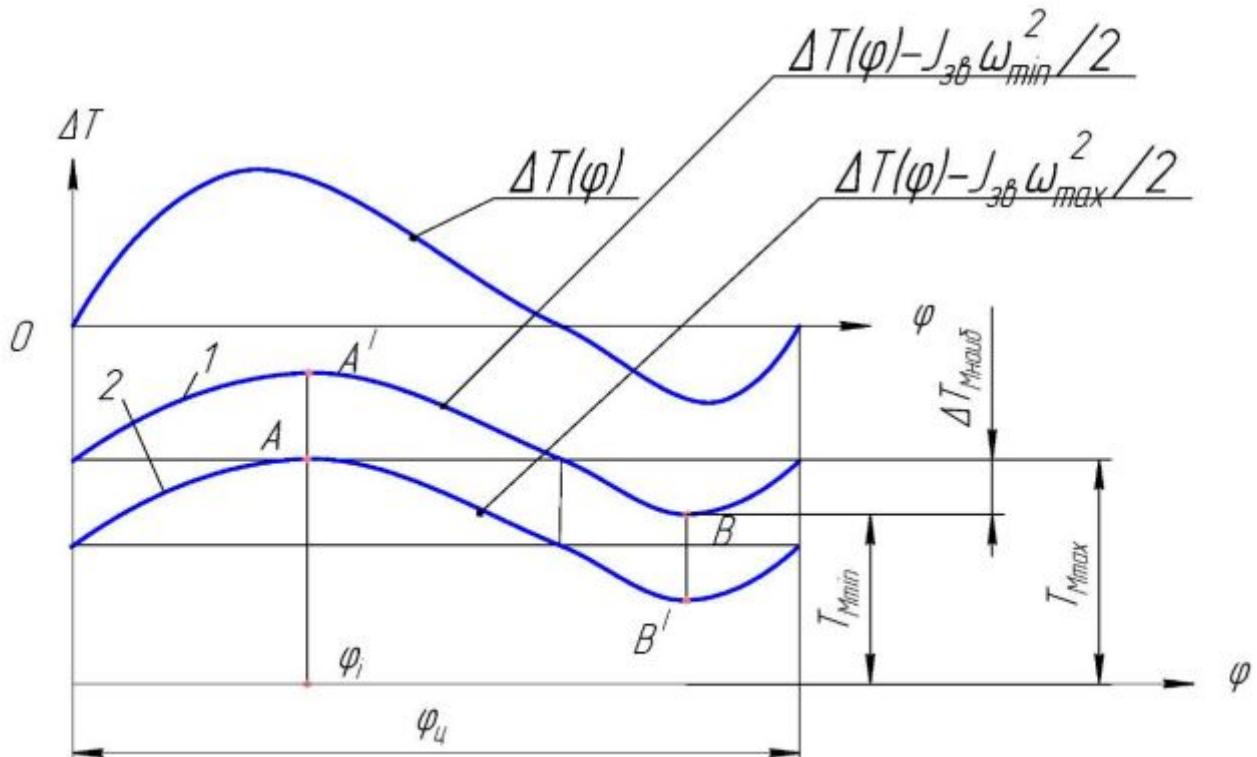


Рис. 10

Примечание 1: Все ординаты графиков в одном и том же положении механизма

$$T_{36(\max)} = \frac{J_{36} \omega_{\max}^2}{2} \text{ и } T_{36(\min)} = \frac{J_{36} \omega_{\min}^2}{2}$$

связаны зависимостью:

$$\frac{T_{36(\max)}}{T_{36(\min)}} = \frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{\min}^2} = c = \text{const.}$$

Примечание 2: Учитывая пункт 1 примечания можно строить только одну кривую, например  $T_{3B(\min)}(\varphi)$  и вносить соответствующую поправку в точке А', т. к. экстремальные значения для обеих кривых будут лежать на одной и той же ординате, т. е. точка А' должна быть перенесена в точку А, соответствующую истинному минимуму энергии маховика.

Таким образом, вместо построения кривой  $\Delta T(\varphi) - \frac{J_{36} \omega_{\max}^2}{2}$  на всем интервале, равном циклу,

следует определить точку А по выражению:

$$\Delta T(\varphi_i) = \frac{J_{\text{из}}(\varphi_i)\omega_{\max}}{2},$$

где  $\varphi_i$  – угол, определяющий положение звена приведения, в котором кинетическая энергия будет максимальной.

## 2.5. Методика определения момента инерции махового колеса

Рассмотрим два типичных случая задания сил.

Случай А. Заданы движущие силы и силы тяжести звеньев. Приведенный момент всех сил сопротивления – величина постоянная.

Последовательность выполнения работы:

Используя планы аналогов скоростей, определим приведенные моменты  $M_g$  и  $M_G$  для вычерченных положений механизма (отдельно от каждой силы).

Выбрав масштабы  $\mu_\varphi$  и  $\mu_M$ , строим диаграммы  $M_g = M(\varphi)$  и  $M_G = M(\varphi)$  (рис. 11а)

Строим суммарный график  $(M_g + M_{Gi}) = M(\varphi)$

Графическим интегрированием (при полюсном расстоянии  $H_1$ ) переходим от диаграммы  $(M_g + M_G)$  к диаграмме  $(A_g + A_G)$  с масштабом  $\mu_A = \mu_\varphi \cdot \mu_M \cdot H_1$  (рис. 11б)

Так как приведенный момент  $M_{np}$  постоянен, то его работа пропорциональна углу поворота  $\varphi$ . С другой стороны, его работа за период установившегося движения должна равняться сумме работ  $A_g + A_G$ , изображенной на рисунке отрезком ВС. Соединив точки О и С прямой, получим диаграмму  $A_C - \varphi$

Графическим дифференцированием переходим от диаграммы  $A_C - \varphi$  к  $M_C - \varphi$  при том же полюсном расстоянии  $H_1$ . Получаем прямую горизонтальную линию  $M_C - \varphi$  (рис. 11)

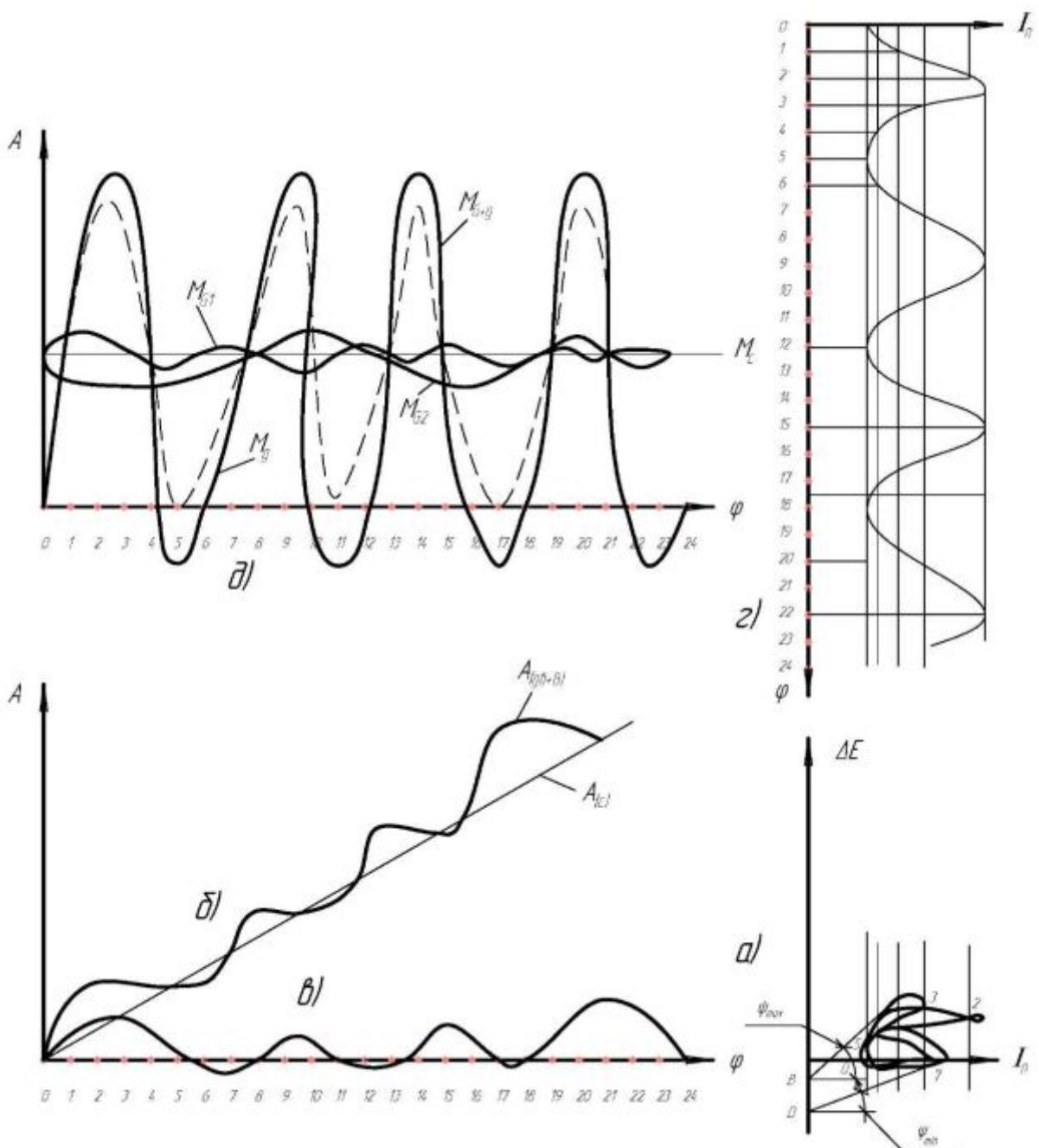


Рис. 11

1. Откладываем разность ординат диаграмм  $(A_g \pm A_G) - \varphi$  и  $A_C - \varphi$  вверх или вниз от оси абсцисс в зависимости от ее знака и строим диаграмму  $\Delta E - \varphi$  (рис. 11в)

$$\mu_E = \mu_A$$

Используя данные величин моментов инерции звеньев, масс звеньев строим диаграмму  $I_n - \varphi$  в масштабе  $\mu_{I_n}$  (рис. 11г)

Графически исключая угол  $\varphi$ , строим диаграмму  $\Delta E = I_n$  (рис. 11б). Эта диаграмма имеет вид замкнутой кривой, которая может иметь петлю, если графики  $\Delta E - \varphi$  и  $I_n - \varphi$  не симметричны.

По формуле 17 и 18 определяем  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$ , коэффициент неравномерности должен быть задан, либо его определяют по данным учебника Артоболевского в зависимости от типа машины.

Проводим касательные к кривой  $\Delta E - I_n$  под углом  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$  к оси  $I_n$ ; и отсекаем ими на оси ординат отрезок "AD"

Определяем момент инерции маховика

$$I_M = \frac{\overline{AD}}{\omega_{op}^2 \cdot \delta} \cdot \mu_E \quad (19)$$

$$\text{где } \mu_E = \mu_{\perp} = \mu_M \cdot \mu_\phi \cdot H_1$$

Определение махового момента. Маховым моментом называют произведения  $GD^2$ ,

где  $G$  – вес обода маховика а  $H$ ,

$D$  – средний диаметр маховика, м

$$I_M = \frac{GD^2}{4g} \quad (20)$$

$g$  – ускорение силы тяжести, м/сек<sup>2</sup>

Отсюда

$$GD = I_M \cdot 4g$$

Зная маховой момент, можно задаться диаметром  $D$  из конструктивных соображений, затем определить вес маховика или наоборот.

Соображения экономического характера:

Излишнее уменьшение  $\delta$  ведет к неоправданному увеличению  $J_M$ .

Перевод маховика на быстроходный вал ведет к уменьшению  $J_M$ , но к увеличению сил, передаваемых звеньями, расположенными за маховиком (например, увеличиваются размеры зубчатых колес, изготавливаемых из дорогостоящей стали).

## **Литература**

1. Артоболевский И.И. Теория машин и механизмов. Госиздат технико-теоретической литературы, 1951 г.
2. Добровольский В.В. Теория механизмов. Машгиз, М., 1951 г.
3. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. Изд. Машиностроение, 1969 г.
4. Борисов С.И., Комаров В.Ф., Токарев В.Л. Теория механизмов и детали точных приборов. Изд. "Машиностроение", 1966 г.
5. Кореняко А.Г., Кременштейн А.И. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. Машгиз, 1964 г.
6. Юдин В.А., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин. Изд. "Высшая школа", 1967 г.
7. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи, 1966 г.
8. Царев Г.В. Лекции по теории механизмов и машин. Часть II, изд. ТПИ, 1971 г.