

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Учебное пособие

Компьютеризированный курс самообучения основам ТММ (в комплекте с компакт-диском). Учебное пособие для студентов специальностей: металлургия чёрных металлов; литейное производство; порошковая металлургия; технология машиностроения; обработка металлов давлением.

Материал учебного пособия представляет собой часть учебной дисциплины «Прикладная механика» для специальностей «Автоматизация технологических процессов и производств», «Металлургия черных металлов», «Литейное производство», «Порошковая металлургия». Пособие написано на основе курса лекций по дисциплинам «Прикладная механика» и «Надежность, ремонт и монтаж металлургического оборудования». Предназначено для студентов и аспирантов и может быть полезным инженерно-техническим работникам, занимающимся проектированием, изготовлением, эксплуатацией и исследованием металлургических машин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Лекция 1. Обзор достижений в изучении курса.....	6
1.1. Патентный поиск.....	6
1.2. Анализ и выбор средств технической диагностики.....	7
1.3. Классификация видов повреждений деталей и узлов.....	8
Контрольные вопросы	8
Лекция 2. Структура и кинематический анализ механизмов	9
2.1. Структура механизмов.....	9
2.2. Группы Ассура	14
2.3. Кинематический анализ плоских и пространственных рычажных механизмов ..	20
Контрольные вопросы	36
Лекция 3. Кулачковые механизмы.....	37
3.1. Кулачковые механизмы.....	37
3.2. Кинематический анализ кулачковых механизмов	38
3.3. Синтез кулачкового механизма с острым толкателем.....	39
Контрольные вопросы	43
Лекция 4. Зубчатые передачи.....	44
4.1. Основные параметры, необходимые для расчета зубчатых передач	44
4.2. Особенности геометрии косозубых цилиндрических зубчатых колес	48
4.3. Основы расчета зубчатых передач на прочность.....	51
Контрольные вопросы	52
Лекция 5. Кинетостатика механизмов	53
5.1. Задачи динамического исследования механизмов и машин	53
5.2. Силы инерции звена.....	54
5.3. Определение внешних сил и реакций связей методами кинетостатики	63
5.4. Методы приведения сил и масс	70
5.5. Коэффициент полезного действия механизма (КПД)	73
5.6. Учёт трения в шарнирных механизмах	77
5.7. Приведение сил и масс.....	78
Контрольные вопросы	79
Лекция 6. Движение машин под действием заданных сил.....	80
6.1. Законы движения машин	80
6.2. Характерные периоды работы машины и законы передачи работ, мощности, сил, моментов	82

6.3. Законы передачи мощности, моментов, сил	83
6.4. Закон передачи моментов	86
6.5. Уравнения движения механизмов	87
Контрольные вопросы	92
Лекция 7. Регулирование хода машин.....	93
7.1. Различные режимы движения механизма.....	93
7.2. Назначение и принцип действия регулятора числа оборотов.....	95
7.3. Маховик: подбор его момента инерции	96
Контрольные вопросы	103
Лекция 8. Уравновешивание вращающихся тел.....	104
Контрольные вопросы	108
Литература.....	109

ВВЕДЕНИЕ

Основным направлением машиностроения, следовательно, и его составной части (проектирование, расчет, изготовление, эксплуатация деталей машин и узлов) является улучшение качества выпускаемых машин, оборудования и приборов повышение их технического уровня, производительности, надежности, и безопасности в эксплуатации.

Для современных машин характерны такие направления их развития, как увеличение степени автоматизации, повышение рабочих параметров – нагрузок, скоростей, температур, борьба за малые габариты и массу, повышение требований к точности функционирования, к эффективности их работы (производительность, мощности, КПД), объединение машин в системы с единым управлением. Усложнение машин и усиление требований к ним привели к необходимости повышения требований и их надежности и долговечности.

С особенно большими затратами времени и средств связан выход из строя уникальных машин и агрегатов, таких как мощные турбины, доменные печи, тяжелые краны и др. Ненадежная работа технологического оборудования (металлорежущих станков, сварочных аппаратов, термических печей) может привести к выпуску некачественной и ненадежной продукции. Но могут быть и такие последствия ненадежности изделий, которые нельзя оценить никакими экономическими показателями. Это гибель людей в результате авиационных и других катастроф, отказы военной техники в ответственные моменты.

Научный потенциал теории надежности: теория вероятностей, физико-химическая механика, включая теорию трения и изнашивания, разделы динамики и прочности машин, привлекаются идеи автоматического регулирования и управления, развиваются положения теории технологических процессов и диагностики.

ЛЕКЦИЯ 1. ОБЗОР ДОСТИЖЕНИЙ В ИЗУЧЕНИИ КУРСА

1.1. Патентный поиск

Особенностью исследований по теме долговечности деталей и узлов прокатных станов является отсутствие в Методической Классификации Изобретений прямой рубрики с такой формулировкой. В связи с указанным, исследованы рубрики, наиболее близкие по смыслу и тематической направленности.

Из их числа выявлены классы, имеющие в своём составе наибольшее количество патентной информации:

B21 B37/00 – контрольные и регулирующие устройства прокатных станов: диагностирование прокатных станов;

G01 M 7/00 – испытание конструкций или сооружений на вибрацию, на ударные нагрузки;

G01 M 13/04 – испытание подшипников;

G05 B 23/02 – электрические испытания и контроль систем управления и их элементов;

G06 T 15/46 – устройства для управления производственными процессами.

В результате анализа патентной информации, полученной в ходе поиска по фондам ВПТБ, можно сделать вывод, что основной массив информации содержится в таких странах, как Япония-55, РФ-151, США-10, ФРГ-4.

Основными фирмами, работающими в данном направлении являются Мицубиси Денки, Татуоми Тахито, Самитомо Кинзуки, Кавасаки Сэйтцу, Син-Ниппон Сайтейу, Фудзи Денки, Тойота Ивдоша, Westing Haus Electric Corp., Electronic Gerd.

Предварительный научно-технический анализ отобранных документов показал преобладание технических решений, основанных на совершенствовании вибрационных и акустических методов и средств контроля, при этом особенностью распределения информации по странам является преобладание

в развитых странах (Япония, США) первого и второго направлений исследования, а в РФ – третьего, что характеризует наличие проблем производственного характера: можно предположительно считать, что в Японии и США большей степени, чем в РФ решены проблемы с качеством средств и их диагностикой или они отнесены к НОУ-ХЛУ; в последние годы в Японии и США больше внимания уделяется совершенствованию систем диагностики прокатных станов.

1.2. Анализ и выбор средств технической диагностики

Рекомендованы следующие датчики, приборы и установки:

- устройство для бесконтактного замера крутящих моментов (тордуктор);
 - магнитострикционные мессодозы;
 - дифференциальные сигнализирующие манометры ДМ 2005Сг;
 - индикатор электронный ф. Internormen-Filter степени загрязнённости масла VS-1 и AG-1;
 - индикатор состояния подшипников ИСП-3, предназначенный для определения механических повреждений подшипников качения с диапазоном измерения 0...60дБ;
 - портативная аппаратура для вибродиагностики ВВМ-337, предназначенная для измерения и записи размаха виброперемещения, среднеквадратичного значения виброскорости, модуля и сдвига фазы оборотной составляющей с диапазоном измерения 0,1...100мм/с и 1...1000мкм соответственно;
 - тахометр со встроенным микропроцессором Термопoint-80, Швеция, фирмы Agema Ifrered-Systems, предназначенный для измерения температуры в любой точке поверхности детали с диапазоном измерения 30...137°C;
 - в качестве датчика тока применяем стандартные шнуры;
 - тахогенератор постоянного тока ПТ-22;

- цифровой термометр SKF TMDT2, преобразует температуру диапазоном -200°C до 1350°C в выходной аналоговый сигнал 1 мВ/°C, который может быть подан на интерфейс ПЭВМ;
- виброанализатор 2512, Дания, фирмы Вгъел & Кјегё предназначенный для анализа параметров вибрации с целью определения мест расположения дефектов;
- интерфейсы для внедрения образной диагностики.

1.3. Классификация видов повреждений деталей и узлов

Условия работы металлургического оборудования весьма разнообразны: контакты с раскаленным и жидким металлом, агрессивные среды, переработка абразивных материалов и т. д. Разнообразие условий эксплуатации и видов внешних воздействий определяют различный характер разрушения узлов и деталей металлургического оборудования.

Виды повреждений деталей и узлов:

- от действия статических сил,
- от температурного воздействия,
- от действия поворотно-статических и динамических сил,
- от воздействия коррозийных сред,
- от сил трения.

Контрольные вопросы

- 1.1. Приведите пример патентного поиска.
- 1.2. Опишите устройство для бесконтактного замера крутящих моментов (тордуктор).
- 1.3. Какова конструкция магнитострикционной мессодозы.
- 1.4. Каковы виды повреждений деталей и узлов от действия статических сил
- 1.5. Каковы виды повреждений деталей и узлов от температурного воздействия

ЛЕКЦИЯ 2. СТРУКТУРА И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Структура механизмов

Тело, изготовленное из целого куска материала, называется деталью. Если не учитывать форму детали, то она называется звеном. Подвижное соединение двух звеньев называется кинематической парой. Последовательное соединение звеньев кинематической пары называется кинематической цепью. Механизмом называется кинематическая цепь, подвижность которой равна числу ведущих звеньев. Подвижность — общее число степеней свободы всех звеньев кинематической цепи.

Классификация кинематических пар. Все кинематические пары разделяют на 5 классов. Класс кинематической пары определяется по формуле $k = 6 - W$, где W — число степеней свободы одного звена относительно другого в кинематической паре.

Степень свободы — это число подвижных движений. Свободно расположеннное в пространстве тело имеет 6 степеней свободы.

Степень свободы — это независимое перемещение. Если это свободное тело ввести в связь с другим телом, то число степеней свободы за счет связи уменьшится. Число связей будет определять класс кинематической пары.

Классификация по Артоболевскому И.И. (классы). Класс определяется числом отнятых степеней свободы W .

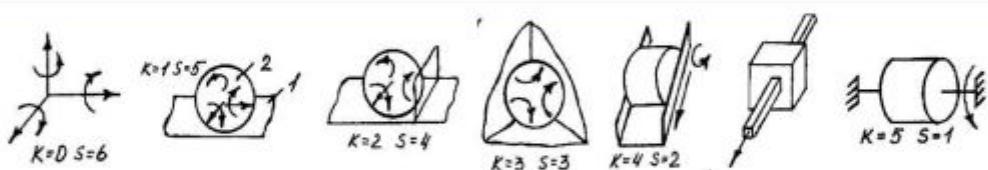


Рис. 2.1. Классификация наиболее употребительных пар по Артоболевскому И.И.

Классификация по Добровольскому В.В. (рода) $R6$, $R5$, $R4$, $R3$, $R2$,

R_1

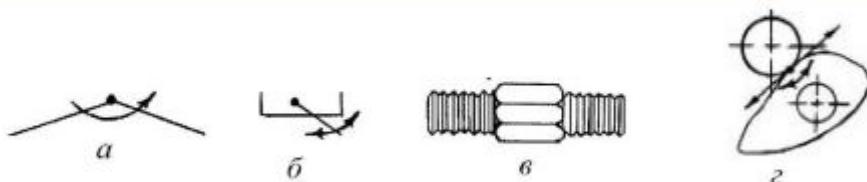


Рис.2.2. Классификация наиболее употребительных пар по Добровольскому В.В.: а — коленвал и шатун — $\kappa=5$ (только поворот), б — шатун и поршень — $\kappa=5$ (только поворот), в — винтовая пара — $\kappa=5$ (т.к. одно движение зависимое не считается), г — кулачок и ролик — $\kappa=4$ (поворот и перемещение, если закрепить кулачок или толкатель)

Подвижность кинематической цепи. Будем рассматривать только плоскую кинематическую цепь, звенья которой совершают плоскопараллельное движение. Тело, свободно расположенное на плоскости имеет 3 степени свободы. Рассмотрим n -звеньев, свободно расположенных на плоскости, общее число степеней свободы всех звеньев общее число степеней свободы $W = 3n$ (в пространстве $6n$)

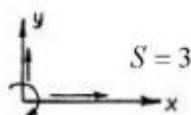


Рис.2.3. Общее число степеней свободы

Соединим первое звено с плоскостью, образовав кинематическую пару 5-го класса. Общее число степеней свободы уменьшилось на 2 и стало $W^1=3n-2$, т.к. каждая кинематическая пара 5-го класса допускает только одно движение из 3-х, т.е. уменьшает на 2 числа степеней свободы.

Соединим 1-е звено со вторым, образовав еще одну кинематическую пару 5-го класса. $W^{11}=3n-4$.

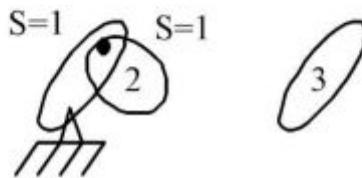


Рис.2.4. Кинематические пары

Обобщая, можно записать: если количество пар 5-го класса равно p_5 , общее число степеней свободы будет $W = 3n - 2p_5$, соединим 2-е звено с 3-м, образовав кинематическую пару 4-го класса.

Общее число степеней свободы всех звеньев будет равно $W = 3n - 2p_5 - 1$, если обозначим пары 4-го класса через p_4 , то получим формулу Чебышева П.Л.

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (2.1)$$

Кинематическая пара 4 класса допускает два движения из 3-х, т.е. уменьшает на 1 число степеней свободы.

Так как кинематические пары 3,2,1-го классов являются пространственными, то их нельзя применить для плоской кинематической цепи.

$W_{\text{подвижн.}} = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - 1p_5$ (в пространстве). Иногда пишут $6(n-1)$ — исключая неподвижное звено (опору).

Пример: Замена кинематической пары 4-го класса.

Эксцентриковый кулачковый механизм состоит из кулачка, представляющего собой диск 1 радиуса R и толкателя 2, при вращении кулачка вокруг

оси, острье толкателя скользит по цилиндрической поверхности кулачка, а сам толкатель перемещается вверх-вниз. Схема 1 эквивалентна схеме 2, где $|OA| = \text{const}$, $|OB| = \text{const}$.

Определим класс кинематических пар схемы 1 и схемы 2. Рассмотрим схему 1, где $S01=1$, $K01=5$, $K12=4$, звено 1 относительно 2 можно сдвинуть и повернуть $S20=1$, $K20=5$, $n=2$, $p_5=2$, $p_4=1$.

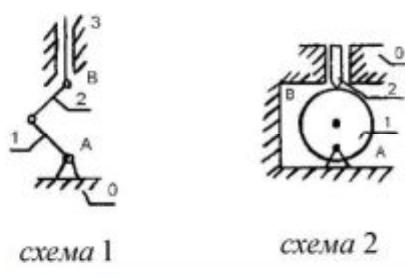


Рис.2.5. Кинематическая пара

Рассмотрим схему 2: W подвижн. $= 3 \times 2 - 2 \times 2 - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$.

Реальный механизм не будет плоским, следовательно, в реальном механизме устанавливают пары 1-го, 2-го, 3-го класса (пространств).

Пусть механизм абсолютно точный, тогда подвижный механизм (число степеней свободы всех звеньев механизма, исключая стойку)

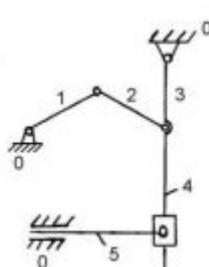


Рис. 2.6. Кинематическая пара

Пусть механизм абсолютно точный, тогда подвижный механизм (число степеней свободы всех звеньев механизма, исключая стойку) определим по формуле Чебышева

$$W = 3n - p_4 - 2p_5 = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1,$$

где n – число подвижных звеньев, $n=5$, p_4 – количество пар 4-го класса, $p_4=0$, p_5 – количество пар 5-го класса, $p_5=7$.

Пары 0-1; 1-2; 2-3; 3-0; 4-3; 4-5; 5-0, для очень точно изготовленной кинематической цепи можно оставить пары 5-го класса, т.к. система имеет 1 степень свободы.

Рассмотрим схему 2: $S_{01}=1$, $K_{01}=5$, $K_{12}=5$, $S_{12}=1$, $S_{23}=1$, $K_{23}=5$, $n=3$, $p_5=4$; $K_{30}=5$, $p_4=0$.

$$W = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$$

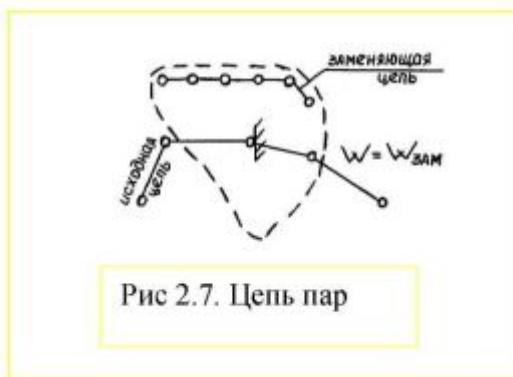
На этом примере мы убедились, что кинематическую пару 4-го класса можно заменить цепью из 2-х пар 5-го класса.

Пример: Рассмотрим замену в общем случае.

Дана цепь, состоящая из n звеньев, имеющих p_5 пар 5-го класса и одну пару 4-го класса. Это исходные цепи. Необходимо пару 4-го класса заменить цепью, состоящей только из пар 5-го класса. Эту цепь будем называть заменяющей.

Подвижность исходной цепи $W = 3n - 2p_5 - 1$.

Подвижность заменяющей цепи $W = 3n - 2p_5$ зам.



$W_{\text{зам.}} = -1$, $W_{\text{зам.}} = 3n - 2p_5_{\text{зам.}} = 3n - 2p_5_{\text{зам.}} = -1$; $2p_5_{\text{зам.}} = 3n - 1$, $p_5_{\text{зам.}} = (3n + 1)/2$, т.к. количество пар 5-го класса должно быть целым, то заменяющая цепь должна состоять из нечетного числа звеньев.

Из всех видов кинематических цепей, которые возможны при замене на цепи, состоящие из одного звена и двух шарниров, как наиболее простые.

Подвижность реальной кинематической цепи по формуле Малышева

$$W = 6n - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5 = 6 \times 5 - 5 \times 7 = 30 - 35$$

$W = -5$, где $n = 5$ — число подвижных звеньев; $p_1 = 0$ — число пар 1-го класса; $p_2 = 0$ — число пар 2-го класса; $p_3 = 0$ — число пар 3-го класса; $p_4 = 0$ — число пар 4-го класса; $p_5 = 7$.

Цепь проворачивается за счет деформации, например, звеньев.

2-ой способ.

Поступательные пары 4-го класса 0-1,3-0 — 5-го класса, остальные 3-го класса

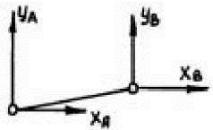
1-2 – 3-го класса	p_3 – 3 штуки
2-3 – 3-го класса	p_4 – 2 штуки
3-4 – 4-го класса	p_5 – 2 штуки
4-5 – 3-го класса	всего 7
5-0 – 4-го класса	

$$W = 6 \times 5 - 3 \times 3 - 4 \times 2 - 5 \times 2 = 30 - 9 - 8 - 10 = 3.$$

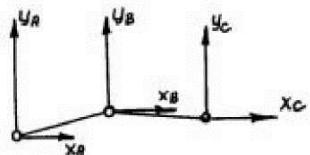
2.2. Группы Ассура

Группой Ассура называется статически определимая кинематическая цепь с минимально возможным числом звеньев. При расчете кинематической цепи на прочность необходимо знать силы, действующие на каждое звено цепи. Формально число степеней свободы можно представить $W = W + 0 + 0 + 0 + \dots + 0$, т.е. любой механизм можно разделить на отдельные части.

Общий случай условий статической определимости.



— статически неопределенная конструкция, уравнения статики для 4 неизвестных.



— статически определимая система (большей частью группы Ассура), 6 уравнений статики для 6-и неизвестных.

Рис. 2.8. Условия статической определимости

Рассмотрим число неизвестных реакций в кинематической паре.

Пара 4-го класса — 1 неизвестное, причем известна ее точка приложения и ее направление

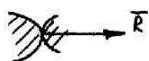


Рис.2.9. Пара 4-го класса

Пара 5-го класса — 2 неизвестные. Допустим, что кинематическая цепь состоит из n звеньев, имеет p_5 и p_4 . Для n звеньев составляем $3n$ уравнений статики. Число неизвестных будет $2p_5+p_4$. Задача статически определима, если $3n=2p_5+p_4 \Rightarrow 3n-2p_5-p_4=0$.

По формуле Чебышева полученное выражение описывает подвижные кинематические цепи. Группы Ассура должны обладать нулевой подвижностью.

Если рассмотреть пары 4-го класса, то группы Ассура $3n-2p_5=0$, $p_5=3n/2$, т.е. число звеньев 5-го класса должно быть четным.

Простейшая кинематическая цепь, у которой число степеней свободы Пара 4-го класса W равно числу степеней свободы всего механизма называется группой начальных звеньев. Кинематические цепи, у которых число степеней свободы равно 0, называются группами звеньев нулевой степени свободы или группами Ассура. Определить строение механизма — это значит, установить из каких групп звеньев (начальных и групп Ассура) данный механизм состоит, и в каком порядке эти группы звеньев друг к другу присоединены. Обозначим число звеньев групп через n^1 , число вращательных кинематических пар p^1 . Число степеней свободы $W^1=3n^1-2p^1$ все звенья подвижны, т.к. неподвижное звено отошло к группе начальных звеньев, а кинематические пары 4-го класса отсутствуют.

Но для групп Ассура $W^1=0$, $3n^1-2p^1=0$, следовательно, p^1 — всегда четно, а значит и $3n^1$ должно быть четно, т.е. n^1 будет кратно 2 и $n^1=2k$, а $p^1=3k$, где k — любое целое положительное число.

Простейшая группа Ассура ($k=1$) состоит из 2-х звеньев 1 и 2, входящих в состав 3-х кинематических пар и называется диадой или 2-х поводковой группой Ассура.

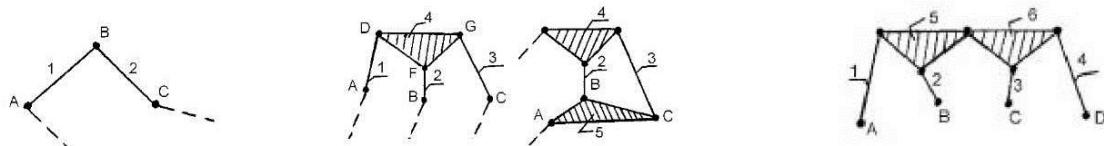


Рис.2.10. Группы Ассура

Следующая группа ($k=2$) состоит из 4-х звеньев и 6-и кинематических пар и существует в двух вариантах. Эта группа Ассура называется 3-х поводковой группой. Следующая группа ($k=3$) имеет 6 звеньев и 9 кинематических пар.

Существует в 10 вариантах. Это 4-х поводковая группа Ассура.

При большем k — встречаются редко

Таблица 2.1

Классификация групп Ассура

Класс	Контур	Порядок		
	1	2	3	4
2				
3				
4				

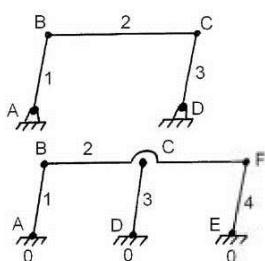
Класс группы определяется количеством шарниров в замкнутой цепи, контуре с наибольшим числом сторон.

Порядок определяется числом шарниров, которыми группу можно присоединить к стойке.

Пассивные звенья. Надежность кинематической цепи.

$$AB=CD, BC=AD, S_{01}=1, k_{01}=5, S_{01}=S_{03}=S_{12}=S_{23}, n=3, p_5=4, p_4=0;$$

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 9 - 8 = 1.$$



$$AB=CD=EF, BC=AD=EF=CF; W = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0.$$

Рис.2.11. Пассивные звенья

Подвижность равна $W=0$, а система может двигаться, что является несоответствием, это вызывается наличием пассивных звеньев. При удалении их работа цепи не нарушается. Пассивные звенья — это резервные звенья, увеличивающие надежность кинематической цепи.

Определение пассивных звеньев: определение подвижности цепи; определение подвижности цепи по формуле Чебышева; если подвижности не равны, то в цепи имеются пассивные звенья.

Пример: $W = 3 \times 3 - 2 \times 3 - 1 = 2$. Если мы начнем вращать кулакок, то будет совершаться поступательное движение толкателя, подвижность системы $W=1$, наблюдается несоответствие, это потому, что звено 2 — пассивное.

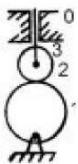


Рис. 2.12. Звено 2 — пассивное

Большинство механизмов имеет одну степень свободы, т.к. необходимо приводить в движение только одно звено, $W = 1$.

Наиболее простыми являются вращательная и поступательная пары, т.е. $k=5$, схематичное изображение которых

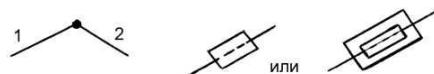
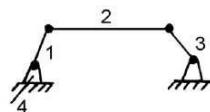


Рис.2.13. Схематичное изображение вращательной и поступательной пар

Следующим с $W = 1$ наиболее простым механизмом будет плоский четырехзвеный механизм с четырьмя кинематическими парами 5-го класса. Такой механизм в зависимости от расположения вращательных и поступательных пар может существовать в 7 видах (табл.2.2).

Таблица.2.2.

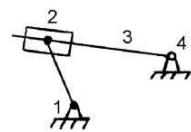
Виды четырехзвенных механизмов



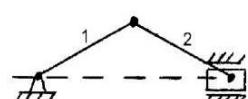
Четырех шарнирный механизм

1(3) – кривошип, если полный оборот, и коромысло (балансир), если не-
полный.

2 – шатун; 4 – стойка



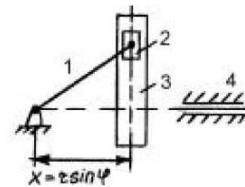
Кулисный механизм
1 – кривошип,
2 – кулисный камень
3 – кулиса
4 – стойка



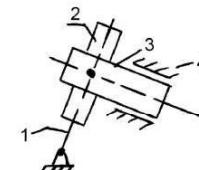
Кривошипно-шатунный механизм

1 – кривошип,
2 – шатун,
3 – ползун

Механизм двойного ползуна (синус-
ный механизм

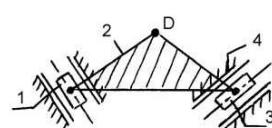


Кулисно-ползунный механизим



2-х ползунный механизм

точка Д описывает эллипс
Впервые применил Леонардо да-



(крейцкопф, поршень), 4 – стойка
Винчи, как эл-
липсограф

Двухкулисный механизм

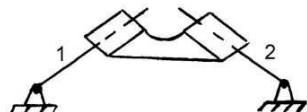


Рис. 2.14. Двухкулисный механизм

2.3. Кинематический анализ плоских и пространственных рычажных механизмов

Кинематический анализ плоских рычажных механизмов подразделяется: графический, графоаналитический и аналитический методы.

При кинематическом исследовании проводят: построение планов механизмов, построение траекторий любой точки, определение скоростей и ускорений точек механизма и определение радиуса кривизны траектории в любой точке.

Графический метод анализа механизмов. Графическое изображение взаимного расположения звеньев, соответствующее выбранному моменту времени, называется планом механизма.

Для построения точки механизма строят ряд планов механизма и соединяют плавной кривой. Траектории, описываемые, точками шатуна, называют шатунными кривыми. Для наглядного представления скорости и ускорения строят кинематические диаграммы.

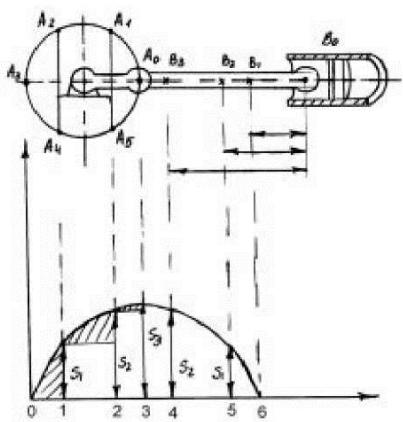


Рис.2.15. Анализ механизма

Далее графически дифференцируем перемещения, находим график скорости и ускорений.

$$\Delta Oal \sim \Delta O_1AO_2; \Delta abd \sim \Delta O_1BO_2; \Delta bcf \sim \Delta O_1CO_2.$$

Для построения графика скорости в общем случае разбиваем ось абсцисс на оси абсцисс графика скорости. Откладываем произвольный отрезок H , его называют полюсным расстоянием.

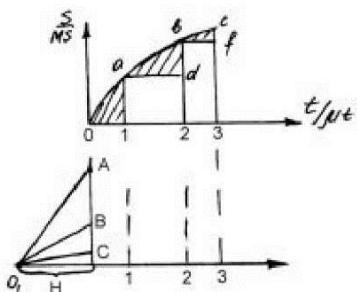


Рис.2.16. Графический анализ механизма

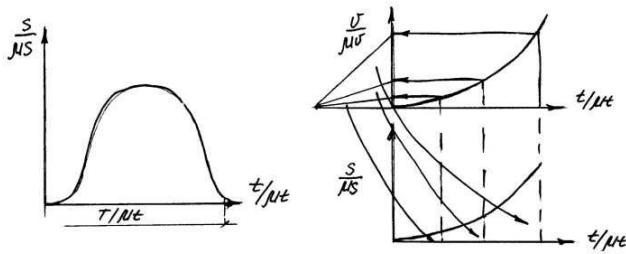


Рис.2.17. Графическое дифференцирование

На этом отрезке строим треугольники, подобные треугольникам приращения пути.

Графоаналитические методы кинематического анализа механизма.

Одним из методов является метод комплексного переменного. Положение точки на плоскости в декартовой системе координат определяется либо радиус-вектором, либо текущими координатами точки.

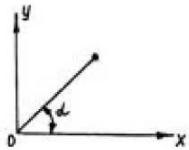


Рис.2.18. Положение точки на плоскости в декартовой системе координат

Вектор \overline{OA} называется вектором-комплексом.

$$\overline{OA} = x + iy, \quad i^2 = -1$$

$$x = OA \cos \alpha; \quad y = OA \sin \alpha$$

$$\overline{OA} = OA (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$i(\cos \alpha + i \sin \alpha) = i(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$i \cos \alpha - i \sin \alpha = i(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$-\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = i; \quad -\frac{\sin \alpha + i \cos \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} d\alpha = id\alpha$$

$$\int -\frac{\sin \alpha + i \cos \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha} d\alpha = \int id\alpha;$$

$$\ln(\cos \alpha + i \sin \alpha) = i\alpha$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}, \quad \overline{OA} = OA \times e^{i\alpha}$$

Вектор скорости точки, есть производная от радиус-вектора положения

$$\text{точки A: } \overline{v}_A = \frac{d\overline{OA}}{dt}, \text{ а ускорение } \overline{\omega}_A = \frac{d^2\overline{OA}}{dt^2}$$

Пример: Построение плана скоростей и ускорений при решении задач методом комплексного переменного для кривошипно-шатунного механизма.

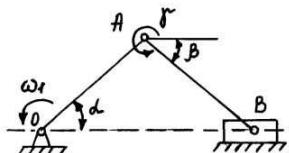


Рис. 2.19. Кривошипно-шатунный механизм

Находим величину радиус-вектора, определяющего положение точки *B* — ОВ, дифференцируя его, получаем v_B и ω_B

$$\overline{v}_B = \frac{d\overline{OB}}{dt}, \quad \overline{\omega}_B = \frac{d^2\overline{OB}}{dt^2}$$

Из ΔAOB имеем $OB = OA + AB$

$$OA = OA \times e^{i\alpha}$$

$OA = \text{const}$, $AB = \text{const}$, $\alpha \neq \text{const}$, α — возрастает; $\gamma \neq \text{const}$, γ — убывает; производная от возрастающей функции — «+»; производная от убывающей функции — «-».

При построении планов скоростей нам нет необходимости учитывать возрастает или убывает функция, т.к. планы скоростей позволяют однозначно найти ответ независимо от возрастания и убывания функции.

Направление	$\perp OA$	$\perp AB$
Величина	$OA \omega_1$	$AB \omega_2=? \quad \omega_2=?$

Необходимо построить треугольник, одна сторона которого известна по направлению и модулю, а два других только по направлению.

Уравнение скоростей представляет собой векторную запись, построим треугольник, который будет называться планом скоростей, если при его построении будут соблюдаться условия: все векторы абсолютных скоростей, производные от радиус-векторов точек-векторов, выходящих из начала координат; все векторы абсолютных скоростей выходят из этой точки, которую называют полюсом плана скоростей.

Отрезок oa строим в произвольном масштабе, а затем определяем масштаб построения

$$\mu_v = \frac{OA \times \omega_1}{100} \left[\frac{m}{c \times mm} \right]$$

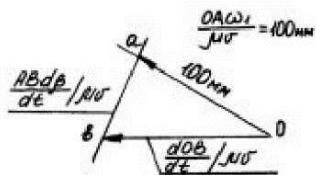


Рис.2.20. План скоростей

Определим ускорения точек и звеньев механизма.

$$\frac{dOB}{dt} = v_B = ob\mu_v; \text{скорость точки } B \quad AB \frac{d\gamma}{dt} = ab\mu_v; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega_2 = \frac{ab\mu_v}{AB}$$

угловая скорость шатуна АВ

Определим ускорения точек и звеньев механизма.

$$\frac{d^2OB}{dt^2} = OA \frac{d\alpha}{dt} e^{i(\alpha+90)} i \frac{d\alpha}{dt} + AB \frac{d\gamma}{dt} e^{i(\gamma+90)} i \frac{d\gamma}{dt} + AB \frac{d^2\gamma}{dt^2} e^{i(\gamma+90)}$$

$$i = \cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ = e^{90i}$$

$$\frac{d^2OB}{dt^2} = OA \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 e^{i(\alpha+180)} + AB \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 e^{i(\gamma+180)} + AB \frac{d^2\gamma}{dt^2} e^{i(\gamma+90)}$$

Таблица 2.2.

$\parallel OB$	$\parallel DA$	$\parallel AB$	$\perp AB$
$\frac{d^2OB}{dt^2}$	$OA \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = AO\omega_1^2$	$AB \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = AB\omega_2^2$	$AB \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} \right) = ?$

Задача сводится к построению четырехугольника, две стороны которого известны по величине и направлению, а две другие - только по направлению.

Это будет план ускорений, если из точки полюса будут выходить все абсолютные ускорения, т.е. вторые производные от радиус-вектора положения точек.

Для построения необходимо выбрать масштаб ускорения μ_ω

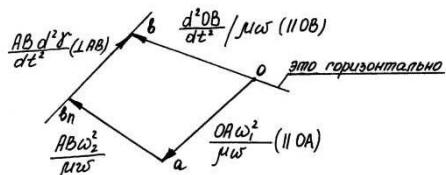


Рис.2.21. План ускорений

Определим неизвестные нам величины

$$\frac{d^2OB}{dt^2} = \omega_B = ob\mu_\omega; \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \varepsilon_2 = \frac{b_n b \mu_\omega}{AB} \quad \text{— угловое ускорение звена AB.}$$

Пример: Определить скорости и ускорения точек и звеньев кулисного механизма.

Дано: AO, AB, OC, $\omega_1 = \text{const}$

Найти: $v_B = ?$ $\omega_2 = ?$ $v_C = ?$ $\omega_B = ?$ $\omega_C = ?$ $\varepsilon_2 = ?$

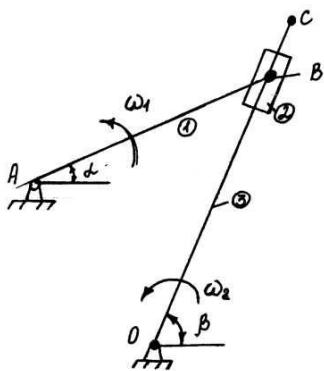


Рис.2.22. Кулисный механизм

Решение

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}; \quad \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{BA}$$

$$\overline{OA} = OA \times e^{i\alpha}, \quad \overline{AB} = AB \times e^{i\alpha}$$

$$\overline{OB} = AO \times e^{i\alpha} + AB \times e^{i\alpha} \quad \alpha \neq const$$

$$\overline{v_B} = AB \times i \times e^{i\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = AB \times e^{i(\alpha+90)} \frac{d\alpha}{dt} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega_1; i = e^{i90}$$

$$\frac{d\overline{OB}}{dt} e^{i\beta} + \overline{OB} \times e^{i(\beta+90)} \frac{d\beta}{dt} = AB \times e^{i(\alpha+90)} \frac{d\alpha}{dt}$$

Таблица 2.3

$\parallel OB$	$\perp OB$	$\perp AB$
?	$OB \frac{d\beta}{dt} \omega_2 = ?$	$AB \frac{d\alpha}{dt} = AB\omega_1$
$\omega_2 = \frac{d\beta}{dt} = \frac{ob_3\mu\nu}{OB}; \quad \mu\nu = \frac{AB_1\omega_1}{ob_1}$		

b_1, b_3 — относительная скорость 2-го звена, направленная вдоль звена OC

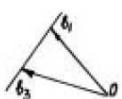


Рис.2.23. План скоростей

Составим план скоростей

$$\frac{dOB}{dt} e^{i\beta} + OB \frac{d\beta}{dt} e^{i(\beta+90)} = AB \frac{d\alpha}{dt} e^{i(\alpha+90)}$$

$$\frac{d^2OB}{dt^2} e^{i\beta} + \frac{dOBd^2\beta}{dt^2} e^{i(\beta+90)} + \frac{dOBd\beta}{dt} e^{i(\beta+90)} + OB \frac{d^2\beta}{dt^2} e^{i(\beta+90)} + OB \frac{d\beta}{dt} e^{i(\beta+90)} i \frac{d\beta}{dt} = AB \frac{d\alpha}{dt} e^{i(\alpha+90)};$$

$$\frac{d^2OB}{dt^2} e^{i\beta} + 2 \frac{dOB}{dt} \frac{d\beta}{dt} e^{i(\beta+90)} + OB \frac{d^2\beta}{dt^2} e^{i(\beta+90)} + OB \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 e^{i(\beta+180)} = AB \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 e^{i(\alpha+180)}$$

Таблица 2.4

?	$2 \frac{dOB}{dt} \omega_2$?	$OB \omega_2^2$	$AB \omega_1^2$

Выбираем масштаб и строим план ускорений, вычислим неизвестные

$$\frac{d^2OB}{dt^2} = b_3 k \mu \omega; OB \frac{d^2\beta}{dt^2} = b_n b_k \mu \omega; \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{b_n b_3 \mu \omega}{OB}$$

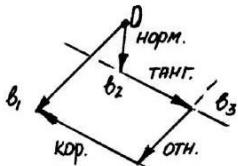


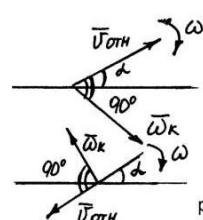
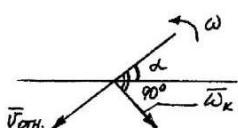
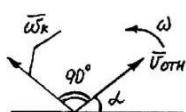
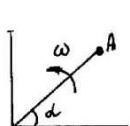
Рис.2.24. План ускорений

Определим направление вектора ускорения Кориолиса.

$$\omega = \text{const}; \quad OA \neq \text{const}$$

$$\overline{OA} = OA e^{i\alpha}$$

$$\frac{d\overline{OA}}{dt} = \frac{dOA}{dt} e^{i\alpha} + OA \frac{d\alpha}{dt} e^{i(\alpha+90)}$$



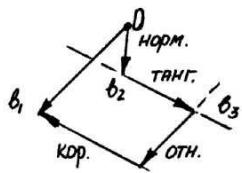


Рис.2.25. Направление вектора ускорения Кориолиса

$$\frac{d^2OA}{dt^2} = \frac{d^2OA}{dt^2}e^{i\alpha} + 2\frac{dOOA\alpha}{dt^2}e^{i(\alpha+90)} + OA\frac{d^2\alpha}{dt^2}e^{i(\alpha+90)} + OA\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 e^{i(\alpha+180)} \text{ — уравнение}$$

Кориолиса

а) α — возрастает, OA — возрастает ω^k — ускорение Кориолиса

$$\frac{dOA}{dt} = -v_{\text{относительная}},$$

$$\text{б) } \alpha \text{ — возрастает, } OA \text{ — убывает } \omega^k = 2\left(-\frac{dOA}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}e^{i(\alpha+90)},$$

$$\text{в) } \alpha \text{ — убывает, } OA \text{ — возрастает } \omega^k = 2\frac{dOA}{dt}\left(-\frac{d\alpha}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}e^{i(\alpha+90)},$$

г) α — убывает, OA — убывает.

Кинематический анализ с использованием ЭЦВМ. Пример: Определить скорости и ускорение точек и звеньев четырехзвенного механизма.

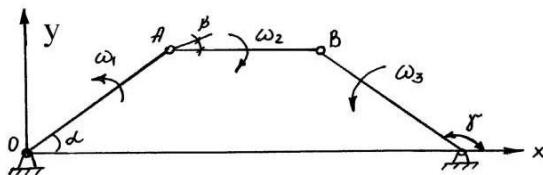


Рис. 2.26. Четырёхзвеный механизм

Дано: AO, AB, BC, OC

$$\omega_1 = \text{const}; \alpha = \psi(t)$$

Найти: v, ω

Решение

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB}; \quad \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \\ \overline{OB} &= OAe^{i\alpha} + AB e^{i\beta}; \quad \overline{OB} = OC e^{i0} + CB e^{i\gamma} \\ \frac{dOA}{dt} &= v_A = OA \frac{d\alpha}{dt} e^{i(\alpha+90)}; \quad v_A = OA \omega_1 \\ \omega_A &= OA \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 e^{i(\alpha-180)}; \quad \omega_A = OA \omega_1^2\end{aligned}$$

$$OA(\cos\alpha + i\sin\beta) + AB(\cos\alpha + i\sin\beta) = OC(\cos 0 + i\sin 0) + CB(\cos\gamma + i\sin\gamma)$$

$$\begin{cases} OA\cos\alpha + AB\cos\beta = OC + CB\cos\gamma \\ OA\sin\alpha + AB\sin\beta = CB\sin\gamma \end{cases}$$

Решая систему, находим β и γ , систему можно решить методом Ньютона.

Метод Ньютона заключается в следующем:

$$\begin{cases} \psi_1(\beta, \gamma) = AO\cos\alpha + AB\cos\beta - OC - CB\cos\gamma \\ \psi_2(\beta, \gamma) = AO\sin\alpha + AB\sin\beta - CB\sin\gamma \end{cases}$$

Задаемся начальным значением корней β , γ (в радианах), затем ищем поправки к корням $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, при заданной точности $\varepsilon = 0,0001$.

Берем значения корней $\beta_1 = \beta_0 + \Delta\beta$ и $\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta\gamma$.

Если $\Delta\beta \leq \varepsilon$ и $\Delta\gamma \leq \varepsilon$, то на печать выдаются корни β и γ .

Если $\Delta\beta > \varepsilon$ и $\Delta\gamma > \varepsilon$, находятся новые поправки.

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma, \beta) &= OA\sin\alpha + AB\sin\beta - CB\sin\gamma = 0 & F(\gamma, \beta) &= 0 \\ F(\gamma, \beta) &- OA\cos\alpha + AB\cos\beta - OC - CB\cos\gamma = 0 & \varphi(\gamma, \beta) &= 0 \\ \begin{cases} F(\gamma, \beta) = 0 \\ \varphi(\gamma, \beta) = 0 \end{cases} && &\end{aligned}$$

$\Delta\gamma$, $\Delta\beta$ — поправки

$$\begin{aligned}F(\gamma_0 - \Delta\gamma_1; \beta_0 + \Delta\beta_1) &= 0 \\ \varphi(\gamma_0 + \Delta\gamma_1; \beta_0 + \Delta\beta_1) &= 0 \\ F(\gamma_0 - \Delta\gamma_1; \beta_0 + \Delta\beta_1) - F(\gamma_0, \beta_0) &= 0 \\ \varphi(\gamma_0 + \Delta\gamma_1; \beta_0 + \Delta\beta_1) - F(\gamma_0, \beta_0) &= 0\end{aligned}$$

$$F(\gamma_0 + \Delta\gamma_1; \beta_0 + \Delta\beta_1) - F(\gamma_0, \beta_0) = \frac{\partial F_0}{\partial \gamma} \Delta\gamma_1 + \frac{\partial F_0}{\partial \beta} \Delta\beta_1;$$

$$\varphi(\gamma_0 + \Delta\gamma_1; \beta_0 + \Delta\beta_1) - \varphi(\gamma_0, \beta_0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \gamma} \Delta\gamma_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta} \Delta\beta_1$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \gamma} \Delta\gamma_1 + \frac{\partial F_0}{\partial \beta} \Delta\beta_1 = 0 \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \gamma} \Delta\gamma_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta} \Delta\beta_1 = 0$$

Найдем $\Delta\gamma_1; \Delta\beta_1$

Определяем скорость точки B

$$\frac{d\overline{OB}}{dt} = OA \frac{d\alpha}{dt} e^{i(\alpha+90)} + AB \frac{d\beta}{dt} e^{i(\beta+90)} = CB \frac{d\gamma}{dt} e^{i(\gamma+90)}$$

$$OA \frac{d\alpha}{dt} [\cos(\alpha+90) + i \sin(\alpha+90)] + AB \frac{d\beta}{dt} [\cos(\beta+90) + i \sin(\beta+90)] = CB [\cos(\gamma+90) + i \sin(\gamma+90)] \frac{d\gamma}{dt}$$

Аналитический метод. Аналитические методы исследования механизмов основаны на использовании приемов аналитической геометрии, тензорно-матричных операций, комплексных переменных. Нашли также применение векторные операции и винтовое исчисление, преимущества которых реализовывались за счет лаконичности обозначений.

Анализ различных аналитических методов показал, что наиболее эффективно векторное исчисление в кинематике механизмов (винтовое исчисление для более сложных задач), дающие возможность решать задачи кинематики механизмов в явной форме, что исключает необходимость решения алгебраических уравнений высоких степеней.

Построение планов скоростей и ускорений классическим методом механики. При классическом методе кинематического исследования сложное плоскопараллельное движение раскладывается на абсолютное и относительное движение, каждое из которых раскладывается на поступательное и вращательное движение.

$$\overline{v} = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA},$$

где \overline{v}_B — вектор скорости B , \overline{v}_A — вектор скорости A ; \overline{v}_{BA} — вектор скорости точки B вокруг точки A .

Пусть $|AB|$ — переменная величина,

$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} + \bar{v}_{2-1}$, где \bar{v}_{2-1} — скорость изменения отрезка АВ

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{BA} + \bar{\omega}_{2-1} + \bar{\omega}^k$$

Диск радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω , по ободу

диска скользит тело B со скоростью \bar{v}_B , найти $\bar{\omega}_B$?

\bar{v}_A — линейная скорость точки А обода; \bar{v}_B — линейная скорость тела В относительно обода

$$v = v_A + v_B ; \omega = \frac{v^2}{r} = \frac{v_A^2 + v_B^2}{r} ; \omega = \frac{v^2}{r} + 2\omega v_B + \frac{v_B^2}{r}$$

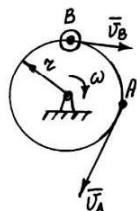


рис. 2.27. Диск радиуса r

Пример: Определим скорость и ускорение точек и звеньев четырехзвенного механизма?

Дано: OA, AB, BC, OC; $\omega_1 = \text{const}$

Найти: $v_A = ?$ $v_B = ?$ $v_D = ?$ $\omega_2, \omega_3 = ?$ $\epsilon_2, \epsilon_3 = ?$

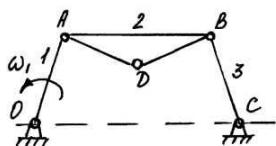


Рис. 2.28. Четырёхзвеный механизм

Решение

$$\text{Звено 1 } \bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO} \quad \bar{v}_A = \bar{v}_{AO} ; \quad v_A = OA \omega_1$$

?	O	$\perp AO$
?	O	$AO\omega_1$

$$\text{Звено 2 } \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$$

это уравнение решить нельзя, т.к. одно векторное уравнение содержит 3 неизвестных, а решаются только с 2-мя неизвестными

?	\perp_{AO}	\perp_{AB}
?	$AO\omega_1$?

$$\text{Звено 3 } \bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{CB} \quad \bar{v}_B = \bar{v}_{CB}$$

?	O	\perp_{CB}
?	O	?

$$\text{Звено 4 } \bar{v}_B = \bar{v}_{CB} = \bar{v}_B + \bar{v}_{BA}$$

?	\perp_{CB}	\perp_{OA}	\perp_{AB}
?	?	$AO\omega_1$?

Составим план скоростей.

Определяем масштаб скорости

$$\mu_v = \frac{v_A}{OA} \left[\frac{m}{c \times mm} \right]$$

Определяем скорости

$$oa \perp OA; v_A = oa\mu_v; ad \perp AD$$

$$oc \perp BC; v_{BC} = oc\mu_v; dc \perp DC$$

$$ac \perp AB; v_{BA} = ac\mu_v; ac \perp AB$$

$$\text{Угловые скорости } \omega_2 = \frac{v_{AB}}{AB} \quad \omega_3 = \frac{v_B}{BC}$$

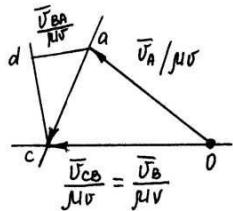


Рис. 2.29. План скоростей

Вычислим скорость точки D

$$\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{DA} = \bar{v}_B + \bar{v}_{DB}$$

	$\perp OA$	$\perp DA$	$\perp CB$	$\perp DB$
?	$OA\omega_1$?	$OC\mu v$?

$$od \times \mu v = v_D$$

Можно было при определении скорости точки D не составлять уравнение, а использовать подобие треугольников $\Delta adc \sim \Delta ABD$, т.к. стороны одного треугольника взаимно перпендикулярны сторонам другого — это теорема подобия.

Ускорения определяются следующим образом

$$\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_O + \bar{\omega}_{AO}; \quad \bar{\omega}_O = 0; \quad \bar{\omega}_{AO} = \bar{\omega}_{AO}^n + \bar{\omega}_{AO}^\tau; \quad \bar{\omega}_{AO}^n = \frac{v^2}{AO} = \omega_1^2 AO$$

$$\bar{\omega}_{AO}^\tau = AO\varepsilon_1; \quad \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = |\omega_1 = const| = 0; \quad \bar{\omega}_A \parallel AO$$

$$\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_{AO}^n \quad \bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{BA} = \bar{\omega}_C + \bar{\omega}_{BC}; \quad \bar{\omega}_C = 0; \quad \bar{\omega}_{BA} = \bar{\omega}_{BA}^n + \bar{\omega}_{BA}^\tau$$

$$\bar{\omega}_{BC} = \bar{\omega}_{BC}^n + \bar{\omega}_{BC}^\tau$$

Составим план ускорений

$$\text{Определим масштаб ускорений } \mu_{\omega} = \frac{\omega_A}{oa} = \frac{OA\omega_1^2}{oa} \left[\frac{M}{c^2 \cdot MM} \right]$$

$$\bar{\omega}_B = OB\mu \quad \bar{\omega}_A = OA\mu \quad \bar{\omega}_{BC}^n = OB_n\mu$$

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_n \mu \quad \bar{\omega}_{BA} = \bar{\omega}_n \bar{\omega}_B \mu \quad \bar{\omega}_{BC} = \bar{\omega}_n \bar{\omega}_B \mu$$

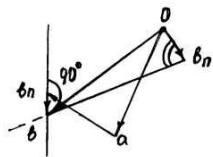


Рис. 2.30. План ускорений

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{BA} + \bar{\omega}_{BA} = \bar{\omega}_{BC} + \bar{\omega}_{BC}$$

?	$\parallel OA$	$\parallel BA$	$\perp BA$	$\parallel BC$	$\perp BC$
?	$OA\omega_1^2$	$AB\omega_1^2$?	$BC\omega_3^2$?
	$\frac{(oa)^2}{OA}$	$\frac{(ab)^2}{AB}$		$\frac{(bc)^2}{CB}$	

Для нахождения ускорения точки D воспользуемся теоремой подобия.

Согласно ей фигура на плане ускорений подобна фигуре на плане механизма, а оно, в свою очередь, жесткое.

Угловое ускорение второго и третьего звена будет

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_{AB}^2}{AB}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\omega_{BC}^2}{BC};$$

Кинематический анализ с использованием ЭЦВМ при классическом методе построения планов v и ω

Пример: Определить скорость и ускорение точек и звеньев механизма.

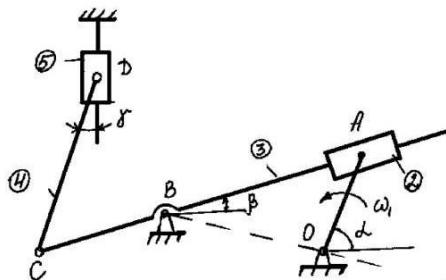


Рис. 2.31. Сложный механизм

Решение.

Из ΔAOB $BA = \sqrt{OB^2 + OA^2 + 2OA \times OB \cos \alpha}$ — по теореме косинусов

$$\frac{OA}{\sin \beta} = \frac{BA}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{BA}{\sin \alpha} \text{ — по теореме синусов}$$

$$\sin \beta = \frac{OA \sin \alpha}{BA}, \text{ затем определяем } \sin \gamma, \sin \alpha$$

Составляем план скоростей.

$$\bar{v}_{A_1} = \bar{v}_{A_3} + \bar{v}_{A_2-3}$$

$\perp OA$	$\perp BA$	$\parallel BA$
$OA\omega_1$?	?

$$\mu_v = \frac{v_{A_1}}{oa} = \frac{OA\omega_1}{oa}$$

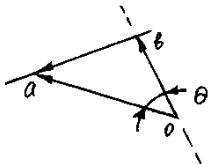


Рис.2.32. План скоростей

$$ov = oa \cos \theta; \quad av = oasin\theta \quad \mu ov = oa \cos \theta; \quad \mu av = oasin\theta$$

$$\mu ov = v_{B3}; \quad \mu av = v_{2-3}$$

$$v_{B3} = v_A \cos \theta; \quad v_{2-3} = v_{A_1} \sin \theta; \quad v_{B1} = OA\omega_1$$

Чисто геометрические соотношения находятся из треугольника, а затем решаются на ЭЦВМ, для чего: на плане механизмов для всех четвертей системы координат определяются углы между звеньями механизмов, используя теоремы косинусов и синусов; строим планы скоростей для каждой четверти из треугольников скоростей, используя теорему синусов, находим скорости; аналогично определяем ускорения; составляем программу.

Контрольные вопросы

- 2.1. Какова классификация кинематических пар.
- 2.2. Что такое группы Ассура?
- 2.3. В чем заключается графический метод анализа плоских механизмов.
- 2.4. В чем заключается графоаналитический метод анализа плоских механизмов.
- 2.5. Каковы методы построения планов скоростей и ускорений.

ЛЕКЦИЯ 3. КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

3.1. Кулакковые механизмы

Кулакковые механизмы применяются в автоматических устройствах.

Разделяются на плоские и пространственные.

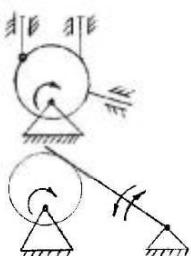


Рис. 3.1. Кулакковые механизмы

Вращательное движение преобразуется в возвратно-поступательное.

Вращательное движение преобразуется в возвратно-вращательное.

Возвратно-поступательное движение преобразуется в возвратно-поступательное и в возвратно-вращательное.

Силовое замыкание Геометрическое замыкание

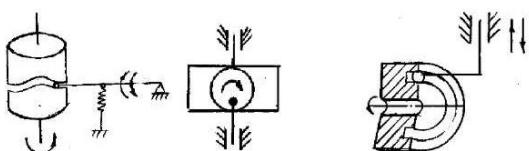


Рис.3.2. Разновидности кулакковых механизмов

Замыкание кинематической пары 4-го класса, т.е. пары толкатель-кулачок может быть силовым (пружина, вес) и геометрическим (ролик в пазу, кулачок в рамке)

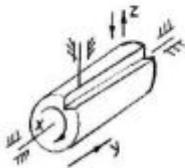


Рис. 3.3. Замыкание кулачковой пары

3.2. Кинематический анализ кулачковых механизмов

Удобнее всего анализ проводить кинематическим методом, для чего необходимо построить график перемещения толкателя, а затем, дифференцируя этот график, получить график скорости, а потом ускорения.

Рассмотрим кулачковый механизм (автомобиль)

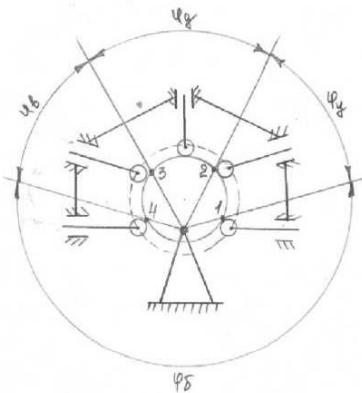


Рис. 3.4. Кулачковый механизм

Для построения графика перемещений необходимо рассмотреть обращенное движение (движение толкателя вокруг неподвижного кулачка в противоположную сторону движения кулачка). При таком движении из рисунка видно, что центр ролика описывает кривую, так называемую теоретический профиль кулачка (ТПК). Так как ролик — окружность, то теоретический профиль равнодален от практического профиля, по которому перекатывается ролик.

Различают 4 фазы движения толкателя:

- фаза ближнего стояния: центр толкателя перемещается по окружности, радиус шайбы $R_{\text{ш}}$ находится в самом ближнем положении к оси кулачка, этой фазе соответствует угол φ_b ,
- фаза удаления: толкатель удаляется от оси кулачка φ_y ,
- фаза дальнего стояния, толкатель неподвижен φ_d ,
- фаза возвращения φ_v ,

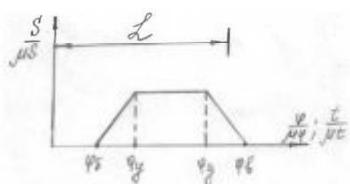


Рис. 3.5. Фазы движения толкателя: φ — угол поворота кулачка в радианах,

$$\varphi \mu = \frac{2\pi}{\lambda}; t \text{ — время, сек.}, \mu_t \text{ — масштаб времени (сек/мм)}, \mu_r = \frac{60}{n\lambda}; n \text{ — оборот кулачка в минуту}$$

3.3. Синтез кулачкового механизма с острым толкателем

При синтезе кулачкового механизма находится профиль кулачка, закон движения толкателя обычно задается. Для построения профиля кулачка необходимо знать радиус шайбы. Можно радиус шайбы выбрать произвольно. Однако от величины радиуса шайбы зависят размеры кулачка и легкость хода толкателя в направляющей, при определенном малом радиусе шайбы возможно заклинивание толкателя.

Зная коэффициент трения в направляющих, можно найти угол, обычно $\gamma > 45^\circ$

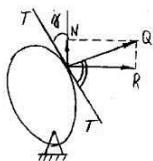


Рис.3.6. Распределение сил в кулачке: γ — угол передачи движения; Q — реакция в точке касания кулачка и толкателя; $R = Q \cos \gamma$; $N = Q \sin \gamma$;
 $\gamma \rightarrow 0, N \rightarrow 0, R \rightarrow 0$

Анализ угла передачи в кулачковом механизме $BD=OC$, $BC=OD$, $OD \perp BK$.

Возьмем произвольную точку на профиле кулачка B и к ней проведем касательную. Из точки B восстановим перпендикуляр BD , так чтобы отрезок $DO \perp BO$, затем построим параллелепипед $DBCO$, где $BCO = \gamma$.

Если задать BC для любого угла поворота кулачка, то можно одновременно вывести закон изменения угла передачи $f(\gamma)$

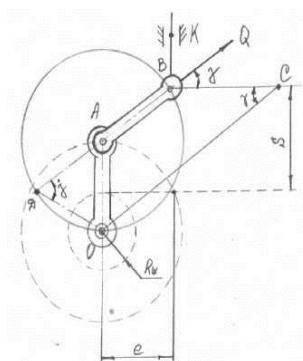


Рис. 3.7.Анализ угла передачи в кулачковом механизме

Найдем ВС: для этого заменим пару 4-го класса звеном АВ с двумя парами 5-го класса, после этого кулачковый механизм превратится кривошипно-шатунный.

Построим план скоростей

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$$

$\parallel BK$	$\perp OA$	$\perp BA$
$\frac{ds}{dt} = ?$	ωOA	?

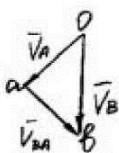


Рис. 3.8. План скоростей

Из подобия треугольников $\Delta ODA \sim \Delta oab$

$$DO \perp ob \quad DA \perp ab \quad OA \perp oa$$

$$\frac{oa}{OA} = \frac{ob}{OD}; \quad \frac{V_A}{OA} = \frac{V_B}{OD}; \quad OD \omega = \frac{ds}{d\phi} \text{ (аналог скорости) в масштабе } \omega_s$$

Дан кулачковый механизм. Найти для 8-ми положений угол передачи.

$$\text{Строим окружность шайбы } \mu\varphi = \frac{2\pi}{L}$$

$$\text{Графики перемещений скоростей } n = \frac{1}{\mu\varphi}$$

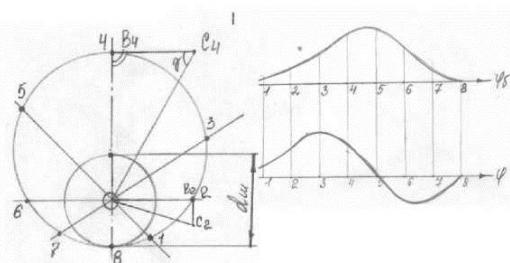


Рис. 3.9. Угол передачи кулачка.

Рассматривая графики и треугольники для построения угла передач, видим, что наименьший γ будет для треугольника $\tan \gamma = \frac{OB}{BC} = \min = \frac{r_{u+s}}{\frac{ds}{d\phi}}$. Если заданы $s=s(t)$ и γ_{min} , то можно найти r_u .

Синтез кулачкового механизма с учетом угла передач. Анализируя картину построения γ можно сделать заключение, что $\gamma_{min}=45^0$, тогда другие углы будут больше 45^0 .

Чтобы найти радиус шайбы, если известен график перемещения и построен график аналога скорости, очевидно, необходимо построить треугольник ОВС. Так как известно перемещение, то радиус шайбы найдется по формуле

$$r_u = \frac{ds}{d\phi} \tan \gamma_{min} - s$$

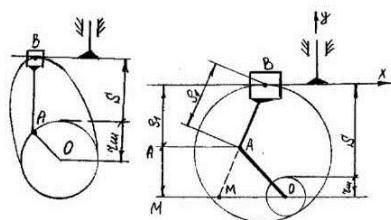


Рис.3.10. Синтез кулачкового механизма

Профиль для кулачка с плоским толкателем должен быть выпуклым. Для определения радиуса шайбы произведем замену пары 4-го класса на две 5-го класса звена АВ. Звено АВ должно находиться в центре кривизны одного и другого профиля.

У — кривизна толкателя находится в бесконечности. У — кривизна кулачка в точке А, поэтому отрезок АВ равен бесконечности, но при вращении звена АВ вокруг бесконечного радиуса, АВ будет совершать поступательное движение, поэтому в точке В образуют поступательную пару, а в точке А — вращательную. В результате звено АВ конечных размеров.

Построим план ускорений для механизма АОВ.
 $\omega = \text{const}$, ускорение $w_A = OA\omega^2$

$$w_A = w_C + w_{AC}$$

OA	YY	XX
OA ω^2	$d^2 s / dt^2 =$?	?

Из Δoac $AM = \frac{d^2 S}{w^2 dt^2} = \frac{d^2 S}{(wdt)^2} = \frac{d^2 S}{d\phi^2};$ $wdt=d\phi;$

$$\rho_1 = S + r - \frac{d^2 S}{d\phi^2} > 0$$

$$r > \frac{d^2 S}{d\phi^2} - S$$

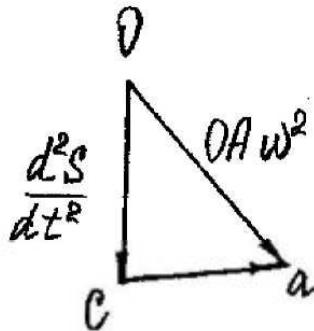


Рис. 3. 11. План ускорений

Контрольные вопросы

- 3.1. Каковы виды кулачковых механизмов.
- 3.2. В чем заключается анализ кулачковых механизмов.
- 3.3. Синтез кулачковых механизмов. Что такое угол передач?
- 3.4. Опишите порядок кинематического расчёта.
- 3.5. Каковы методы расчёта размерных цепей

ЛЕКЦИЯ 4. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

4.1. Основные параметры, необходимые для расчета зубчатых передач

К зубчатым передачам относятся: цилиндрические, конические, червячные. Зубчатые передачи используют в большинстве машин и приборов для согласования движения в широком диапазоне мощностей (до 100 тыс. Квт.) и скоростей (до 200 м/с). высокий КПД (0,97...0,98).

Профиль поверхности зуба может быть очерчен различными видами кривых. В машиностроении применяются колеса, у которых поверхность зуба очерчена по эвольвенте, в связи с тем, что эвольвента отражает все основные требования, которые предъявляются законами теории машин и механизмов; O, O_1, O_2 — эвольвенты (развертка) основной окружности диаметром d . Для построения профиля зуба можно использовать различные участки эвольвенты. Использование различных частей эвольвенты называется — корректированием зубчатых колес. Согласно этому зубчатые колеса могут быть некорректированные и корректированные. У некорректированных зубчатых колес начальный и делительный диаметры совпадают, $d_w = d$.

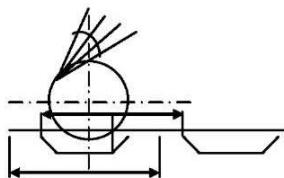


Рис. 4.1. К построению эвольвенты

На делительной окружности p — шаг, z — число зубьев на шестерне и колесе, $d = (zp)/\pi$ — диаметр делительной окружности, $d = z \cdot p / \pi$; где $p / \pi = m$ — модуль зацепления

$$d = m \cdot z \quad (4.1)$$

Для шестерни и колес, находящихся в зацеплении, модуль обязательно одинаков $d_1 = m \cdot z_1$, где z_1 — число зубьев шестерни. $d_2 = m \cdot z_2$, где z_2 — число зубьев колес.

Высота головки зуба $h_a = m$ — высота головки зуба. $h_f = 1,25m$ — высота ножки зуба, $h = 2,25m$

$$d_a = d + 2m \quad (4.2)$$

Для некорректированных зубчатых колес

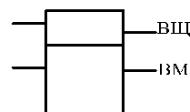
$$d_f = d - 2,25m \quad (4.3)$$

Преимущество зубчатых передач: относительно малые размеры, высокий КПД, долговечность и надежность, простота передаточного числа.

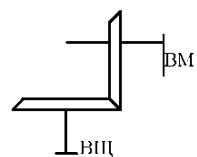
Недостатки: необходимость высокой прочности.

Классификация зубчатых передач:

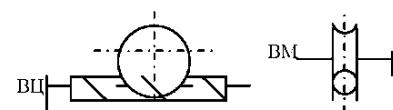
- По взаимному расположению осей валов



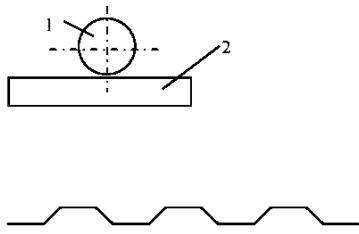
a) с параллельными валами при помощи цилиндрических зубчатых колес.



б) с пересекающимися осями при помощи конических зубчатых колес.



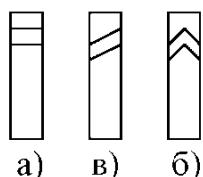
в) с перекрывающимися осями (гиперболические передачи, червячная передача, винтовая, гипоидные).



1 — зубчатое колесо; 2 — зубчатая рейка

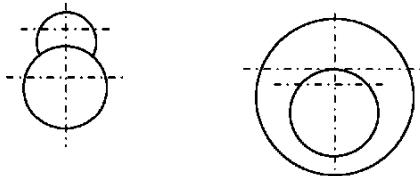
г) передача для преобразования вращательного движения в поступательное.

- По форме колес звездчатые колеса могут быть с прямым, косым, винтовым и шевронным зубом.



- По виду зацепления.

а) с внешним зацеплением б) с внутренним зацеплением



- По форме профиля зуба: с эвольвентным, круговым (передача Новикова), циклоидальным профилями.

• По характеру вращения передачи могут быть: рядовые, планетарные или дифференциальные, у которых из звездчатых колес по мимо вращения вокруг собственной оси, оси вращаются вокруг общей оси передач.

- По числу ступеней. 1, 2-х и многоступенчатые.

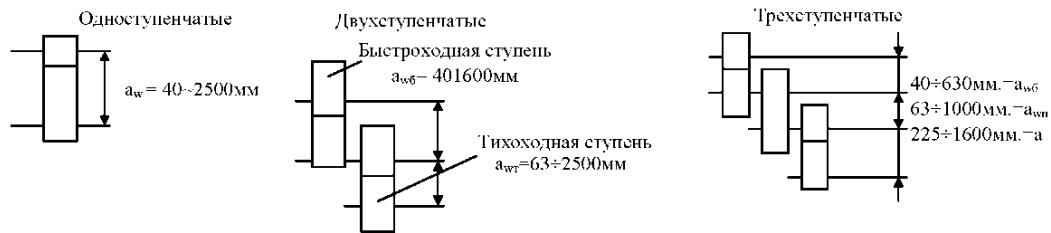
- По оформлению корпуса передач: открытые и закрытые.

- По окружной скорости, если окружная скорость $V \leq 0,5$ м/сек. — передачи весьма тихоходные. $V = 0,5 \dots 3$ м/сек. — тихоходные. $V = 3 \dots 15$ м/сек. — скоростные. $V > 15$ м/сек. — быстроходные.

- По степени точности изготовления, ГОСТом предлагаются 12 степеней точности: наиболее широко распространена в машиностроении 7,8 степень точности.

Основные параметры зубчатых колес: межосевое расстояние; модуль; передаточное число; суммарное число зубьев; угол наклона зубьев; ширина зубчатых колес.

Межосевое расстояние ГОСТ 2185-66.



Модуль: регламентируется ГОСТом 9563-60, для редукторных передач модуль $m = 1 \dots 30$ мм.

Ширина зубчатых колес

$$B_w = \psi_{ea} a_w, \quad (4.4)$$

ψ_{ea} — коэффициент зубчатого колеса по межосевому расстоянию,

$\psi_{ea} = 0,125 \dots 0,25$ — прямозубые. $\psi_{ea} = 0,25 \dots 0,4$ — косозубые.

ψ_{eo} — коэффициент ширины по диаметру.

$$D = 2a/u + l, \text{ тогда } \psi_{eo} = 0,5 \psi_{ea} (u+1).$$

Передаточное число регламентируется ГОСТом 2185-66.

$$u = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = z_1 / z_2, \quad (4.5)$$

где ω_1 — угловая скорость шестерни, ω_2 — угловая скорость колеса, n_1 — частота вращения шестерни; n_2 — частота вращения колеса, z_1 — число зубьев шестерни, z_2 — число зубьев колеса, u — передаточное число, для одноступенчатых передач 1...12,5; для двухступенчатых передач 8...63; для трехступенчатых передач 63...400.

Суммарное число зубьев

$$z_{\Sigma} = z_1 + z_2 \quad (4.6)$$

На зубчатом колесе без подрезания можно нарезать не менее 17 зубьев, $z_{\min}=17$. По геометрическим и конструкторским соображениям колесо имеет не менее 13 и не более 130 зубьев.

Угол наклона зубьев для косозубых передач $\beta = 8\dots 20^{\circ}$, для шевронных передач $\beta = 25\dots 40^{\circ}$.

4.2. Особенности геометрии косозубых цилиндрических зубчатых колес

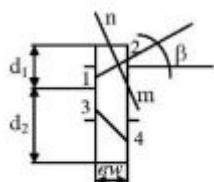


Рис.4.2. Геометрия косозубых цилиндрических зубчатых колес

При вращении зубчатых колес зубья косозубого колеса входят в контакт не сразу по всей длине, а начиная с 1 и 3 к 2 и 4. При нормальном сечении n - m профиль косого зуба совпадает с профилем прямого зуба.

Модуль должен быть стандартным. В торцевом сечении параметры косого зуба находятся в зависимости от угла наклона зуба, p_t — шаг в торцевом сечении, p_n — шаг в нормальном сечении.

$$m_t = m_n / \cos \beta \quad (4.7)$$

$$p_t = p_n / \cos \beta \quad (4.8)$$

Диаметр делительной окружности

$$d = m_t z = m_n / \cos \beta \cdot z \quad (4.9)$$

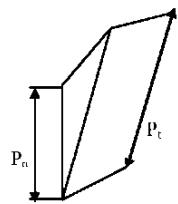
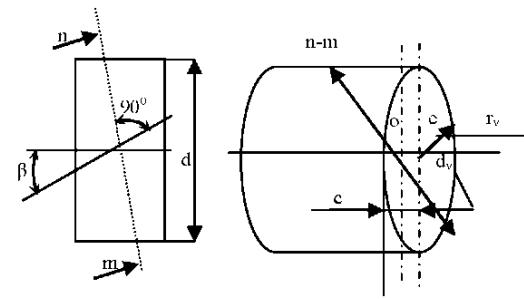


Рис. 4.4. Особенности геометрии косозубых передач

Прочность зуба определяется размером и формой зуба в нормальном сечении. Принимаем форму косого зуба в нормальном сечении через параметры эквивалентного или приведенного зубчатого колеса.

В нормальном сечении к зубу образуются эллипс с полуосями

$$c = d / 2; \quad e = 0,5 d / \cos \beta;$$

$r_v = e^2 / c = d / 2 \cos^2 \beta$ — радиус кривизны эллипса.

$$D_v = 2r_v = d / \cos^2 \beta \quad (4.10)$$

Число зубьев приведенного зубчатого колеса.

$$z_v = d_v / m_n = d / m_n \cos^2 \beta = m_t z / m_n \cos^2 \beta = z / \cos^3 \beta \quad (4.11)$$

С увеличением угла наклона β эквивалентные параметры возрастают, увеличивается прочность передач. Применим угол наклона $\beta = 20^\circ$, $D_v = 1,13d$; $z_v = 1,2d$. Увеличение приведенных параметров эквивалентных прямозубых колес для косозубых колес является причиной повышения прочности в цилиндрическом зубчатом колесе косыми зубами.

В связи с тем, что в косозубых зубчатых передачах зубья входят в зацепления не сразу, а постепенно, поэтому они обладают большой плавностью

хода, меньшим шумом и поэтому их надо применять в быстроходных зубчатых передачах. Угол наклона β зуба назначают в пределах $8\dots20^0$, для шевронных — $\beta < 40^0$.

Усилия, которые действуют в прямозубых зубчатых передачах, следующие

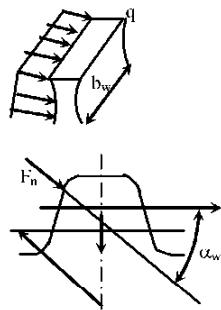


Рис. 4.5. Усилия, действующие на зуб: b_w — ширина зубчатого колеса, q — удельная нагрузка, распределенная по линии контакта зубьев, F_n — полное усилие, действующее на зуб, α_w — угол зацепления.

Разложим F_t — тангенциальное или окружное усилие.

F_r — радиальное усилие.

$$F_t = 2T/d; \text{ где } T \text{ — крутящий момент, } T = F_t d / 2 \quad (4.12)$$

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_w; \quad F_n = F_t / \cos \alpha_w \quad (4.13)$$

Усилия, действующие в косозубых и шевронных передачах.

Вследствие того, что в косозубых зубчатых передачах зуб наклонен под углом β , поэтому в косозубых зубчатых передачах дополнительно возникает осевое усилие.

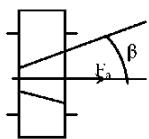


Рис. 4.6. Усилие осевое в косозубой передаче

$$T = 9550 P / n; (\text{Нм}), \text{ где } P \text{ — мощность (КВт)} \quad (4.14)$$

$$F_t = 2T_1 / d_1 \quad (4.15)$$

$$T_a = F_t \operatorname{tg} \beta, \quad \beta = 8^0 \div 20^0 \quad (4.16)$$

Одним из недостатков косозубых зубчатых передач является возникновение осевого усилия. Причем с увеличением угла наклона зубьев это усилие растет.

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_w / \cos \beta; \quad F_n = F_t / \cos \beta \cos \alpha_w, \quad (4.17)$$

α_w — угол зацепления в нормальном сечении; β — $25^0 \dots 40^0$.

Шевронная передача.



Рис. 4.7. Шевронная передача б)

Шевронные зубчатые колеса применяют в тяжело нагруженных зубчатых передачах.

4.3. Основы расчета зубчатых передач на прочность

При расчете зубчатых передач на прочность необходимо за расчетную нагрузку принимать максимальное значение удельной нагрузки распределенной по линии контакта зубьев. При этом учитывая ряд дополнительных обстоятельств

$$g_{ka} = (F_n / L_\Sigma) K_\beta K_v K_\alpha, \quad (4.18)$$

где K_α — коэффициент, учитывающий одновременное участие в передаче нагрузки нескольких пар зубьев; K_β — коэффициент, учитывающий распределение нагрузки по ширине венца; K_v — коэффициент динамической нагрузки; L_Σ — суммарная длина контактных линий.

$$L_{\Sigma} = (b_w / \cos \beta) / K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha}, \quad (4.19)$$

где b_w — ширина зубчатого колеса; β — угол наклона зубьев; K_{ε} — коэффициент, учитывающий перекрытие зубьев; ε_{α} — коэффициент торцевого перекрытия.

$$g = (F_t / K_{\beta} \cos \beta K_v K_{\alpha}) / \cos \beta \cos \alpha_w b_w K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha} \quad (4.20)$$

— удельная расчетная окружная сила

$$w_t = (F_t / b_w) / K_{\beta} K_v K_{\alpha}, \quad (4.21)$$

где F_t — окружная сила.

$$g = w_t / K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha} \cos \alpha_w, \quad (4.22)$$

где K_{α} — коэффициент неравномерности распределения нагрузки, K_a — коэффициент динамической нагрузки, K_{α} — коэффициент, учитывающий распределение нагрузки между зубьями (сколько пар зубьев в зацеплении одновременно).

Контрольные вопросы

4.1. Каким профилем может быть очерчена поверхность зуба?

4.2. Что называется корректированием зубчатых колес?

4.3. Как называется отношение $p / \pi = m$?

ЛЕКЦИЯ 5. КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ

5.1. Задачи динамического исследования механизмов и машин

При расчёте звеньев механизма на прочность необходимо знать все силы, которые действуют на каждое звено. Силы, действующие на звено, можно разделить на внешние силы и внутренние силы. К внешним силам, приложенным к звену, относятся: силы веса, силы инерции, силы полезного и вредного сопротивления, движущие силы, а также реакции в кинематических парах.

Силы полезных и вредных сопротивлений определяются технологической и конструктивной схемой механизма. Силу трения в кинематических парах можно найти только после определения реакций при внешнем трении. При внутреннем трении силы трения находятся по заданной скорости относительного движения трущихся поверхностей.

Силы веса при первом расчёте неизвестны, так как неизвестна конфигурация звена. Силами веса задаются на основании опыта, либо прикидочных расчётов без учёта веса. После задания веса звена находим силы инерции и моменты от сил инерции. Силы инерции и моменты от них можно найти только после построения плана ускорений, который можно построить, если известен закон движения ведущего звена. Однако часто он не известен, поэтому в таком случае нужно решить задачу динамики для всего механизма, используя уравнение Лагранжа.

После определения сил инерции, моментов и других сил, приступают к определению реакций в кинематических парах, для чего используют принцип Даламбера (любую движущуюся систему взаимосвязанных тел можно рассматривать как неподвижную (статическая задача), если к этой системе приложить все силы, включая и силы инерции).

Для нахождения неизвестной реакции необходимо рассматривать равновесие сил, приложенных к статически определённой цепи. Статически определённая кинематическая цепь — группа Ассура.

5.2. Силы инерции звена

Во время работы механизма отдельные звенья совершают движение с ускорением. Принцип Даламбера позволяет применить к телу, движущемуся с ускорением, уравнения статики или ко всем действующим на данное тело силам добавить силы инерции.

При плоскопараллельном движении различные материальные точки звена имеют различные ускорения. К каждой материальной точке должна быть приложена элементарная сила инерции

$d\bar{P}_i = -\bar{w}_i dm$, таким образом, получается система элементарных сил инерции, которая, как всякая система компланарных сил, может быть сведена к одной результирующей силе и одной результирующей паре сил относительно центра масс звена S . При расчётах на прочность инерционная нагрузка должна рассматриваться как распределённая.

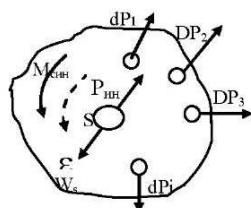


Рис. 5.1. Силы инерции звена

Величина результирующей силы инерции определяется

$$\bar{P}_{in} = -m\bar{w}_s, \quad (5.1)$$

результирующая пара звена имеет момент

$$M_{in} = -\varepsilon Y_C, \quad (5.2)$$

где величина Y_C представляет массовый момент инерции звена относительно оси, \perp к плоскости движения и проходящей через центр масс C (S). Величина момента инерции определяется $Y_C = \int_m \rho^2 dm$.

Силы инерции механизма, совершающего вращательное движение

(случай неуравновешенных звеньев, когда центр тяжести не совпадает с осью вращения).

:

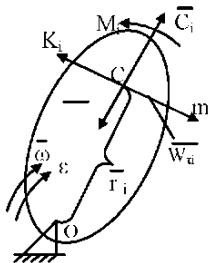


Рис. 5.2. Силы инерции механизма: \bar{C}_i – нормальная сила инерции центробежная, $\bar{C}_i = -m_i \bar{W}_i$; $\bar{C}_i = -m_i \omega^2 \bar{r}_i$; \bar{K}_i – касательная сила инерции, $\bar{K}_i = -m_i \bar{W}_i$; $\bar{K}_i = -m_i \epsilon \bar{r}_i$

Центробежные силы приведём к одному центру, получим пучок сил

$$\begin{cases} \bar{C} = -\sum \bar{C}_i \\ \bar{C} = -\sum m_i \omega^2 \bar{r}_i, \\ \bar{C} = -\omega^2 \sum m_i \bar{r}_i \end{cases} \quad (5.3)$$

$m \bar{r}_c = \sum m_i \bar{r}_i$; $\bar{C} = -\omega^2 m \bar{r}_c$; m.e. $\bar{C} = -m \bar{W}_n$, m.e. произведение массы на ускорение центра тяжести.

Приведём к центру вращения касательные силы инерции

$$\begin{aligned} M_i^y &= -m_i \epsilon \bar{r}_i = -m_i \epsilon \bar{r}_i^2 \\ M^y &= -\sum m_i \bar{r}_i = -\epsilon \sum m_i \bar{r}_i^2 \underbrace{\sum m_i \bar{r}_i^2}_{Y_0} = Y_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} M^y &= \epsilon Y_0 \\ \bar{K}_i &= -m_i \epsilon \bar{r}_i; K = -\epsilon \sum m_i \bar{r}_i, K = -\epsilon m \bar{r}_c \\ \bar{T} &= \bar{k} + \bar{c}, h = \frac{M_y}{T} - \text{плечо пары сил} \end{aligned}$$

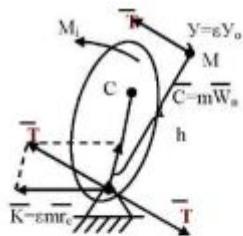


Рис. 5.3. Приведение сил инерции к центру вращения

Приведение сил к центру тяжести

$$\begin{cases} M = M^y - M(K) \\ M = \epsilon Y_0 - \epsilon m \bar{r}_c^2 \end{cases}, \quad (5.5)$$

$M(K)$ — момент от силы \bar{K}

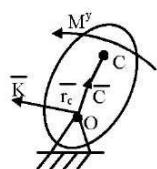


Рис 5.4. Приведение сил инерции к центру тяжести

$Y_0 = Y_c + m \bar{r}_c^2$ — параллельный перенос Гюйгенса-Штейнера

$$M = \epsilon(Y_c + m \bar{r}_c^2) - \epsilon m \bar{r}_c^2 = \epsilon Y_c. \quad (5.6)$$

Случай, когда центр тяжести совпадает с центром вращения;

$$r_c = 0; \bar{K} = 0; \bar{C} = 0; M^y = \epsilon Y_c; \epsilon = 0; \bar{K} = 0; \bar{C} = 0; M^y = 0$$

Силы инерции звеньев, совершающих поступательное движение.

Все точки тела совершают поступательное движение

$$\bar{Y}_i = -m_i \bar{W}_i, Y_c = -m \bar{W}_c \quad (5.7)$$

Пример: Силы инерции звеньев, совершающих сложно-плоское движение, $\bar{Y}_B = -m_B \bar{W}_c$

\bar{W}

\bar{U}

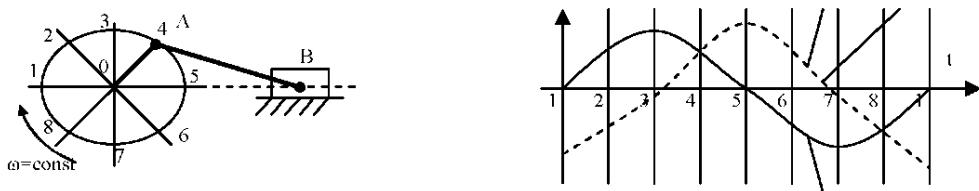


Рис.5.5. Кривошипно - шатунный механизм

$\bar{Y}_B(t)$ – из графика сил инерции

$\bar{U}(t)$ – из графика скорости

$\bar{W}(t)$ – из графика ускорения

$$\bar{Y}_B = m_B z_B \mu_W; \bar{Y}_B = z_B \mu_{yB}; \mu_{yB} = m_B \mu_W$$

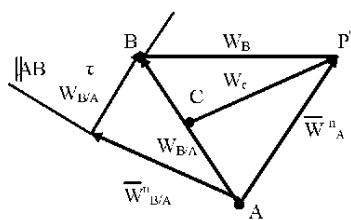


Рис 5.6. График ускорений

Силы инерции звеньев, совершающих сложно-плоское движение

$$\begin{cases} \bar{Y}_c = -m \bar{W}_c \\ \bar{C} = m \omega^2 \bar{r}_c \\ \bar{K}_y = m \dot{e} r_c \\ \bar{M}^y = \epsilon \bar{Y}_0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Силы инерции звена, совершающего сложно-плоское движение

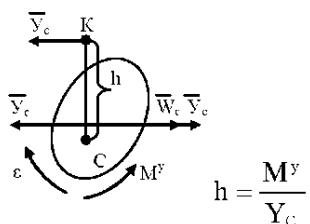


Рис 5.7. Силы инерции звена, совершающего сложно-плоское движение

Пример: Определить силу инерции и плечо, куда надо приложить силу для кривошипа шатунного механизма.

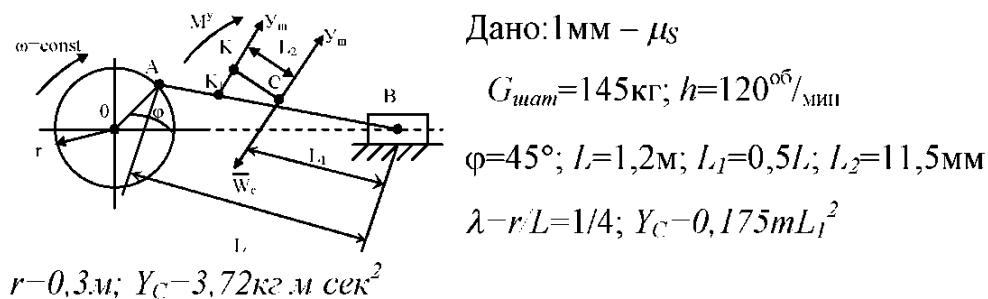


Рис 5.8. Кривошипно - шатунный механизм

Построим план ускорений

$$W_A^n = \frac{v^2}{z} = 47,5 \text{ м/сек}^2; W_B = W_A + W_{B/A}^n + W_{B/A}^t$$

$$Y_{mam} = \frac{G}{g} \quad W_C = 600 \text{ кг}; \quad M^y = \epsilon Y_C$$

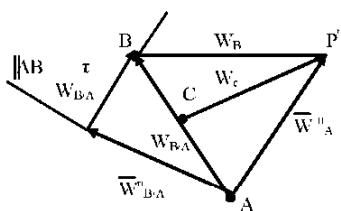


Рис 5.9. План ускорений

$$Y_{mam} = \frac{G}{g} \quad W_C = 600 \text{ кг}; \quad M^y = \epsilon Y_C$$

$$\epsilon = \frac{W_{B/A}^t}{L_{B/A}} = 27,7 \text{ 1/сек}^2; h = \frac{27,7 \cdot 3,72}{600} = 0,172 \text{ м}$$

$$z_h = \frac{h}{\mu_s} 11,5 \text{ мм}$$

Упрощенный способ определения сил инерции звена, когда

всё звено считается невесомым, а массы распределяются в определённых точках (сосредоточены в шарнирах).

$$\left. \begin{array}{l} m_A + m_B = m \\ m_A \cdot L_A = m_B L_B \end{array} \right\} \text{— необходимые условия}$$

$$m_A = m \frac{L_B}{L}; m_B = \frac{L_A}{L}$$

$$P_u = mW_C = m\omega^2\rho_0$$

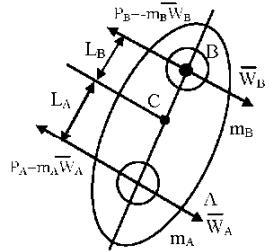


Рис 5.10. Определение сил инерции

$$1) M^y = \varepsilon V_C = \varepsilon m \rho_0 - \text{массы сосредоточены}$$

$$P_u = (m_A + m_B)W_C; M^y = \varepsilon m_A L_A^2 + \varepsilon m_B L_B^2;$$

$$M^y = \varepsilon m \left(\frac{L_A^2 L_B^2}{L} + \frac{L_B^2 L_A^2}{L} \right)$$

$$1) M^y = \varepsilon m L_A^2 L_B^2 \left(\frac{L_A^2 + L_B^2}{L} \right) - \text{массы рассредоточены} \left(\frac{L_A^2 + L_B^2}{L} \right) = 1$$

Практически $\sqrt{L_A^2 L_B^2} \approx \rho_0$, если вычесть 1 из 1, то $M_{\text{доп}} = \varepsilon m (L_A L_B - \rho_0^2)$

$$\left. \begin{array}{l} m_A + m_B = m \\ m_A \cdot L_A = m_B L_B \\ m_A \cdot L_A^2 + m_B \cdot L_B^2 = V_C \end{array} \right\} \text{— необходимые условия}$$

$$m_A = \frac{V_C}{L_A L}; m_B = \frac{V_C}{L_B L}; m_C = m - \frac{V_C}{L_A L_B} \quad (5.9)$$

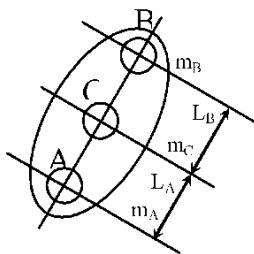


Рис 5.11. Определение точки приложения инерционной силы

Разложим $M^y = P'_{un} h = Y\varepsilon \Rightarrow h = M^y / P'_{un}$

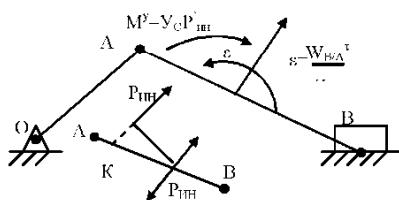


Рис. 5.12. Определение точки приложения инерционной силы

Практические способы определения моментов инерции звеньев. Метод маятникового подвеса

Отклоняя на $\phi = 6\dots 80^\circ$ приведённую массу m_{np}

$$M = Gx, \quad M = Ph \cos \phi, \quad \text{при } \cos \phi = 1,$$

$$\text{Момент инерции } Y_0 = m_{np} H^2,$$

$$PH = Gx \Rightarrow P = \frac{G}{H}x \Rightarrow cx,$$

т.к. ϕ — мал, точка C колеблется по прямой

$$m_{np} \frac{d^2x}{dt^2} = -P$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m_{np}}x = 0 \quad x = a \sin(kt + \alpha) \quad \frac{C}{m_{np}} = K^2$$

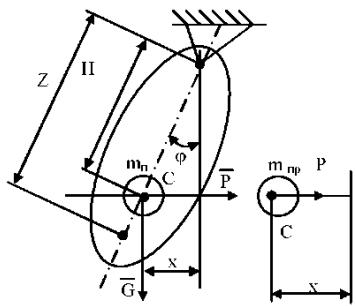


Рис 5.12. Определение момента сил инерции

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{np}}{c}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{Y_c H}{H^2 G}}; Y_0 = \frac{T^2 GH}{4\pi^2}$$

$$\tau = \frac{T}{2}; Y_0 = \frac{\tau^2 GH}{\pi^2}; Y_0 = 0,1 GH \tau^2; Y_0 = Y_c + \frac{G}{g} H^2$$

$$\text{Делают 1-й подвес: } Y_c = \frac{\tau^2 GH}{\pi^2} H^2 \frac{G}{g}; Y_c = \frac{GH}{\pi^2} \tau^2 - H^2 \frac{G}{g}$$

$$\text{Делают 2-й подвес: } Y_c = \frac{G(Z-H)}{\pi^2} \tau^2 - (Z-H)^2 \frac{G}{g}$$

$$H = Z \frac{\left(\frac{\tau_2}{\pi}\right)^2 - \frac{Z}{g}}{\left(\frac{\tau_2}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{\tau_1}{\pi}\right)^2 - 2 \frac{Z}{g}}$$

Порядок опытного определения момента инерции тела:

подвесить деталь, отклонить на угол 8° , замерить время 25 полных колебаний, повторить 2 ... 3 раза, найти среднее значение времени, подсчитать $\tau_1 = \frac{t_{ep}}{25 \cdot 2}$ (полупериод), замерить расстояние между точками подвеса, взвесить деталь, найти Y_0 , Y_c .

Опытное определение момента инерции тела, подвешенного на двух нитях

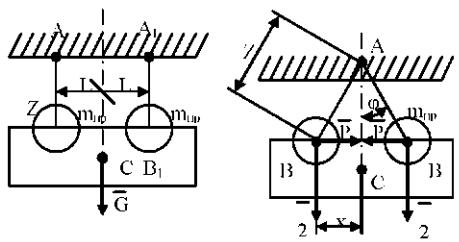


Рис 5.13. Опытное определение момента инерции

$$M = \frac{G}{2}x; M = PZ \cos \varphi; \frac{G}{2}x = PZ \cos \varphi;$$

$$\frac{G}{2}x = PZ \quad (\cos \varphi = 1)$$

$P = \frac{G}{2Z}x$ – это гармоническое колебание

$$Y_C = 2m_{np}L^2; m_{np} \frac{d^2x}{dt^2} = -P; m_{np} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G}{2Z}x$$

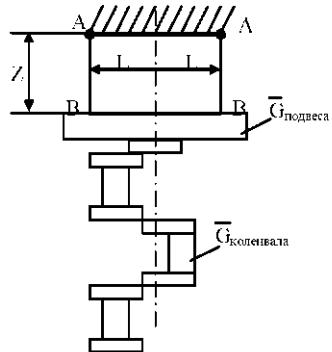


Рис 5.13. Определение момента сил инерции коленчатого вала

$$C = \frac{C}{2Z}; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m_{np}}x = 0; \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0; T = \frac{2\pi}{k}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{np}}{C}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{Y_C 2Z}{2L^2 G}}; T^2 = 4\pi^2 \frac{Y_C 2Z}{2L^2 G}$$

$$Y_C = \frac{\tau^2 L^2 G}{\pi^2 Z}; Y_C = 0,1 \frac{\tau^2 L^2 G}{Z} \quad (5.11)$$

Опытное определение момента инерции коленчатого вала.

$$Y_{C \text{ подвеса}} = \frac{\tau^2 L^2 G_{\text{подв}}}{\pi^2 Z_{\text{подв}}} \quad (5.12)$$

$$Y_{C \text{ общ}} = \frac{\tau^2 L^2 G_{\text{общ}}}{\pi^2 Z_{\text{общ}}} \quad (5.13)$$

$$Y_{C \text{ коленвала}} = Y_{C \text{ общ}} - Y_{C \text{ подвеса}}$$

5.3. Определение внешних сил и реакций связей методами кинетостатики

Для механизмов известны ускорения всех точек и угловые ускорения всех звеньев , если исследованию подлежит уже построенный и работающий механизм, то в этом случае скорости и ускорения могут быть определены , например, опытным путём.

При проектировании механизма дело обстоит иначе. В этом случае известны желательные значения скорости и ускорения какого-либо звена механизма в различных его положениях. При такой постановке задачи нельзя задавать все внешние силы, действующие на механизм. Так как движение механизма задано, тем самым определены силы инерции. Если задать произвольно и все внешние силы, то условия равновесия статики для этих сил выполняться не могут. Поэтому внешние силы должны определяться из условия, чтобы они уравновешивали эти силы.

Сила или пара сил, уравновешивающая все другие силы и пары сил, называется уравновешивающей силой или уравновешивающей парой сил. Если механизм имеет несколько степеней свободы, то для его равновесия необходимо столько уравновешивающих сил или пар сил, сколько имеется степеней свободы.

Пример: Определить реакции в кинематических парах многозвенного механизма графоаналитическим методом.

Дано: ОА; АВ; ВС; ОС.

m_2, m_3 — массы звеньев 2 и 3.

M_c — момент сил сопротивления.

ω_1 — угловая скорость 1-го звена.

Найти: Реакции в кинематических парах и движущий момент.

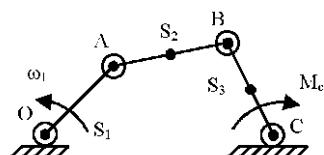


Рис. 5.15. Многозвеный механизм

Решение

1. Построение плана скоростей

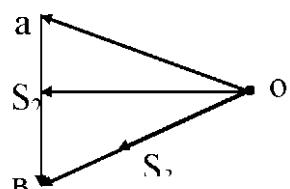


Рис. 5.16. План скоростей

$$\begin{array}{c|c|c}
 \perp BC & \perp OA & \perp BA \\
 \hline
 ? & OA \cdot \omega_1 & ?
 \end{array}$$

$$V_{S_2} = OS_2; \quad \omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB}; \quad V_{S_3} = OS_3; \quad \omega_3 = \frac{V_B}{BC}$$

2. Построение плана ускорений

$$W_B - W_{BC}^n \cdot W_{BC}^t - W_A \cdot W_{BA}^n \cdot W_{BA}^t$$

	$\parallel BC \searrow$	$\nearrow \perp BC$	$\parallel OA \swarrow$	$\parallel BA \leftarrow$	$\perp BA$
?	$\frac{V_B^2}{BC}$?	$OA\omega^2$?

$$MW - W_A/OA; W_B - OB; W_{BC}^t = \epsilon^n \cdot \epsilon.$$

$$W_{BA}^t = \epsilon^n \cdot \epsilon; W_{S2} - OS_2; W_{S3} - OS_3$$

$$\epsilon = \frac{W_{BA}^t}{BA}; \quad \epsilon = \frac{W_{BC}^t}{BC}$$

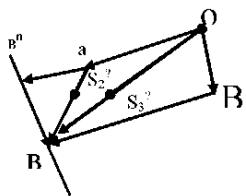


Рис.5.17. План ускорений

3. Определим силы инерции и моменты от сил инерции

$$\bar{F}_2 = -m_2 \bar{W}_{S2}; \quad \bar{F}_3 = -m_3 \bar{W}_{S3}; \quad \bar{M}_2 = -\bar{\epsilon}_2 V_2; \quad \bar{M}_3 = -\bar{\epsilon}_3 V_3$$

$$Y_2 = \frac{m_2 BA^2}{12}; \quad Y_3 = \frac{m_3 BA^2}{12}$$

4. Находим вес звеньев

$$G_2 = m_2 g; \quad G_3 = m_3 g$$

5. Разбиваем механизм на группы Ассура и прикладываем все силы

В центре масс прикладываем силы веса \bar{G}_2 и \bar{G}_3 , и силы инерции \bar{F}_2 и \bar{F}_3 .

Силы инерции направляем обратно ускорениям центра масс. Определяем направление угловых ускорений ε_2 и ε_3 , для чего рассматриваем направление тангенциальных ускорений точки В вокруг А и точки С вокруг С. Тангенциальное ускорение и стрелка для углового ускорения должны совпадать по направлению. В обратные стороны направлены моменты сил инерции.

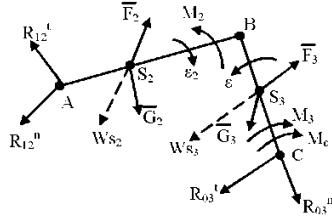


Рис.5.18. Силы инерции и моменты от сил инерции

Определение внешних сил методом кинетостатики. К шарнирам в точках А и В прикладываем неизвестные реакции, которые раскладываем по двум составляющим, одна направлена вдоль звена, другая перпендикулярно звену. Реакция вдоль звена — нормальная реакция, реакция перпендикулярная звену — тангенциальная реакция.

Составляем уравнения суммы моментов сил относительно точки А и В, считая, что звенья 1 и 2 уравновешены силами

$-R'_n AB - F_2 L_2 + G_2 h_2 + M_2 / \mu L = 0$, где h_2, L_2 — кратчайшее расстояние от точки В до линии действия сил F_2 и G_2 .

$$R'_{0,3} = \frac{F_3 L_3 M_3 - M_C - G_2 h_3}{BC}$$

$$\bar{R}_{12}^n = \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{G}_2 + \bar{F}_3 + \bar{G}_3 + \bar{R}'_{03} + \bar{R}_{03}^n = 0;$$

\bar{R}_{12}^n — известно только направление

Реакция в точке В

Равновесие сил звена АВ

$$R_{12} + R_2 + G_2 + R_{32} = 0$$

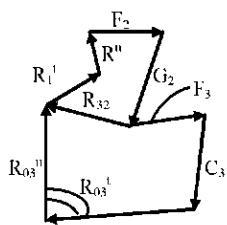


Рис. 5.19. План сил

Нахождение движущего момента $M_o = R_{21}L$,

где L — плечо действия силы

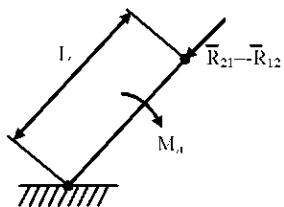


Рис. 5.20. Приведение сил к одному центру

Силовой расчёт 2x поводковой группы

$$\bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{1/2} + \bar{P}_{4/3} = 0$$

$$\bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{1/2}^h + \bar{P}_{4/3}^h + \bar{P}_{4/3}^\tau = 0$$

Разделим на μ_p

$$Z_2 + Z_3 + Z_{1/2}^h + Z_{1/2}^\tau + Z_{4/3}^h + Z_{4/3}^\tau = 0$$

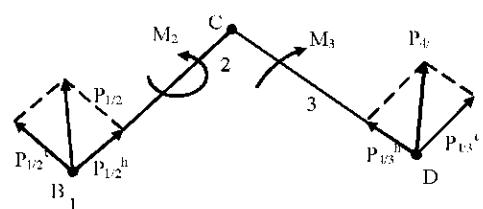


Рис. 5.21. 2-х поводковая группа

$$\sum M_c = M(P_2)_c + M_2 + P_{1/2}^r L_{13}$$

$$P_{1/2}^r = \frac{M(P_2)_c + M_2}{I_{BC}} \quad (5.14)$$

$$P_{1/2} \ Z_{1/2} \mu_p; \ P_{4/3} \ Z_{4/3} \mu_p$$

Определим давление шарниров

$$\bar{P}_2 + \bar{P}_{1/2} = \bar{P}_{3/2}$$

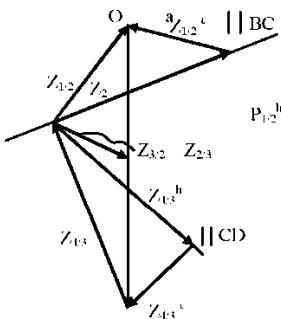


Рис. 5.22. Силовой расчёт

Рычаг Жуковского. Реакции в кинематических парах и движущий момент можно найти, используя рычаг Жуковского.

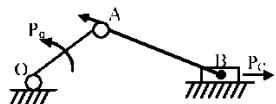


Рис. 5.23. Кривошипно-шатунный механизм

Пример:

Дано: OA, AB, ω ,

P_c — сила сопротивления

Найти: движущую силу P_g .

Решение

Допустим, что силы веса и инерции малы по сравнению с силой сопротивления, поэтому ими пренебрегаем. Используя принцип возможных перемещений, запишем уравнения

$\sum A_i = 0; \sum P_i \delta s_i \cos(P \hat{\delta s}_i)$, где P_i — сила; δs — возможное перемещение силы.

$P_g \delta s_A - P_c \delta s_e = 0$, разделим на dt , получим

$$\frac{P_g \delta s_A}{dt} - P_c \frac{dS_B}{dt} = 0; P_g U_A - P_c U_B = 0; P_g = \frac{P_c U_B}{U_A}$$

Однако, при измерении угла появляются значительные ошибки, чтобы этого избежать, Н.Е.Жуковский предложил свой метод

$$PV \cos \alpha = Ph \quad (5.15)$$

Рычаг Жуковского представляет собой рычаг, в который превращается план скоростей. К этому рычагу приложены все внешние силы. К концам векторов тех точек, где эти силы действуют, причём все силы повёрнуты на 90° в одном направлении. Рассматривая равновесие приложенного рычага под действием приложенных сил можно определить неизвестные силы.

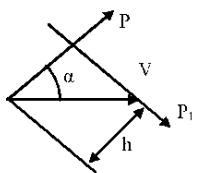
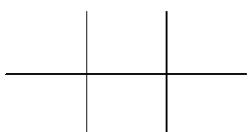


Рис. 5.24. Рычаг Жуковского

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$$



$$P_e = -\frac{P_c OB}{OA}$$

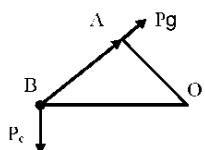


Рис. 5.25. План сил

5.4. Методы приведения сил и масс

Все внешние силы и моменты пар сил можно привести к какому-либо одному звену. Такое звено называется звеном приведения. Если на какое-либо звено действует внешняя сила P , то эта сила может быть заменена другой силой, приложенной к какой - либо точке звена приведения. Если величина заменяющей силы определена из условия равенства элементарных работ, то заменяющая сила называется приведённой силой $P_{\text{прив}}$.

Приведённой силой $P_{\text{прив}}$ на звене приведения называется такая сила, элементарная работа которой равна элементарной работе приводимой силы P .

Элементарная работа может быть отнесена ко времени dt и тогда получится мощность как силы $P_{\text{прив}}$, так и силы P . Мощность силы пропорциональна моменту этой силы относительно полюса, повёрнутого на 90° плана скоростей, отсюда следует, что приведённая сила $P_{\text{прив}}$ может быть найдена по способу Жуковского, для чего достаточно построить повёрнутый на 90° план скоростей и приравнять момент силы $P_{\text{прив}}$ моменту силы P .

При аналитическом исследовании механизма приведённая сила $P_{\text{прив}}$ и приведённый момент $M_{\text{прив}}$ могут быть определены непосредственно из равенства мощностей. Для момента M элементарная работа равна $Md\varphi$, а мощность $M\omega$, поэтому формула равенства мощностей будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{прив}} U_k \cos \alpha_k = \sum_1^n (P_i U_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i) \\ M_{\text{прив}} \omega = \sum_1^n (P_i U_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i) \\ P_{\text{прив}} = \frac{1}{\cos \alpha_k} \left(P_i \frac{U_i}{U_k} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{U_k} \right) \\ M_{\text{прив}} = \sum_1^n \left(P_i \frac{U_i}{\omega} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \right) \end{array} \right. \quad (5.16)$$

,

где $M_{\text{прив}}$, $P_{\text{прив}}$ — момент приведённый и приведённая сила механизма;

M_i , P_i — момент пары сил и сила приложенная к звену i ; U_k — скорость точки приложения силы $P_{\text{прив}}$; ω — угловая скорость звена приведения; U_i — скорость точки приложения силы P_i ; ω_i — угловая скорость звена i ; α_k — угол, образованный приведённой силой $P_{\text{прив}}$ и скоростью U_k ; α_i — угол, образованный силой P_i и скоростью U_i .

Каждое звено обладает некоторой массой m_i и некоторым моментом инерции Y_i относительно оси, проходящей через центр масс. Эти массы и моменты инерции можно заменить некоторой массой, сосредоточенной в произвольной точке звена приведения или некоторым моментом инерции, приписанного звену приведения. Если замена производится из условия равенства кинетических энергий, то заменяющая масса на звене приведения называется приведённой массой $m_{\text{прив}}$, а заменяющий момент инерции — приведённым моментом инерции $Y_{\text{прив}}$.

Кинетическая энергия любого звена i определяется

$$E_i = \frac{m_i U_i^2}{2} + \frac{Y_i \omega_i^2}{2} \quad \text{— теорема Кёнига,} \quad (5.17)$$

где $\frac{m_i U_i^2}{2}$ — поступательное движение; $\frac{Y_i \omega_i^2}{2}$ — вращательное движение

Кинетическая энергия приведённой массы, сосредоточенной в точке К звена приведения, равная $\frac{m_{\text{прив}} U_k^2}{2}$ должна равняться сумме кинетических энергий всех m_i и Y_i , т.е.

$$\frac{m_{\text{прив}} U_k^2}{2} = \sum_1^n \left(\frac{m_i U_i^2}{2} + \frac{Y_i \omega_i^2}{2} \right), \quad \text{т.е.}$$

$$m_{\text{прив}} = \sum_1^n \left[m_i \left(\frac{U_i}{U_k} \right)^2 + Y_i \left(\frac{\omega_i}{U_k} \right)^2 \right] \quad (5.18)$$

Приведённая масса $m_{\text{прив}}$ определяется в том случае, если звено приведения движется поступательно, если звено приведения совершает вращательное движение, то все массы и моменты инерции звеньев заменяют приведённым моментом инерции, приписываемые звену приведения.

Кинетическая энергия приведённого момента инерции $Y_{\text{прив}}$ равная $\frac{Y_{\text{прив}}\omega^2}{2}$ должна равняться сумме кинетических энергий всех масс и моментов инерции звеньев механизма.

$$\frac{Y_{\text{прив}}\omega^2}{2} = \sum_i^n \left(\frac{m_i U_i^2}{2} + Y_i \frac{\omega_i^2}{2} \right), \text{ откуда}$$

$$Y_{\text{прив}} = \sum_i^n m_i \left[m_i \left(\frac{U_i}{\omega} \right)^2 + Y_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right] \quad (5.19)$$

В этих формулах U_i обозначает скорость центра масс звена i , а Y_i — момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр масс этого звена.

Приведённая масса и приведённый момент инерции являются функциями только положения звена приведения.

Приведение сил трения P_{mp} (Q_{mp}) осуществляется из закона передачи мощностей

$$N_d = \Sigma N_{iTP} \Rightarrow P_{TP} U_A = \Sigma F_{iTP} U_i,$$

где U_i — относительная линейная скорость в точке, где приложена сила F_{iTP}

$$P_{mp} = \frac{\Sigma P_i f U_i}{U_A} = \frac{\Sigma P_i \omega_i r_i f}{U_A}$$

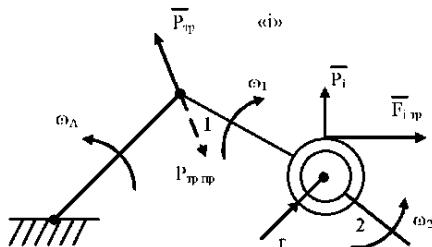


Рис. 5.26. Приведение сил трения

$$Q_{mp\,np} = \frac{\Sigma P_i f \omega_i r_i}{U_B}$$

$\omega_i = \omega_1 - \omega_2$, если ω_1 и ω_2 направлены в разные стороны и $\omega_i = \omega_1 + \omega_2$, если - в одну сторону.

Вместо момента инерции в технических расчётах вводят маxовый момент

$$Y = m\rho^2_{инерции} = \frac{G}{g} \cdot \frac{D^2}{4}, \text{ умножим на } 4g$$

$$(GD^2)_{прив} = (G_1 D^2)_1 + (G_{Si} D^2_{Si}) \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \dots - \dots + 4gm_{sn} \quad (5.20)$$

Данный расчётный механизм можно заменить простым механизмом, выбирая любую точку приведения и любую из обобщённых координат.

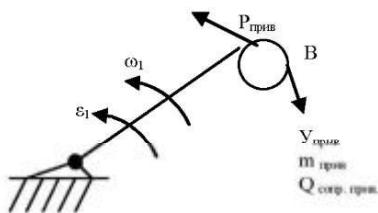


Рис. 5.27. Приведение к простому механизму

5.5. Коэффициент полезного действия механизма (КПД)

Силы, действующие в механизме можно разделить на движущие силы, работа которых положительна, и силы сопротивления, работа которых отрицательна. Силы сопротивления, в свою очередь, можно разделить на силы полезного сопротивления, для преодоления которых предназначен механизм, и на силы вредного сопротивления, среди которых главными являются силы трения в кинематических парах.

Механическим к.п.д. η называется отношение работы, затраченной за период на преодоление полезных сопротивлений A_{nc} к полной работе движущих сил за период A_{de} , т.е.

$$\eta = \frac{A_{nc}}{A_{de}} = \frac{A_{dB} - A_{BC}}{A_{dB}} \quad (5.21)$$

Чем меньше потери работы на вредные сопротивления, тем больше A_{nc} приближается A_{de} и тем выше к.п.д. В идеальном случае $\eta = 1$, редко падает ниже

0,8. Однако встречаются механизмы, у которых $A_{\text{вс}}$ значительно больше $A_{\text{нс}}$, их к.п.д. $\eta = 0,01$, такие механизмы работают очень малое время и потребляют очень малую мощность (механизмы дистанционного управления самолётом).

В большинстве механизмов предполагается, что все звенья движутся равномерно или имеют столь малые массы, что изменением кинетической энергии звеньев можно пренебречь, в таких механизмах работы $A_{\text{нс}}$ и $A_{\text{вс}}$ можно подсчитать за любое одинаковое время, а отношение этих работ может быть заменено отношением мощностей.

Если n механизмов соединены последовательно и известны к.п.д. каждого отдельного механизма $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$, то общий к.п.д. всей цепи механизмов можно определить следующим образом

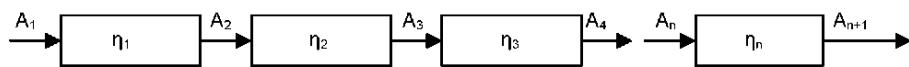


Рис. 5.28. Цепь механизмов (последовательная)

Допустим, что движущая сила приложена к первому механизму, а сила полезного сопротивления — к последнему. Пусть работа движущей силы равна A_1 , часть её пойдёт на преодоление вредных сопротивлений в первом механизме, а оставшаяся часть $A_2 - \eta_1 A_1$ может рассматриваться как работа движущих сил второго механизма. Часть этой оставшейся работы пойдёт на преодоление вредных сопротивлений во втором механизме, и работой движущих сил третьего механизма будет $A_3 = \eta_2 A_2 = \eta_2 \eta_1 A_1$.

Для преодоления полезных сопротивлений, приложенных к n -му механизму, может быть использована работа $A_{n+1} = \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n A_1$, откуда к.п.д. всей цепи механизмов при последовательном их соединении

$$\eta = \frac{A_{n+1}}{A_1} = \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n \quad (5.22)$$

Если i -й механизм цепи обладает худшим к.п.д. равный η_i то $\eta < \eta_i$. Следовательно, желательно, чтобы ни один механизм цепи не обладал особо малым к.п.д.

При параллельном соединении n механизмов считаем, что движущая сила приложена к общему приводу всех механизмов, а сила полезного сопротивления — к каждому отдельному механизму.

Если к i -му механизму приложено полезное сопротивление, для преодоления которого необходима работа A'_i , то действующая сила привода должна для этого механизма совершить работу A_i , связанную с работой A'_i зависимостью $A'_i = \eta_i A_i$.

Общая работа, идущая на преодоление полезных сопротивлений всех механизмов, будет

$$A_{nc} = \sum A'_i = \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \eta_3 A_3 + \dots + \eta_n A_n, \text{ а общая работа движущей силы}$$

$A_{\text{об}} = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$, к.п.д. всей цепи механизмов при параллельном их соединении

$$\eta = \frac{A_{nc}}{A_{\text{об}}} = \frac{\eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \eta_3 A_3 + \dots + \eta_n A_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n} \quad (5.23)$$

При параллельном соединении механизмов к.п.д. всей цепи зависит не только от к.п.д. отдельных механизмов, но и от того, как вся работа движущей силы распределяется по отдельным механизмам, низкое качество одного механизма меньше влияет на величину к.п.д. всей цепи, чем при последовательном соединении.

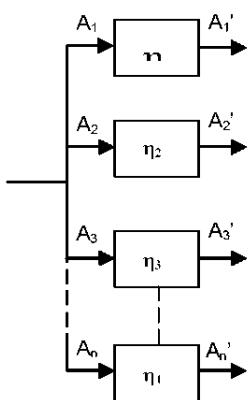


Рис.5.29. Параллельная цепь механизмов

При подсчёте к.п.д. конкретного механизма может получится $\eta=0$, т.е. вся работа движущих сил идёт на преодоление вредных сопротивлений, или работает вхолостую, или нет полезного сопротивления (часы) к.п.д. $\eta<0$, т.е. $A_{\text{дв}}<ABC$, подобные механизмы называются самотормозящими (особенно широко применяется в подъёмных устройствах).

Пример: Определение коэффициента полезного действия (к.п.д.).

Дан шкив и ремень. Найти к.п.д. (η).

Ремень деформируется, на это идёт работа по преодолению трения жёсткости ремня. Плечо a наз. плечом жёсткости. Мом (Q) — называется моментом жесткости. Поскольку деталь вращается, а силовые факторы приложены к этой детали, нужно принять закон передачи моментов

$$M_{oe} = \frac{\sum M_{mp}}{i_{a/e}} = M_{mp} \quad \left(\frac{\sum M_{mp}}{i_{a/e}} = 1 \right)$$

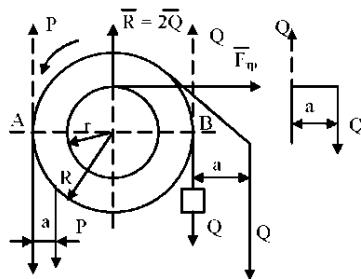


Рис. 5.30. Определение к.п.д. механизма

$$P_{mp}(R-a) = F_{mp}rf + 2aQ$$

$$P_{mp} = \frac{F2Or + 2aQ}{(R-a)}, \quad \frac{2a}{R} = \xi, \quad P_{mp} = \xi Q + \frac{2Orf}{R}$$

$$\eta = \frac{P_{oe}^0}{P_{oe}^0 + P_{mp}} = \frac{Q}{Q + \xi Q + 2Qfr} = \frac{1 \left[1 - \left(\xi + \frac{2fr}{R} \right) \right]}{\left(1 + \xi + \frac{2fr}{R} \right) \left[1 - \left(\xi + \frac{2fr}{R} \right) \right]} \quad (5.24)$$

$$\eta = 1 - \left(\xi + \frac{2fr}{R} \right), \quad \eta = 1 - \phi \quad \text{— коэффициент потерь } \phi = \xi + \frac{2fr}{R}$$

Коэффициент полезного действия может быть вычислен

$$N_{\partial\theta} = N_{nc} + N_{mp}, \quad \eta = \frac{N_{nc}}{N_{\partial\theta}}$$

$$N_{\partial\theta} = N_{nc} \pm N_{sec} + N_{mp}; \quad N_{\partial\theta} = N_{nc} \pm N_{uh} \pm N_{sec} + N_{mp}$$

$$P_{\partial\theta}^0 = P_{\partial\theta}^{0'} + P_{\partial\theta}^{0''} + P_{\partial\theta}^{0'''}; \quad N_{uh} < 0$$

$$P_{\partial\theta} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{Q_{nc}}{i_{A/\theta}} + \sum \frac{Y_{ki}}{i_{A/ki}} + \sum \frac{G_{ci}}{i_{A/ci}} \right)$$

$$N_{uh} < 0, \quad N_{sec} < 0, \quad \eta = \frac{P_{\partial\theta}^0}{P_{\partial\theta}}; \quad P_{\partial\theta} = P_{\partial\theta}^0 + P_{\partial\theta}^{uh}, \quad N_{\partial\theta} = N_{mp}$$

$$P_{\partial\theta}^{mp} = \frac{F_{mp}}{i_{A/ki}}; \quad \eta = \frac{P_{\partial\theta}^0}{P_{\partial\theta}^0 - P_{\partial\theta}^{mp}}; \quad \eta = \frac{\left(\frac{Q_{nc}}{i_{A/\theta}} + \sum \frac{Y_{ki}}{i_{A/ki}} + \sum \frac{G_{ci}}{i_{A/ci}} \right)}{\left(\frac{Q_{nc}}{i_{A/\theta}} + \sum \frac{Y_{ki}}{i_{A/ki}} + \sum \frac{G_{ci}}{i_{A/ci}} \right) + \frac{F_{mp}}{i_{A/ki}}} \quad (5.25)$$

$\eta = \frac{N_{nc}}{N_{uh}}$ — к.п.д. машины постоянен тогда, когда постоянно передаточное

число. Для рычажных механизмов к.п.д. не является постоянной величиной при различных положениях механизма.

5.6. Учёт трения в шарнирных механизмах

Ранее определяли усилия в кинематических парах шарнирных механизмов без учёта сил трения. Эти силы можно учесть, зная, что реакцию в поступательной паре следует направлять под углом трения к нормали, а во вращательной паре — по касательной к кругу трения. Однако практически решение получается очень сложным. Г.А.Барсов, впервые решивший эту задачу для всех диад, полагал, что для диады №1 решение сводится к уравнению 16 степени, графически задача может быть решена построением двух вспомогательных кривых 4го порядка, точки решения которых позволяют определить все искомые реакции. И.И.Артоболевский предположил приближённый, но практически весьма удобный способ для определения усилий в кинематических парах с учётом сил трения.

По способу Артоболевского первый расчёт делается без учёта сил трения. По найдённым реакциям \bar{N} находятся силы трения \bar{F} , которые направляются перпендикулярно соответствующим реакциям \bar{N} , т.е. по касательной к поверхности соприкосновения 2-х звеньев. Если найдена реакция \bar{N}_{12} во вращательной паре без учёта сил трения, то вычисляя $F_{21} = -F_{12} = fN_{12}$, прикладываем силу \bar{N}_{12} к звену 1, а силу \bar{N}_{12} к звену 2, направляя каждую из них против относительной угловой скорости $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$ и $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$ этих звеньев. Приближённый способ не применим в тех случаях, когда механизм близок к самоторможению.

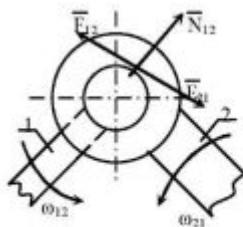


Рис. 5.31. Шарнирный механизм

5.7. Приведение сил и масс

Приведение сил и масс, а также моментов и моментов инерции можно производить с учётом потерь на трение.

Пусть несколько механизмов с постоянными передаточными отношениями соединены последовательно. Предположим также, что мощность передаётся по стрелке A , а приводимая сила P_i приложена в точке i .

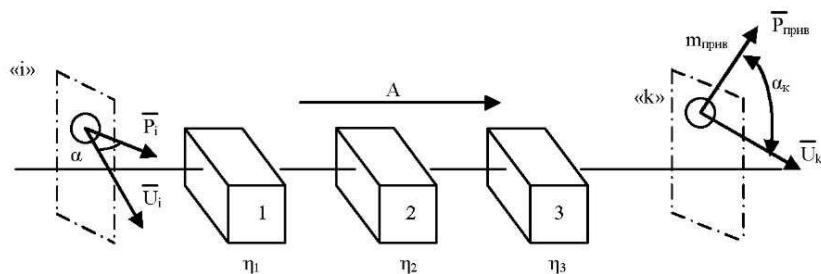


Рис.5.32. Приведение сил

В этом случае, при приведении силы P_i к точке K можно учесть, что часть мощности $P_i U_i \cos \alpha_i$ будет потеряна в трёх промежуточных механизмах, имеющих общий к.п.д. $\eta_i = \eta_1, \eta_2, \eta_3$ и до точки K дойдёт мощность $\eta_i P_i U_i \cos \alpha_i$. Эта мощность и должна быть приравнена к мощности приведённой силы.

$$P_{npus} \cdot U_K \cos \alpha_K = \eta_i P_i \cos \alpha_1; \quad P_{npus} = \eta_i P_i \frac{U_i \cos \alpha_1}{U_K \cos \alpha_K}$$

Если мощность передаётся в противоположном направлении:

$$P_{npus} = \frac{1}{\eta_i} P_i \frac{U_i \cos \alpha_1}{U_K \cos \alpha_K}$$

При приведении массы m_i к точке K считаем, что часть кинетической энергии $\frac{m_i U_i^2}{2}$, будет потеряна в трёх промежуточных механизмах. До точки K дойдёт

кинетическая энергия $\eta_i \frac{m_i U_i^2}{2}$, эту энергию и следует приравнять к энергии

приведённой массы $\frac{m_{npus} U_K^2}{2}$ получим

$$m_{npus} = \eta_i m_i \left(\frac{U_i}{U_K} \right)^2 \quad (5.26)$$

Если мощность передаётся в противоположном направлении:

$$m_{npus} = \frac{1}{\eta_i} m_i \left(\frac{U_i}{U_K} \right)^2 \quad (5.27)$$

Контрольные вопросы

- 5.1. Что представляют собой силы инерции механизма.
- 5.2. Внешние силы и силы реакции.
- 5.3. Каков принцип приведения сил к начальному звену.
- 5.4. В чём заключается приведение масс к начальному звену.
- 5.5. Что такое К.П.Д. механизма.

ЛЕКЦИЯ 6. ДВИЖЕНИЕ МАШИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННЫХ СИЛ

6.1. Законы движения машин

Для определения закона движения какого-либо звена механизма необходимо знать все внешние силы или зависимость их от различных факторов. В самом общем случае внешние силы зависят как от положения механизма, так и от скорости точки приложения и времени.

Все силы, действующие на систему, делятся на задаваемые силы и реакции связей.

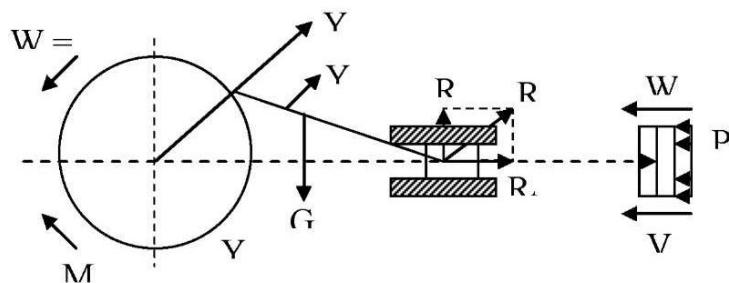


Рис.6.1. Силы и реакции связей

К задаваемым силам относятся:

- движущие силы P , направленные в сторону движения, их работа $A_{дв} > 0$.
- силы или моменты низкого сопротивления Q_{nc} , M_{nc} , приложенные к исполнительным звеньям машины, суммарная работа сил полезного сопротивления $A_{nc} < 0$, приложена против движения, если $A_{nc} = 0$, то имеем холостой ход.
- силы собственного веса звена Q , работа этих сил $A_{вес} \geq 0$, за один цикл $A_{вес} = 0$, эти силы называются активными.
- пассивные силы, работа сил инерции Y , их работа $A_{ин} \geq 0$, за один цикл работы инерционных сил равны 0, если кривошип движется со скоростью $\omega = \text{const}$

Реакции связи вызывают вредные сопротивления $A_{bc} < 0$, вызываются трением. Силы, развиваемые двигателями различных типов, задаются в виде механических характеристик:

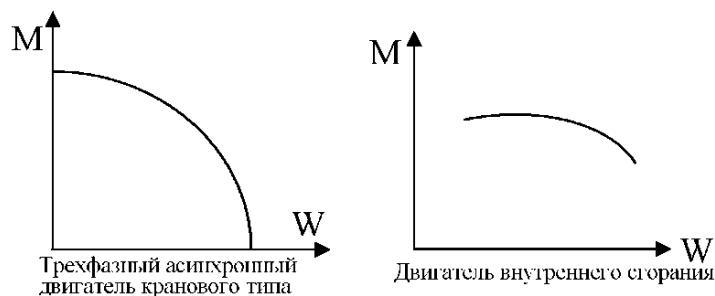
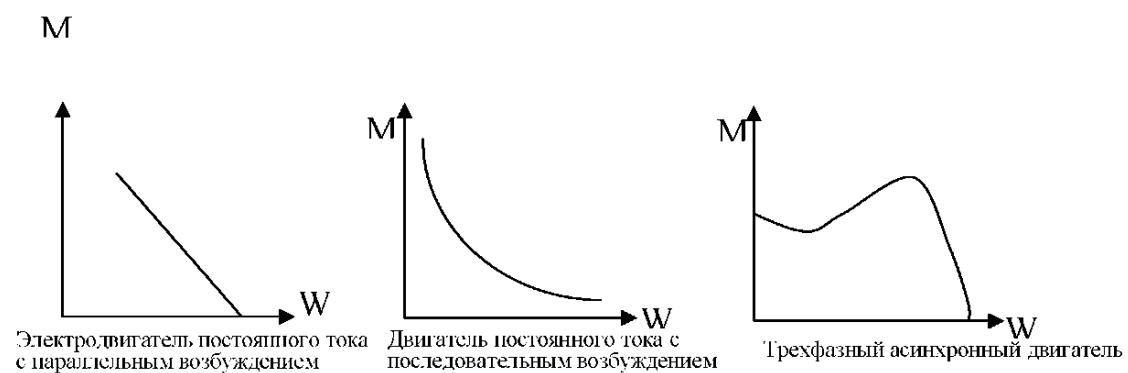
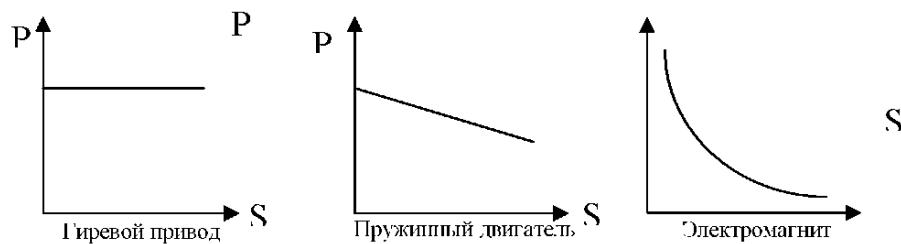


Рис. 6.2. Механические характеристики двигателя

Механические характеристики различных двигателей оцениваются их жесткостью, причем коэффициент жесткости характеристики называется тангенсом угла наклона касательной в заданной точке кривой, изображающей механическую характеристику.

6.2. Характерные периоды работы машины и законы передачи работ, мощности, сил, моментов

Рассматривая машину, как систему материальных точек, применим закон кинетической энергии $T_2 - T_1 = A_{акт} + A_{пeак}$.

Изменения кинетической энергии равно работе задаваемых сил

$$T_2 - T_1 = \sum A \quad (6.1)$$

- неустановившееся движение (разгон и торможение): при разгоне $\sum A > 0$, $T_2 - T_1 > 0$, $T_2 > T_1$, такой режим долго длиться не может (кратковременен); при торможении $\sum A < 0$, $T_2 - T_1 < 0$, $T_2 < T_1$ — процесс кратковременный.
- установившийся режим может быть установившимся равновесным и установившимся неравновесным.

Если режим установившийся равновесный, то $T_2 - T_1 = \sum A$, $\sum A = 0$ — за любой промежуток времени, т.е. $T_2 - T_1 = 0$, $T_2 = T_1$.

$\sum F_i \delta \cos(F_i \delta_i) = 0$ — закон виртуальных перемещений, выражает состояние равновесия. Машины, у которых передаточное число ведущей и ведомой передачи величина постоянная, называется простой машиной, если переменная — то сложной.

График движения следующий:

Для простой машины движение равномерное, есть движение равновесное установившееся. Для сложных машин равномерное движение ведущего звена не определяет равновесного установившегося режима, этот режим возможен только при очень медленном движении, когда силой инерции можно пренебречь.

Графики механических характеристик построены экспериментальным путем при медленном движении, если на больших скоростях, то они не соответствуют действительности.

Если режим установившийся неравновесный, то принцип наименьших работ (виртуальных перемещений) не подходит, так как за цикл $\sum A=0$.

6.3. Законы передачи мощности, моментов, сил

Закон передачи работ:

- для равновесного установившегося режима $T_2-T_1=A_{\text{дв}}-A_{\text{пс}}\pm A_{\text{вес}}-A_{\text{тр}}$;

$T_2-T_1=0, 0=A_{\text{дв}}-A_{\text{пс}}\pm A_{\text{вес}}-A_{\text{тр}}$ — для любого промежутка времени

$A_{\text{дв}}=A_{\text{пс}}\pm A_{\text{вес}}+A_{\text{тр}}$ — закон передачи работ для установившегося движения за любой промежуток времени,

- для неравновесного установившегося режима

$T_2-T_1=A_{\text{дв}}-A_{\text{пс}}\pm A_{\text{вес}}-A_{\text{тр}}=0; T_2-T_1=0$ — за цикл, $0=A_{\text{дв}}-A_{\text{пс}}\pm A_{\text{вес}}-A_{\text{тр}}, A_{\text{вес}}=0$,

$A_{\text{дв}}=A_{\text{пс}}+A_{\text{тр}}$ — для установившегося неравновесного движения (6.2)

Закон передачи мощности:

- для установившегося равновесного режима $A_{\text{дв}}=A_{\text{пс}}\pm A_{\text{вес}}+A_{\text{тр}}$ — за любой промежуток времени.

$A_{\text{дв}}=A_{\text{пс}}+A_{\text{тр}}$ — за бесконечно малый промежуток времени, тогда

$$\frac{dA_{\text{дв}}}{dt} = \frac{dA_{\text{пс}}}{dt} + \frac{dA_{\text{тр}}}{dt} \quad (6.3)$$

$N_{\text{дв}}=N_{\text{пс}}+N_{\text{тр}}$ — закон передачи мгновенной мощности,

$$\eta = \frac{N_{\text{пс}}}{N_{\text{дв}}} - \text{мгновенный КПД} \quad (6.4)$$

- для установившегося неравновесного режима $N_{\text{дв}}=N_{\text{пс}}+N_{\text{тр}}$ — средняя

мощность за цикл, $\eta = \frac{N_{\text{пс}}}{N_{\text{дв}}}$

$N_{\text{ср}} = \frac{dA}{dt} = FV \cos(F^{\wedge}V)$ — средняя мощность будет

$$N_{\text{ср}} = \int \frac{dA}{t_2 - t_1} = \int \frac{FV \cos(F^{\wedge}V)}{t_2 - t_1} \quad (6.5)$$

- для установившегося неравновесного режима

Закон передачи сил:

- для установившегося равновесного режима, пренебрегая силами веса

$$\eta = \frac{N_{nc}}{N_{oc}}$$

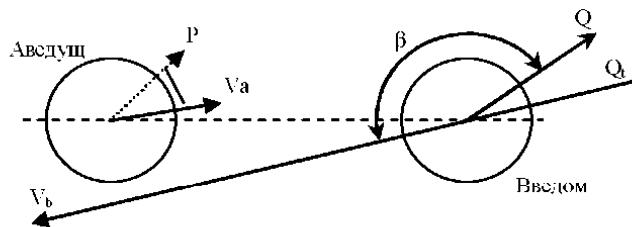


Рис.6.3 Закон передачи сил

P — движущая сила, Q — полезное сопротивление,

P_t и Q_t — тангенциальные усилия

$$P_t V_a \cos \alpha = Q_t V_b \cos \beta$$

$$P_t V_a = \frac{Q_t V_b}{\eta} \frac{P_t}{V_a} \eta \quad (6.6)$$

$$\frac{V_a}{V_b} = i_{A/B} \text{ И } \frac{P_t}{Q_t} = \frac{1}{i_{A/B}}$$

$$\begin{cases} Q_t = P_t i_{A/B} \eta \\ P_t = \frac{Q}{i_{A/B}} \eta \end{cases} \text{ — закон передачи сил} \quad (6.7)$$

Для идеальной машины: $\frac{P_t}{Q_t} = \frac{V_a}{V_b} = \frac{1}{i_{A/B}}$, т.е. силы обратно пропорциональны скорости точек, к которым приложены эти силы или столько, сколько выигрываем в силе, столько проигрываем в скорости (пути). Если силы трения равны 0, то силы были бы идеальны.

$Qt^o(\text{идеальная}) = Pt i_{A/B}$ $Pt^o = \frac{Qt}{i_{A/B}}$ $Pt^o = \frac{Qt\eta}{i_{A/B}\eta} = Pt\eta$ (6.8)

Т.е. КПД можно выразить не только отношением работы и мощности, но и сил для установившегося равновесного движения с учетом сил веса

$N_{\text{зв}} = N_{\text{nc}} \pm N_{\text{вес}} + N_{\text{тр}}$ — закон мгновенных мощностей,

$$\eta = \frac{N_{\text{зв}}}{N_{\text{nc}}}, \text{ если } N_{\text{вес}} > 0, \text{ то } \eta = \frac{N_{\text{зв}}}{N_{\text{nc}}} + N_{\text{вес}}, \text{ если } N_{\text{вес}} < 0, \text{ то } \eta = \frac{N_{\text{зв}} + N_{\text{вес}}}{N_{\text{зв}}}$$

$$N_{\text{зв}} = \frac{N_{\text{nc}} + xN_{\text{вес}}}{\eta}, \text{ где } x = -\eta, \text{ если } N_{\text{вес}} > 0, \text{ то } x = 1, \text{ если } N_{\text{вес}} < 0$$

$$PtVa = \frac{QtVb + x\Sigma \pm GtiVi}{\eta} \quad (6.9.)$$

$$\begin{cases} Pt = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Qt}{i_{A/B}} + x \left| \Sigma \pm \frac{Gti}{iA/Ci} \right| \\ Qt = Pt i_{A/B} - x \left| \Sigma \pm \frac{Gti Ci}{b} \right| \end{cases} \text{закон передачи сил} \quad (6.10)$$

$$Pt = \frac{Qt}{i_{A/B}} \quad (6.11)$$

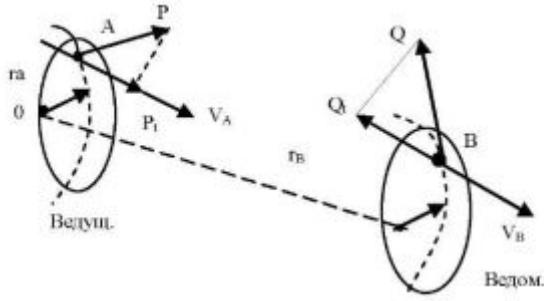
Если $\eta = 1$, то будем иметь идеальные силы Qt^o, Pt^o

$$Pt^o = \left(\frac{Qt}{i_{A/B}} + x \left| \Sigma \pm \frac{Gti}{iA/Ci} \right| \right) \frac{\eta}{\eta} = \eta Pt \quad \eta = \frac{Pt^o}{Pt}$$

$$\text{Если } N_{\text{вес}} > 0, x = -\eta \quad Qt^o = \left(Pt i_{A/B} + x \left| \Sigma \pm \frac{Gti Ci}{b} \right| \right) \frac{\eta}{\eta} \quad (6.12)$$

$$Qt^o = Qt \frac{1}{\eta} \quad \eta = Qt \quad \frac{Qt}{Qt^o}$$

Закон передачи моментов: для машин, все звенья которой вращаются, мощности веса равны 0 или работа сил вес равна 0.



6.4. Закон передачи моментов

$$P_t \frac{r_A}{r_a} = \frac{Q_t}{i_{A/B}} \eta = \frac{Q_t V_B}{V_A} \eta \frac{r_B}{r_A}$$

$$\frac{M_{oe}}{r_a} = \frac{M_{nc} V_B}{V_A} \eta r_B \quad \frac{V_B}{r_B} = W_{0t} \quad \frac{V_A}{r_A} = W_0$$

$$\frac{W_{0t}}{W_0} = \frac{i_{01}}{0} \quad M_{oe} = \frac{M_{nc}}{\frac{i_{01}}{0\eta}} \text{ — закон передачи моментов} \quad (6.13)$$

Закон передачи сил при неустановившемся движении

$$\text{Для неустановившегося движения } T_c - T_1 = A_{db} - A_{nc} \pm A_{bec} - A_{tp} \quad (6.14)$$

$$\frac{dT}{dt} = N_{db} - N_{nc} \pm N_{bec} - N_{tp} \quad Dt = \sum \frac{dM_i V_i^2}{2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum \frac{d}{dt} \frac{M_i V_i^2}{2} = \sum M_i V_i \frac{dV_i}{dt} = \sum M_i V_i W_i^\tau = \sum M_i V_i W_i \cos(W_i, V_i) = \sum P_i V_i \cos(W_i, V_i);$$

$$\frac{dT}{dt} = - \sum P_i V_i \cos(P_i, V_i)$$

$\frac{dT}{dt} = -N_{in} \text{ — производная от кинетической энергии по времени равна мощности инерционных сил, взятых с обратным знаком}$

$$\frac{dT}{dt} = -N_{in} = N_{db} - N_{nc} \pm N_{bec} - N_{tp}; \quad Dt > 0 \quad (T_2 - T_1 > 0): \quad \frac{dT}{dt} > 0; \quad N_{in} < 0$$

$$N_{in} = N_{db} - N_{nc} \pm N_{bec} - N_{tp}; \quad N_{db} = N_{in} = N_{nc} \pm N_{bec} + N_{tp} \text{ (разгон ускорения)}$$

$$\frac{dT}{dt} < 0; \quad N_{in} > 0; \quad N_{in} + N_{db} = N_{nc} \pm N_{bec} + N_{tp} \text{ (выбег торможения)}$$

$$N_{db} = N_{nc} \pm (N_{in}) \pm N_{bec} + N_{tp} \quad (6.15)$$

— закон передачи мощностей в общем случае

6.5. Уравнения движения механизмов

Способ приведения сил и масс к звену приведения позволяет рассматривать движения не всех звеньев механизма, а только движения одного звена приведения.

Если в качестве звена приведения выбрано звено, совершающее поступательное движение, то ищут $P_{\text{прив}}$ и $m_{\text{прив}}$.

Так как $P_{\text{прив}}$ определялась из условия равенства элементарных работ, а приведенная масса — из условия равенства кинетических энергий, то для звена приведения будет справедливо уравнение живых сил

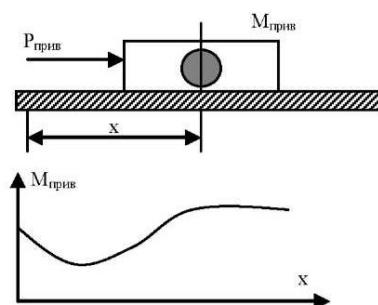


Рис.6.5.

$$\int \frac{m(x)V^2}{2} dx = P(x, V, t)dx \quad (6.16)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{m(x)V^2}{2} = P(x, V, t)$$

Дифференцируя и учитывая зависимость массы $m(x)$ от x получим

$$\frac{V^2}{2} \frac{dm(x)}{dx} + \frac{2VdV}{2dx} m(x) = P(x, V, t)$$

$$\frac{(dx/dt)^2}{2} d \frac{m(x)}{dx} + \frac{dx}{dt} d \frac{dx/dt}{dx} m(x) = P(x, V, t)$$

$m(x) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2} d \frac{m(x)}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = P(x, V, t)$ — уравнение движения, когда масса переменная и изменяется с изменением координаты x.

При $m(x) = \text{const}$ формула обращается во второй закон Ньютона.

Свободный член $P(x, V, t)$ является функцией x, V, t.

Если звено приведения имеет вращательное движение, то определяют приведенный момент инерции $Y(\phi)$ и приведенный момент $M(\phi, \omega, t)$. Момент инерции $Y(\phi)$ является переменной величиной, зависящей только от угла поворота звена приведения ϕ , момент $M(\phi, \omega, t)$, вращающий звено приведения, в общем случае зависит от угла ϕ , ω , t . Применяя уравнение живых сил в дифференциальной форме, получим уравнение движения:

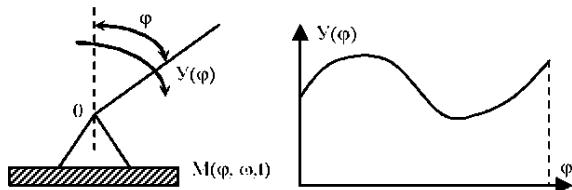


Рис. 6.6. Приведение к звену приведения

$$d \frac{Y(\phi) w^2}{2} = M(\phi, \omega, t) d\phi \quad (6.19)$$

$$\frac{d}{d\phi} \frac{Y(\phi) w^2}{2} = M(\phi, \omega, t)$$

Дифференцируя, находим: $\frac{w^2}{2} dY(\phi) + \frac{Y(\phi) 2W dW}{2 d\phi} = M(\phi, \omega, t)$

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 d \frac{Y(\phi)}{2 d\phi} + Y(\phi) \frac{dw}{dt} = M(\phi, \omega, t), \text{ получаем}$$

$$Y(\phi) \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{2} d \frac{Y(\phi)}{d\phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = M(\phi, \omega, t) \quad (6.20)$$

— уравнение движения при вращении звена приведения

Для вывода дифференциального уравнения движения машины (вращение звена приведения, используя маховые массы) имеем:

$$M^E = Y \frac{dw}{dt} \quad P = m \frac{dV}{dt}$$

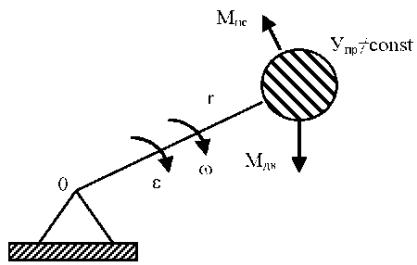


Рис. 6.7. Приведение к звену приведения

Исходным является закон момента количества движения:

$\frac{d\mathbf{f}_0}{dt} = M^E$ — изменение момента количества движения во времени есть момент внешних сил.

$$\mathbf{f}_0 = mVr; \quad V = wr; \quad \mathbf{f}_0 = mVr^2;$$

$$\mathbf{f}_0 = Yw; \quad d\mathbf{f}_0 = dYw;$$

$$\frac{dYw}{dt} = M^E; \quad w = \frac{d\phi}{dt}; \quad dt = \frac{d\phi}{w} \quad d\phi = wdt;$$

$$\frac{wdY}{d\phi} = M^E; \quad \frac{dYw^2}{2d\phi} = M^E; \quad \frac{2wYdw}{2d\phi} + \frac{w^2dY}{2d\phi} = M^E;$$

$$\frac{2w}{2} \frac{ydw}{d\phi} + \frac{w^2dY}{2d\phi} = M^E; \quad M^E = M_i^I + M_i^{II};$$

$$M_i^I = \frac{ydw}{d\phi}; \quad M_i^{II} = \frac{dYw^2}{2d\phi}; \quad Y = \frac{GD^2}{4q}; \quad w = \frac{\pi n}{30}; \quad dw = \frac{\pi dn}{30}$$

$$\frac{GD^2\pi dn}{4q30dt} + \pi^2 n^2 d \frac{GD^2}{(30^2 \cdot 2/57,4)4gd\phi} = M^E$$

$$\frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} + \frac{n^2}{125} d \frac{GD^2}{d\phi} = M^E \quad (6.21)$$

— уравнение движения при вращении звена через маховые массы.

Полученные уравнения движения механизма в общем случае могут быть проинтегрированы численными методами.

Наиболее простой — это метод итераций, когда W , t вычисляются последовательно шаг за шагом по формулам

$$W_i + 1 = \frac{M(\varphi_i, \omega_i, t_i) \Delta\varphi}{Y_i w_i} + \frac{3Y_i - Y_{i-1}}{2Y_i} w_i \quad (6.22)$$

— при вращательном движении

$$t_i + 1 = \frac{2\Delta\varphi}{w_i + 1 + w_i} + t_i, \text{ где } \Delta\varphi \text{ — шаг интегрирования}$$

$$V_i + 1 = \frac{P(x_i, V_i, t_i) \Delta x}{m_i V_i} + \frac{3m_i + m_{i-1} + 1}{2m_i} V_i \quad (6.23)$$

— при поступательном движении

$$t_i + 1 = \frac{2\Delta x}{V_i + 1 - V_i} + t_i$$

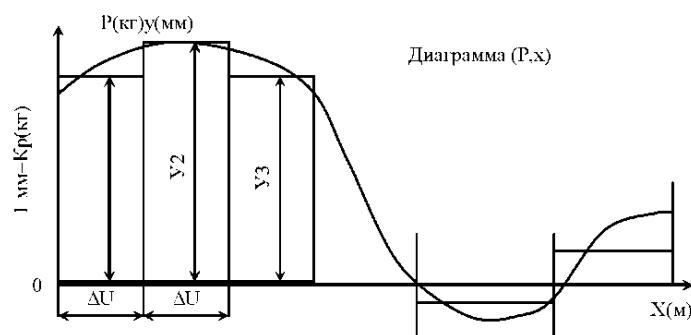
Случай, когда приведенная сила или приведенный момент зависят от положения механизма.

Пусть звено приведения движется поступательно и приведенная сила P зависит только от положения звена приведения, т.е. от координаты x , интегрируя, находим

$$\frac{mV^2}{2} = \int_0^x P dx + C, \text{ откуда } V = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\int_0^x P dx + C \right)},$$

здесь P и m — переменные и зависят от x .

Если P зависит от x , то интеграл, представляющий работу этой силы A зависит только от x . Допустим, что зависимость силы P от x представлена в виде графика, при этом сила P изображена отрезками у при помощи цепы деления K_p , а координата x отрезками U при помощи цепы деления K_x .



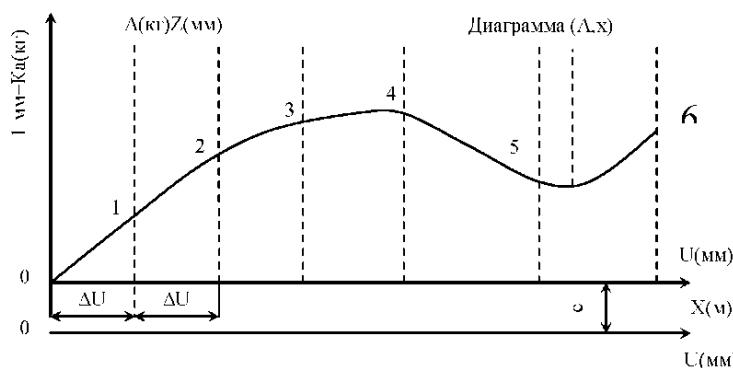


Рис. 6.8. График движения механизма

Для построения кривой (A,x) по формуле $A = \int_0^x P dx + C$ делим кривую (P,x) на ряд равных небольших участков, т.е. площадь, ограниченная заданной кривой, заменяется площадью прямоугольников ($y_i \Delta U$). Искомый интеграл изображается площадью при цене деления, равной произведению цен деления по осям Кр и Кх.

$$A_i = K_p K_x y_i \Delta U \quad (6.25)$$

Для изображения работы А отрезками Z необходимо выбрать цену деления работы K_a , т.е. $Z_i = \frac{A_i}{K_a} = \frac{K_p K_x}{K_a} y_i \Delta U$ и $y_i = c y_i$, т.е. отрезки Z_i оказываются прямо пропорциональными отрезкам y_i .

Формулу $V = \sqrt{\frac{2}{m \left(\int_0^x P dx + C \right)}}$ можно записать в виде $V = \sqrt{\frac{2(A+C)}{m}}$, находя постоянную C , при $X=0$, если $V=0$, то $A=0$ и $C=0$ и эту величину можно отложить от абсцисс с учетом цены деления K_a . Теперь для каждого значения x можно найти $(A+C)$ и вычислить скорость V . Результаты вычислений можно представить графиком (V,x) .

Ускорение a находим по формуле $a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx}$

Для определения ускорения при любом значении x , т.е. в любой точке К кривой (V,x) проводим в этой точке касательную Т и нормаль N, пересекающую ось абсцисс в точке в.

Поднормаль св представляет собой с учетом цены деления Ка ускорение а в данной точке

$$A = K_V q \frac{K_V dq}{K_x dU} = \frac{K_V^2}{K_x} q \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{K_V^2}{K_x} \right)_{ce}, \text{ откуда цена деления для ускорений } K_a = \frac{K_V^2}{K_x}$$

$$A = K_V q \frac{K_V dq}{K_x dU} = \frac{K_V^2}{K_x} q \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{K_V^2}{K_x} \right)_{ce}$$

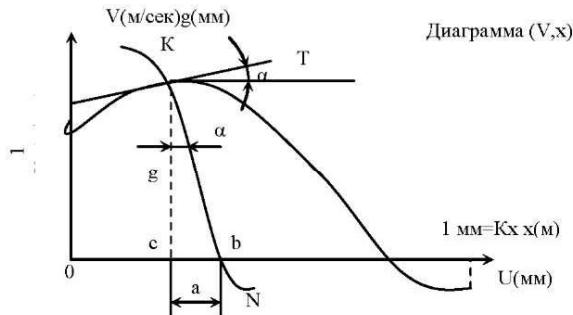


Рис. 6.9. Диаграмма (V,x)

Совершенно аналогично решается задача и для случая, когда звено приведения вращается вокруг неподвижного центра. Формулы будут следующие:

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \sqrt{\frac{2}{Y_\varphi} \left(\int_0^\varphi M d\varphi + C \right)} \\ A = \int_0^\varphi M d\varphi \\ C = \frac{K_m K_\varphi}{K_a} \Delta U \\ W = \sqrt{\frac{2(A+C)}{Y}} \\ \varepsilon = W \frac{dw}{dp} \\ K\varepsilon = \frac{Kw^2}{K_\varphi} \end{array} \right.$$

Контрольные вопросы

- 6.1. Каковы законы движения машин
- 6.2. Каковы характерные периоды работы машин
- 6.3. Каковы законы передачи мощности, моментов, сил.
- 6.4. Каковы уравнения движения механизма.

ЛЕКЦИЯ 7. РЕГУЛИРОВАНИЕ ХОДА МАШИН

7.1. Различные режимы движения механизма

При исследовании движения сложного механизма, включающего в свой состав машину-двигатель и рабочую машину, удобно момент на звене приведение M заменить суммой двух моментов $M_{\text{дв}}$ и $M_{\text{сопр}}$. В общем случае как $M_{\text{дв}}$, так и $M_{\text{сопр}}$ изменяются с изменением угла φ . Для установившегося движения необходимо, чтобы оба эти момента представляли собой периодические функции угла φ и чтобы средние значения этих моментов были равны друг другу и противоположны по знаку. При установившемся движении $M_{cp}=0$ $M_{\partial\varphi cp}=-M_{concp}$. Увеличение угловой скорости механизма при разбеге получается за счет работы момента M или за счет суммы работ моментов $M_{\text{дв}}$ и $M_{\text{сопр}}$, поэтому указанная работа для режима разбега должна быть больше 0. Заменив моменты $M_{\text{дв}}$ и $M_{\text{сопр}}$ их средними значениями $M_{\partial\varphi cp}$ и M_{concp} , можно также сказать, что сумма работ моментов $M_{\partial\varphi cp}$ и M_{concp} для режима разбега должна быть больше 0. $M_{\partial\varphi cp} > -M_{concp}$. При выбеге будет $M_{\partial\varphi cp} < -M_{concp}$, таким образом соотношения $\omega_k=\omega_0$, $\omega_k>\omega_0$ и $\omega_k<\omega_0$ являются признаками наличия установившегося движения, разбега или выбега механизма.

Неравномерность движения механизма при установившемся движении. Действительной средней скоростью называется такая постоянная скорость, двигаясь с которой вал из положения 1 переходит в положение 2 за тоже самое время, в течении которого вал приходит из 1^{го} во 2^е, двигаясь с действительной неравномерной скоростью.

$$V = \frac{ds}{dt}; \quad \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{V}; \quad t_1 - t_2 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{V}$$

$$V_{cp} = \frac{S_1 - S_2}{t_1 - t_2} \quad V_{cp} = \frac{S_1 - S_2}{\int_{s_1}^{s_2} (ds/V)} \quad (7.1)$$

Условная средняя скорость — это $V_{cp, \text{уср}} = \frac{(V_{\max} + V_{\min})}{2}$. Неравномерностью хода

называется отношение $\delta = \frac{(V_{\max} - V_{\min})}{V_{cp}}$, $\delta = \frac{(V_{\max} - V_{\min})(V_{\max} + V_{\min})}{V_{cp}(V_{\max} + V_{\min})}$, $\delta = \frac{V_{\max}^2 - V_{\min}^2}{2V_{cp}^2}$

$$\delta = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\omega_{cp}^2},$$

где δ — величина стандартизированная для с/х машин $\delta = 0,1$; для генераторов эл./ тока $\delta = 0,004$.

Можно из всех угловых скоростей выбрать наибольшую и наименьшую угловые скорости ω_{\max} и ω_{\min} то неравномерность механизма можно оценить коэф-

фициентом неравномерности $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}}$

$$\omega_{cp} = \frac{2\pi n}{60} \quad (7.2)$$

Определение коэффициента неравномерности движения по графику угловой скорости просто, если задан только закон движения звена приведения,

$\omega = \frac{1}{I\omega_{cp}} \int_0^\phi M d\phi + C$, где M является периодической функцией угла, а момент

инерции звена приведения I — величина постоянная.

$$\omega_{\max} = \frac{1}{I\omega_{cp}} \int_0^{\phi''} M d\phi + C; \quad \omega_{\min} = \frac{1}{I\omega_{cp}} \int_0^{\phi'} M d\phi + C$$

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} = \frac{1}{I\omega_{cp}} \int_{\phi'}^{\phi''} M d\phi + C$$

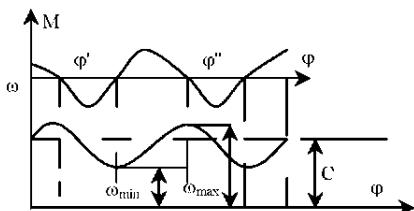


Рис. 7.1. Неравномерность движения

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} = \frac{1}{I\omega_{cp}^2} \int_{\phi'}^{\phi''} M d\phi + C \quad (7.3)$$

7.2. Назначение и принцип действия регулятора числа оборотов

Рассмотрим уравнение движения машин с измерителем скорости.

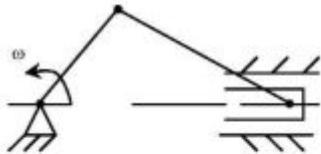


Рис.7.2.Схема машины с измерителем скорости.

Уравнение движения кривошипно-шатунного механизма (паровой машины, двигателя внутреннего сгорания и т.д.) можно записать в виде:

$$I_1 \ddot{\omega} = M_{\text{дв}}(\mu) + M_1(F),$$

где I – момент инерции движущихся частей; $M_{\text{дв}}$ – момент двигателя;

M_F – момент сил трения трансмиссии; μ - величина зазора прохождения пара через заслонку.

Уравнение конического маятника (регулятора числа оборотов)

$$m \cdot \psi'' + m^2 \omega^2 \cos \psi \sin \psi - g m \sin \psi - b \psi_1, \quad (7.5)$$

где ψ – угол поворота маятника; k – жёсткость системы, $k > 0$; l – длина нити; m – масса груза; b – коэффициент трения скольжения ползунка.

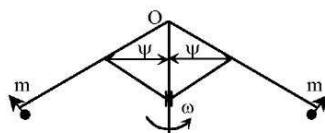


Рис.7.3.Схема конического маятника (регулятора числа оборотов)

Модель нелинейной системы в развернутой форме входа-выхода имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \varphi(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m), \\ y_j = V_j(x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (7.6)$$

где $x_{1(t)}$ – переменные состояния объекта; $u_{1(t)}$ – управляемые переменные; $y_{j(t)}$ – измеряемые переменные.

Введем в качестве переменных состояния: для паровой машины с регулятором: в первом и втором случае $\omega \rightarrow x_1$, $\psi' \rightarrow x_2$, $\mu \rightarrow u$,

$$x_1 = \omega / \omega_0; \quad x_2 = \psi / \psi_0; \quad x_3 = \psi' / \psi_0; \quad u = \mu / \mu_0$$

Уравнения движения запишутся

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = M_{\text{дв}}(u) / y + M_{(f)} / y \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 \sin x_2 \cos x_2 - g \sin x_2 - bx_3 / m \\ y_1 = x_2 \end{cases} \quad (7.8)$$

7.3. Маховик: подбор его момента инерции

Практикой установлены определенные коэффициенты неравномерности движения, при которых та или иная машина работает удовлетворительно. При проектировании машины можно заранее задать определенный коэффициент по соответствующим таблицам. Изменение коэффициента неравномерности движения можно получить либо за счет изменения значения $\int_{\max} M d\phi$, либо за счет изменения момента инерции звена приведения I. Значение $\int_{\max} M d\phi$ связано, как правило, с общей конструкцией машины и менять сложно, практически уменьшение коэффициента неравномерности движения производится путем увеличения момента инерции звена приведения, путем посадки на вал дополнительной массы, называемой маховиком.

Момент инерции маховика можно принимать равным $IM = (G D^2) / (9,81 \cdot 4) \approx (G D^2 / 40)$ [кгм сек²], где G — вес обода маховика, D — наружный диаметр маховика, величина $G D^2$ называется маховым моментом маховика.

Неравномерность хода будет

$$\delta = \frac{1}{(I_{\text{колен.вал}} + I_M) \omega_{cp}^2} \int_{\max} M d\phi_1$$

откуда $I_M = \frac{1}{\delta \omega_{cp}^2} \int_{\max} M d\phi_1 - I_{\text{колен.вал}}$ (7.9)

Определение места установки маховика. Ставится вопрос о том, куда поставить маховик?

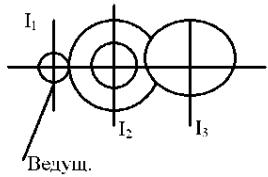


Рис.7.4. К определению места установки маховика

Кинетическая энергия — $T = \frac{\omega_1^2}{2} \left(I_1 + \frac{I_2}{i_{1/2}^2} + \frac{I_3}{i_{1/3}^2} \right)$ или $T = \frac{\omega_1^2}{2} I_{\text{пред}}$ — для приведённой системы, (7.10)

$$\text{где } I_{\text{пред}} = \left(I_1 + \frac{I_2}{i_{1/2}^2} + \frac{I_3}{i_{1/3}^2} \right)$$

- для маховика на 1-ом валу получим $I_{\text{пред}} = I_1 + I_M + \frac{I_2}{i_{1/2}^2} + \frac{I_3}{i_{1/3}^2}$

- для маховика, установленного на 2м валу получим $I_{\text{пред}} = I_1 + \frac{I_2 + I_M}{i_{1/2}^2} + \frac{I_3}{i_{1/3}^2}$

- для маховика на 3-ем валу $I_{\text{пред}} = I_1 + \frac{I_2}{i_{1/2}^2} + \frac{I_3 + I_M}{i_{1/3}^2}$

Наибольший $I_{\text{пред}}$ будет в 1-ом случае.

Подбором можно заставить ведомое звено машины двигаться с наперед заданным отклонением от некоторой скорости

$$M_J = M_{\text{об}} - M_{\text{смам}} = I_{\max} \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{M_{\text{об}} - M_{\text{смам}}}{I_{\max}} = I_{\max} \quad (7.11)$$

Если $M_{\text{стат}}$ уменьшается, то ε — увеличивается, следовательно, $I_{\text{пру}}$ уменьшается, следовательно, увеличивается кинетическая энергия машины $T = (I\omega^2)/2$. Если $M_{\text{стат}}$ увеличивается, падают, $I_{\text{пру}}$ падает и кинетическая энергия, маховик называется аккумулятор кинетической энергии.



Рис.7.5. Маховичный привод

Если нет маховика $I_m=0$, то $M_{\text{дк}}=M_{\text{стат}}$

Для начального момента $M_{\text{дк}}=M_{\text{стат}}+\varepsilon I_{\max}$ — разгон системы

Для работающей системы

$M_{\text{дк}}=M_{\text{стат}}-\varepsilon I_{\min}$ — торможение системы

Расчет маховиков способом касательных сил (Радингер) для неравномерно установившегося движения.

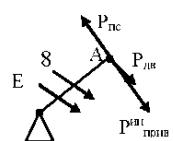
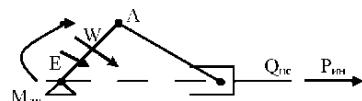


Рис.7.6. Расчет маховика

При решении задач на движение способом кинетостатики надо учесть силы инерции.

$$P_{\partial\sigma} - P_{\text{nc}} \cdot P_{\text{прив}}^{\text{ин}} = 0$$

$$P_{un} - P_{un}' + P_{un}'' \quad (7.13)$$

$$P_{un}' \rightarrow \omega = const$$

P_{un}'' — дополнительные силы инерции.

$$P_{\partial\theta} - P_{nc} \pm P_{un}' \pm P_{un}'' = 0; \quad P_{\partial\theta} \pm P_{un}' = P_t \quad \text{— касательные тангенциальное усилие}$$

$$P_t - P_{nc} - P_{un}'' = 0 \quad (7.14)$$

Запишем уравнение работ

$$A_{\text{пл}} \pm A_{p\text{ ип}}' \pm A_{p\text{ ип}}'' - A_{nc} = 0, \text{ здесь опущена работа весов и сил трения}$$

$$A_{pt} \pm A_{p\text{ ип}}'' - A_{nc} = 0, \text{ за один цикл будем иметь}$$

$$A_{\text{пл}} = A_{nc}; \quad A_{pt} = A_{nc} \quad A_{pt} = \int_0 T ds = F \cdot \mu r \cdot \mu s \quad \text{за цикл} \quad (7.15)$$

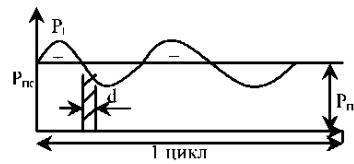


Рис.7.7. Положение механизма

Обычно закон изменения силы полезного сопротивления выражается прямой линией

$$P_{nc} = \frac{F \cdot \mu r \cdot \mu s}{S} \quad (7.16)$$

Избыточные площади \oplus и \ominus в сумме за один цикл должны быть равны 0
Внутри цикла процесс движения неравномерен.

$$T = \frac{I(\omega_b^2 - \omega_a^2)}{2} = F_{изб} \oplus; \quad T = \frac{I(\omega_b^2 - \omega_c^2)}{2} = F_{изб} \ominus \quad (7.17)$$

Наибольшее изменение кинетической энергии на участке, где $F_{изб}$ будет иметь максимальное значение.

$$(I_{max} (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2)) / 2 = F_{max}; \quad I_{max} \delta \omega_{cp}^2 = F_{max};$$

$$\frac{I_{max}(\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2)}{2} = F_{max};$$

$$I_{max} = \frac{F_{max} \cdot \mu p \cdot \mu s}{\delta \omega_{cp}^2 I} = \frac{G \Delta^2}{4g}$$

$$G \Delta^2 = \frac{4g F_{max} \cdot \mu p \cdot \mu s}{\delta \omega_{cp}^2} \quad (7.18)$$

Пример: маховик является регулятором скорости (Расчет методом Виттенбауэра)

Мы имеем на графике скорости ползуна график силы резания P_c . Используя эти два графика, находим приведенный момент по формуле

$$M_{c_priv} = (P_c / \omega_1) V_E, \text{ где } \omega_1 = (n/30) = (350 \cdot 3,14) / 30 = 36,63 \text{ м/с}$$

Скорость V_E берем из графика

N	0	1	2	3	4	5	6
V_E	0	9,8	12,6	10,5	7,35	3,85	0
P_c / ω_1							
M_c	0	1337, 7	1719, 9	1433, 3	1003, 3	525,5	0

Используя полученные данные таблицы, строим график зависимости

$M_{c_priv} = f(\varphi)$ — для одного оборота.

Используя график скорости, находим приведенный момент инерции

$$I_{priv} = m_5 (V_E / \omega_1)^2 - (G_5 / \omega_1^2) g V_E^2, \text{ где } G_5 = 1000 \text{ Н}$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_5, g , ω_1^2	0	9,8			0,0 7	45							
V_E	0	9,8	12,6	10, 5	7,3 5	3,8 5	0	3,8 5	7,3 5	10, 5	12, 6	9,8 0	

V_E^2	0	96, 04	158,6	110 ,25	54	14, 82	0	14, 82	54	110 ,25	158 ,76	9,0 4	0
$I_{\text{прив}}$	0	7,1 5	11,83; 8,21		4,2	1,1	0	1,1	4,0 2	8,2 1	11, 83	7,1 5	0

Используя полученные данные таблицы, строим график зависимости

$$f_{\text{прив}} = f(\varphi)$$

Определяем ω_{\max} и ω_{\min}

$$\omega_{\max} = \omega_1(1 + 0,2/2) = 36,63(1 + 0,2/2) = 40,8 \text{ 1/сек}$$

$$\omega_{\min} = \omega_1(1 + 0,2/2) = 36,63(1 + 0,2/2) = 32,97 \text{ 1/сек}$$

Определяем ψ_{\max} и ψ_{\min}

$$\psi_{\max} = \arctg\left(\frac{MI}{MA} \cdot \frac{\omega_{\max}^2}{2}\right) = \arctg\left(\frac{0,1}{26} \cdot \frac{10,9}{2}\right) = 72^\circ$$

$$\psi_{\max} = \arctg\left(\frac{MI}{MA} \cdot \frac{\omega_{\min}^2}{2}\right) = \arctg\left(\frac{0,1}{26} \cdot \frac{32,97}{2}\right) = 64^\circ$$

μ_a — масштаб работы, находится из графика работы

$$\mu_a = \mu_m H \mu \varphi = 50 \cdot 20 \cdot 2,6 \cdot 10^{-2} = 26,$$

где $\mu_m = 50$ — масштаб; μ_c — выбирается произвольно;

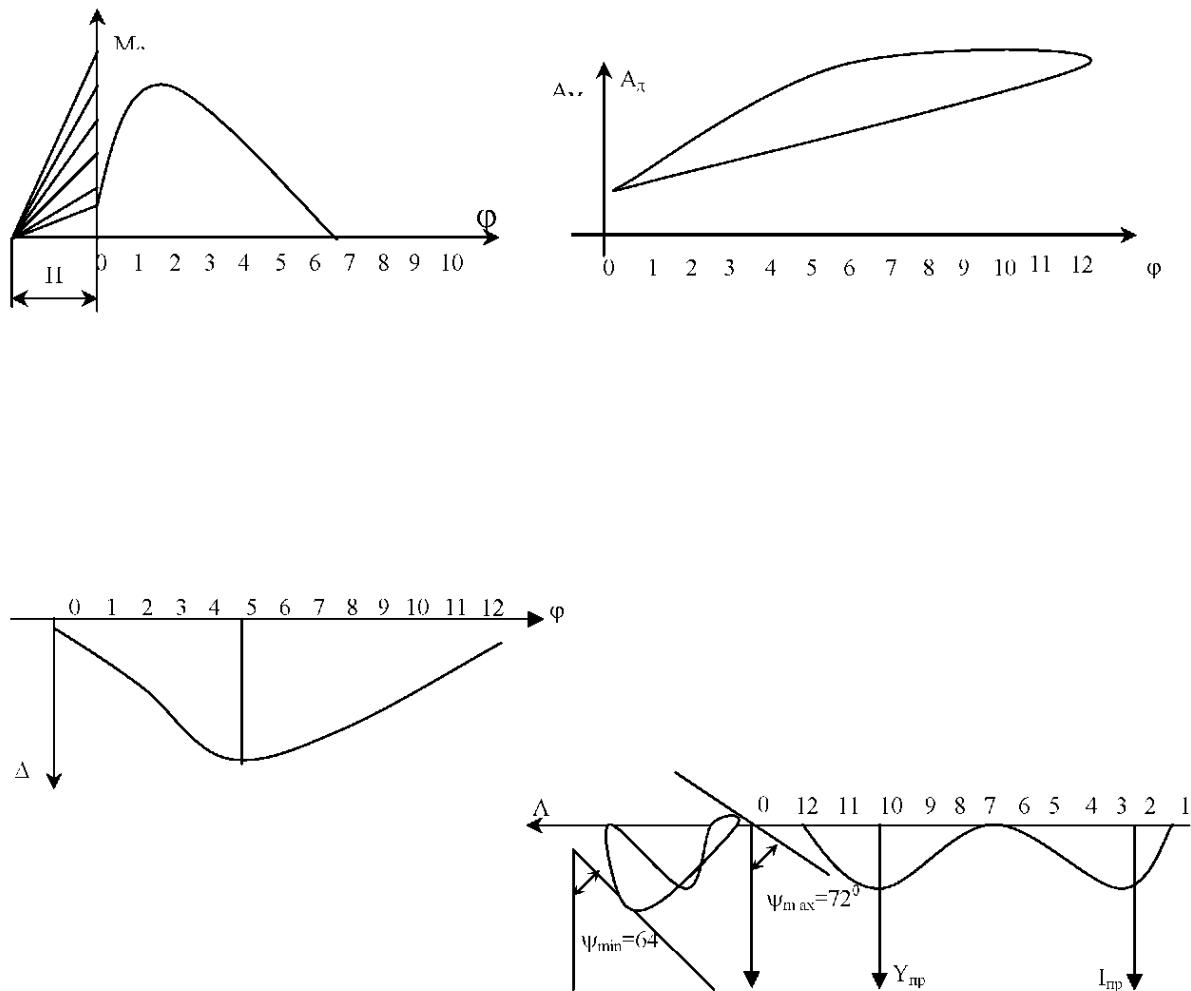
$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{L} = \frac{2 \cdot 3,14}{240} = 2,6 \cdot 10^{-2}$$

Интегрируем график момента.

Находим момент инерции маховика

$$I_{\max} = \frac{ab\mu A}{\omega^2 \delta} = \frac{354,26}{1341,76 \cdot 0,2} = 35,3 \text{ [кг/м³]},$$

где а и б берется из графика.



$$\mu_{mc} = 50 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{мм}; M_\phi = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ (рад}/\text{мм})$$

$$\mu_g - \mu_a = 26 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{мм}; \mu_{y_прие} = 1 \cdot 10^{-1} \text{ (кг}\cdot\text{м}/\text{мм}); \mu_a = 26 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{мм}$$

Рис.7.8. Расчет методом Виттенбауэра

Контрольные вопросы

- 7.1. Приведите примеры различных режимов движения механизма
- 7.2. Каково назначение и принцип действия регулятора числа оборотов
- 7.3. Маховик: подбор его момента инерции
- 7.4. Как определить место установки маховика
- 7.5. В чем заключается расчет маховика

ЛЕКЦИЯ 8. УРАВНОВЕШИВАНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

При равномерном вращении тела A вокруг оси u и каждой элементарной массе m можно считать приложенной силу инерции. Величина центробежной силы инерции P для массы m , удаленной от оси вращения на расстояние r может быть подсчитана

$$P = mr\omega^2 = m \Sigma \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2, \quad (8.1)$$

где P — центробежная сила инерции; m — масса; r — радиус вращения; n — число оборотов в минуту вала

Пример: Пусть $m=0,1\text{ кг}$, $r=1\text{ м}$, $n=30\text{ об/мин}$

$P \approx 1\text{ кг}$, если $n=30000\text{ об/мин}$, то $P \approx 1000000\text{ кг}$ то есть в быстроходных машинах и механизмах силы инерции могут достигать огромных величин. Силы инерции P вызывают деформацию тела и нагружают опоры вала.

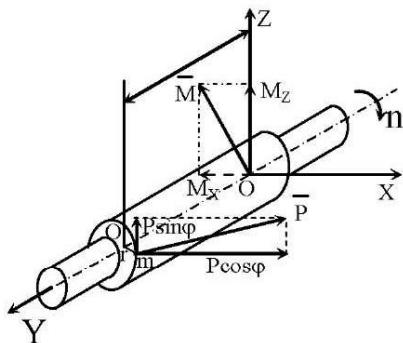


Рис.8.1. Плоскость координат z,x

Выберем плоскость координат z,x так чтобы эта плоскость проходила через центр масс тела S . Сила инерции P создает относительно осей z и x моменты M_z и M_x , разложим силу P .

$$M_z = Pl \cos \varphi, \quad M_z = mr\omega^2 l \cos \varphi$$

$$M_x = Pl \sin \varphi, \quad M_x = mr\omega^2 l \sin \varphi$$

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_x^2} = \sqrt{m^2 r^2 \omega^4 l^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = mr\omega^2 l \quad (8.2)$$

$$\text{отношения моментов } \frac{M_x}{M_z} = \frac{mr\omega^2 \sin\varphi}{mr\omega^2 \cos\varphi} = \tan\varphi$$

То есть вектор момента M всегда перпендикулярен вектору силы инерции P и вектору радиуса r .

Вращающееся тело состоит из бесчисленного множества элементарных масс m_i , удаленных на расстояние r_i от оси вращения и на расстояние l_i от плоскости z,x , поэтому результирующая сила инерции всего тела будет

$\overline{P} = \omega^2 \sum m_i r_i$, а результирующий момент всех сил инерции тела относительно оси, лежащей в плоскости z, x и проходящей через точку 0 $\overline{M} = \omega^2 \sum m_i [r_i l_i]$.
 $\sum m_i r_i$ — называется статическим моментом, $\overline{P} = \omega^2 m r_s$.

$\Sigma m_i[r_i l_i]$ — называется центробежным моментом инерции, $\overline{M} = \omega^2 J_{\perp}$.

Тело считается полностью уравновешенным, если результирующая сила инерции и результирующий момент сил инерции равны 0.

Условиями полной уравновешенности тела являются

$$(1) \quad m r_s = \sum m_i r_i = 0 \quad (2) \quad J_{ri} = m_i [r l_i] = 0 \quad (8.3)$$

уравновешено статически уравновешено динамически

Условие (1) будет выполняться только в том случае, когда $r_s=0$, то есть центр масс тела S лежит на оси вращения. Условие (2) $J_r=0$ выполняется только относительно главных осей инерции тела, то есть когда ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции тела.

Условия (1) и (2) будут выполнены одновременно, если ось вращения тела совпадает с одной из главных центральных осей инерции тела, то есть такой главной осью инерции, которая проходит через центр масс тела S .

Допустим, что тело A не уравновешено только статически, то есть центр масс этого тела S смещен на расстояние r_s от оси вращения, но ось вращения является одной из главных осей инерции, то есть $J_{rt}=0$.

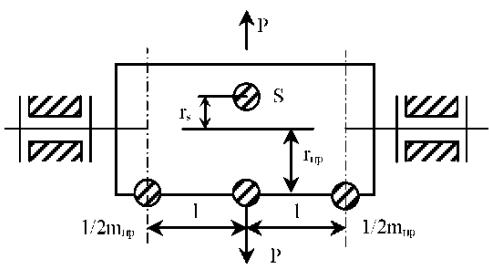


Рис.8.2. Уравновешивание твердого вращающегося ротора

В простейшем случае противовес помещают на линии, проходящей через центр масс S по другую сторону от оси вращения на расстоянии r_{np} от оси вращения. Массу противовеса определяют из условия $m_{np}r_{np} = mr_{np}$, откуда $m_{np} = r_S / (mr_{np})$. Если невозможно разместить m_{np} , то берут два противовеса массами $1/2m_{np}$, но помещают так, чтобы $l-l$, чтобы не нарушилась динамическая уравновешенность тела.

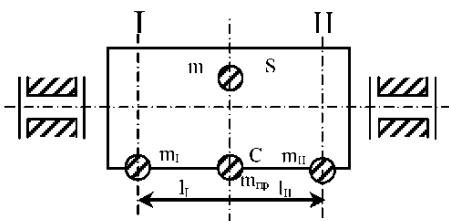


Рис.8.3. Уравновешивание твердого вращающегося ротора

Если отказаться от условия равенства масс обоих противовесов, то статическое уравновешивание можно произвести без нарушения динамической неуравновешенности при помощи двух противовесов, расположенных в двух произвольных, но заранее выбранных, плоскостях I и II, эти плоскости называются плоскостями направления. Массы противовесов m_I и m_{II} можно определить из уравнений

$$m \cdot r_S - m_I \cdot r_{np} - m_{II} \cdot r_{np} \quad m_I \cdot r_S \cdot l_I - m_{II} \cdot r_S \cdot l_{II} = 0$$

откуда $m_I = r_S l_{II} / (mr_{np} (l_I + l_{II}))$ и $m_{II} = m_I \cdot r_S \cdot l_I / (mr_{np} (l_I + l_{II}))$

Сложив массы этих противовесов получим $m_I + m_{II} - m \cdot r_S / r_{np} = m_{np}$, из их отношения $m_I / m_{II} = l_{II} / l_I$, откуда $m_I l_I = m_{II} l_{II}$

Отсюда видно, что один противовес с массой m_{np} может быть заменен двумя противовесами с массами m_I и m_{II} , подобранными так, чтобы их суммарная масса равнялась m , а общий центр масс (точка C) совпадал с положением противовеса m_{np} . Очевидно и обратное. Эти все положения справедливы только для случая, когда m_I и m_{II} расположены по линии, параллельной оси вращения тела.

Рассмотрим, случай, когда уравновешивается полностью неуравновешенное тело. Выберем удобные для постановки противовесов плоскости исправления I и II.

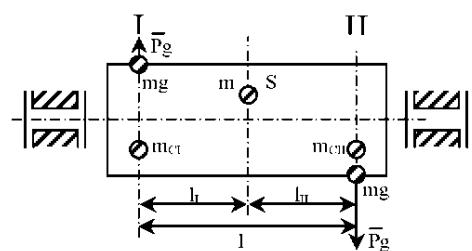


Рис.8.4. Статическая балансировка

Найдем массы противовесов m_{CI} и m_{CII} необходимые для статического уравновешивания. Если тело не уравновешено динамически, то его центробежный момент инерции J_n не равен 0 и результирующий момент сил инерции M не равен 0.

Предположим, что вектор момента M составляет с вектором результирующей силы инерции P угол α , и расположим тело так, чтобы на правой проекции вектор момента M , а значит и вектор J_n были направлены прямо на наблюдателя. Динамическую неуравновешенность можно устраниТЬ одним противовесом m_g , подбрав его так, чтобы центробежный момент инерции этого противовеса $m_g r_{np} l$ был равен J_n и противоположен ему по знаку.

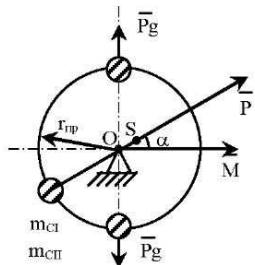


Рис.8.5. Динамическая балансировка

Тогда и момент силы инерции противовеса будет противоположен результирующему моменту M и суммарный момент окажется равным 0. Однако при такой постановке противовеса для динамического уравновешивания снова нарушится статическая уравновешенность. Поэтому динамическую неуравновешенность устраниют при помощи двух одинаковых противовесов с массами m_g , расположенных в плоскостях I и II по разные стороны от оси вращения тела.

Массы противовесов m_g определяются из условия $r_{np}l_I + m_g + r_{np} + l_I = J_{rl}$, откуда

$$m_g = J_{rl} / (r_{np}(l_I + l_{II})) = J_{rl} / (r_{np}l), \quad (8.4)$$

где l — расстояние между плоскостями исправления

Поставить m_g надо так, чтобы момент сил инерции этих противовесов уравновешивал результирующий момент M .

Контрольные вопросы

- 8.1. В чем заключается статическая балансировка.
- 8.2. В чем заключается динамическая балансировка.
- 8.3. В чем заключается уравновешивание твердого вращающегося ротора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов, - М.: Наука, 1967
2. Кожевников С. Н. Теория механизмов и машин, – М.: Машгиз, 1954,-310 с.
3. Зиновьев В.А. Курс теории механизмов и машин, – М.: Наука, 1972,-384 с.
4. Артоболевский И.И., Зиновьев В.А., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин, – М.: Гостехиздат, 1955
5. Баранов Г.Г. Курс теории механизмов и машин, – М.: Машгиз, 1959,-487 с.
6. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин, – М.: Гостехиздат, 1973,-256с.
7. Кореняко А.С. Крепнштейн Б.В. и др. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин, Высш. шк. Киев,1970,-330с.
8. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин, – Высш. шк. Киев,1986