

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ
ИССЛЕДОВАНИЕ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА
Методическое пособие к расчетно-графической работе

Методическое пособие содержит сведения по решению задач, возникающих при исследовании рычажных механизмов. Рассматриваются структура механизма, кинематическое исследование, динамическая модель, определение закона движения, силовой расчет. Приводятся аналитические и графо-аналитические методы исследования. Примеры оформления расчетно-графической работы выполнены – одно в среде MathCAD, второе в среде Excel.

Методическое пособие адресовано студентам направления «200100 Приборостроение», «200200 Опотехника» и специальности «220401 – Мехатроника».

1. ЦЕЛЬ И ОБЪЕМ РАБОТЫ

Цель расчетно-графической работы – изучение методики и получение навыков решения задач, возникающих при кинематическом и динамическом исследовании рычажного плоского механизма.

Содержание пояснительной записки.

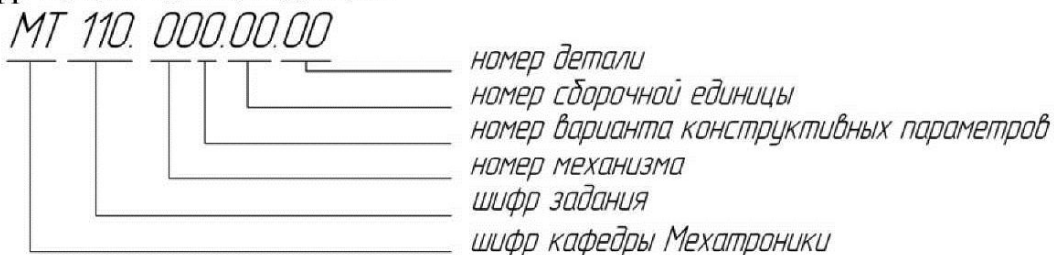
1. Описание и структурный анализ механизма.
2. Кинематический анализ.
 - 2.1. Функции положения.
 - 2.2. Разметка траекторий.
 - 2.3. Скорость и ускорения звеньев и точек механизма.
 - 2.4. Планы скоростей и ускорений.
3. Динамический анализ.
 - 3.1. Динамическая модель механизма.
 - 3.2. Приведенная масса механизма.
 - 3.3. Приведенная сила механизма.
 - 3.4. Закон движения механизма.
 - 3.5. Главный вектор и главный момент сил инерции звеньев.
 - 3.6. Расчет реакций в кинематических парах

Пояснительная записка оформляется как текстовый конструкторский документ по правилам ЕСКД с титульным листом, содержанием и списком литературы.

Техническое задание расчетно-графической работы оформляется на отдельном листе и вставляется в пояснительную записку перед содержанием.

Исходными данными для расчетно-графической работы являются: а) конструкторская и кинематическая схема механизма, б) конструктивные параметры звеньев механизма.

Шифр пояснительной записки



Движение исследуемого механизма установившиеся с периодом поворота ведущего звена на угол 360° . При динамическом анализе рекомендуется применять численные методы интегрирования и дифференцирования, поэтому расчеты проводятся для n положений с шагом $\Delta\varphi = 360^\circ / n$. В учебном проекте рекомендуется принимать $n=24$ (минимально допустимое значение $n=12$).

Расчеты могут проводиться с использованием любого программного обеспечения – Mathcad, Excel, Matlab, C и др. В приложении приводятся два примера оформления задания. Один выполнен в среде MathCad, второй – в среде Excell.

2. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ

Кинематическую схему механизма построить в масштабе и определить число подвижных звеньев n , число кинематических пар пятого класса p_5 , число кинематических пар четвертого класса p_4 и вычислить степень подвижности механизма f по формуле Чебышева

$$f = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - 1 \cdot p_4 .$$

В механизме произвести замену высших кинематических пар (пары 4-го класса) на низшие пары, и разбить кинематическую цепь на группы Асура.

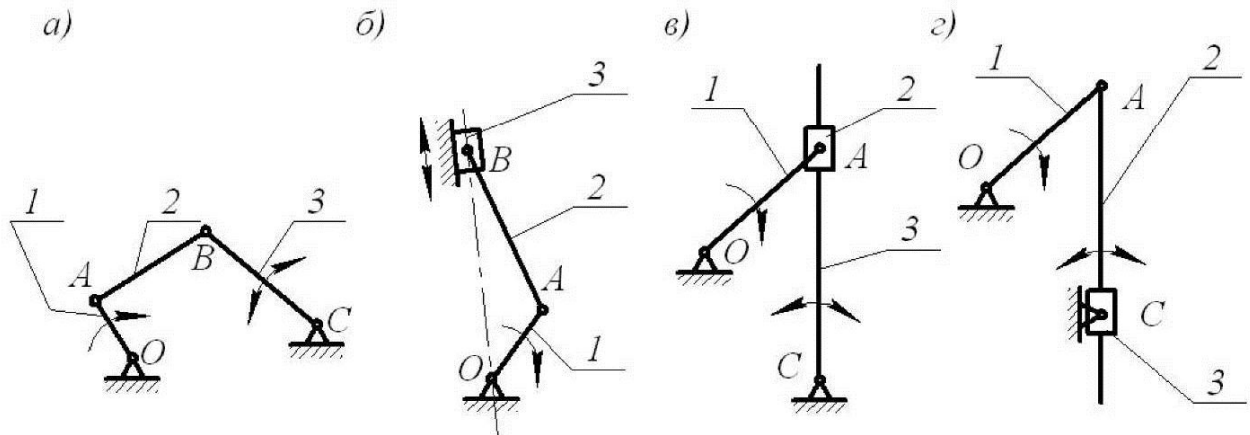


Рис. 1. Кинематические схемы механизмов

На рис.1 показаны примеры кинематических схем механизмов с низшими кинематическими парами: а) шарнирный четырехзвенный, б) кривошипно-позунный, в) кривошипно-кулисный, в) коромысло-кулисный

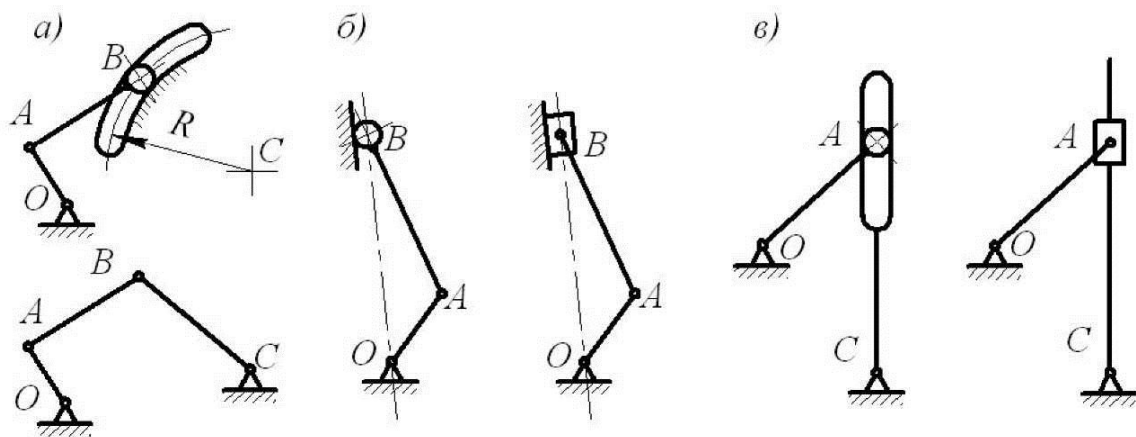


Рис. 2. Замена высших кинематических пар

Замена кинематических пар высших на низшие в схемах механизмов показано на рис.2.

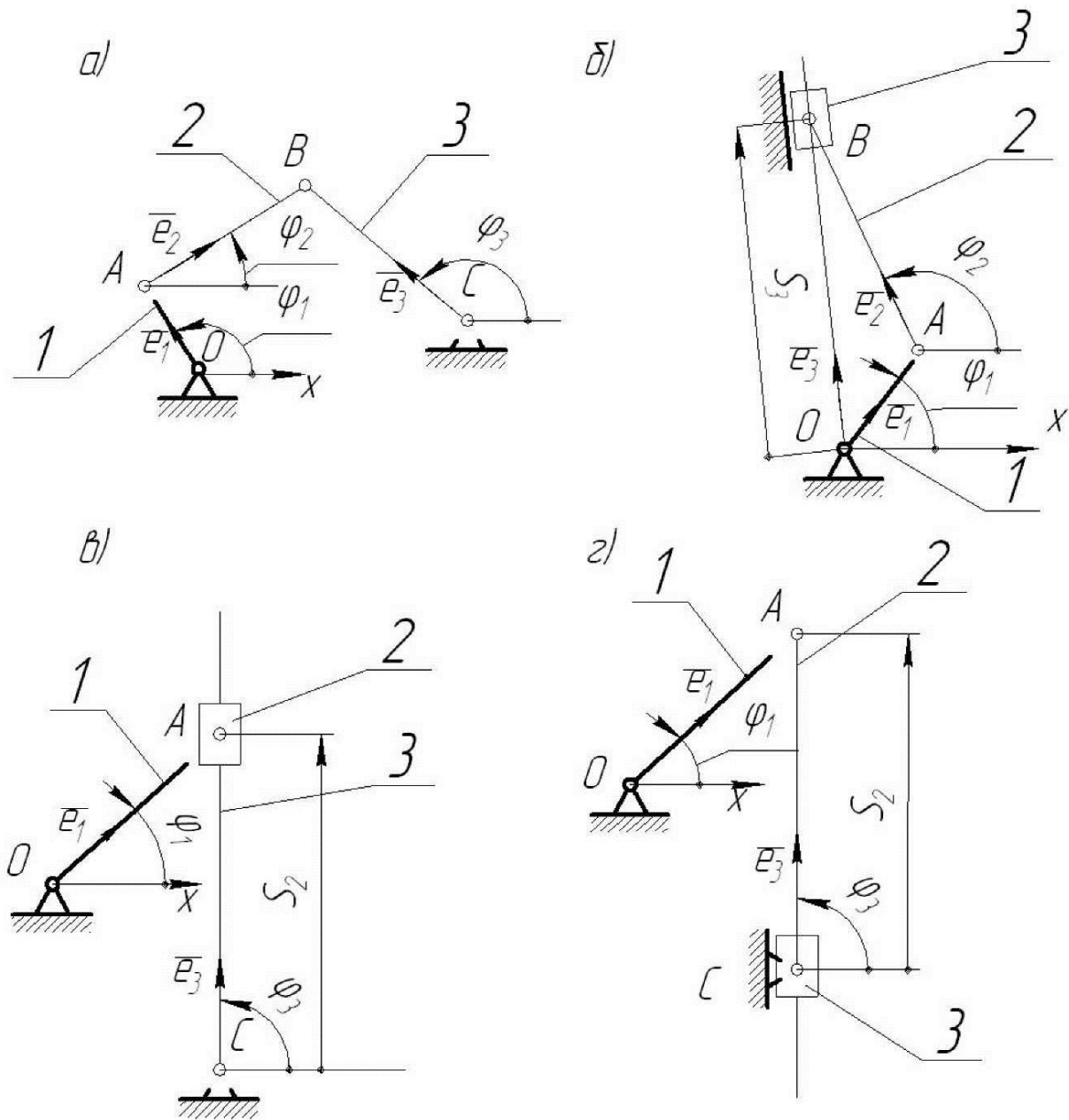


Рис. 3. Разбивка механизма на группы Асура

На рис. 3 показана разбивка этих кинематических цепей на ведущее звено и группы Асура.

3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Общие сведения

Кинематический анализ плоских шарнирных механизмов имеет целью произвести построение траекторий, определение скоростей и ускорений звеньев и отдельных точек при заданном законе движения ведущего звена.

Траектории различных точек механизма позволяет конструктору выбрать рациональную форму корпуса. По траектории точки рабочего органа оценивается соответствие механизма условиям требуемого рабочего процесса. Траектории основных точек звеньев могут использоваться для построения графиков и диаграмм перемещений. При аналитическом построении траекторий необходимо знание функций положения механизма.

Скорости и ускорения звеньев и точек механизмов используются при динамическом исследовании – это определение мощности сил, кинетической энергии звеньев, сил инерции, реакций в кинематических парах.

Определение функций положения, скоростей и ускорений может осуществляться различными методами: графическими, графоаналитическими и аналитическими методами. Наибольшей наглядностью и простотой обладают графические методы, но погрешность расчета параметров до 10%. Современные пакеты программ персональных компьютеров позволяют широко применять аналитические методы.

В данном пособии рассматриваются аналитический и графо-аналитический методы.

3.2. Функции положения механизма

Механизм имеет n звеньев, и положение звеньев соответственно определяется вектором параметров $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$. Пусть механизм имеет число степеней свободы $f = 1$, тогда из вектора параметров независимым параметром (обобщенной координатой) будет только один, а остальные параметры будут зависеть от него. Примем за обобщенную координату угол поворота φ_1 ведущего звена. Функции вида $\varphi_i = \varphi_i(\varphi_1)$, $i = 2, 3, \dots, n$, называются функциями положения механизма.

Для определения функций положения плоского механизма применяется метод замкнутого векторного многоугольника. Когда к исходному механизму присоединяется группа Асура, получаем замкнутую кинематическую цепь, которую представляем как сумму векторов. Для механизмов на рис. 1 и 2 векторное представление кинематической цепи приведено в таблице 1.

Любой вектор можно представить в виде $\vec{a} = a \cdot \vec{e}$, где a - модуль вектора, \vec{e} - орт вектора. Направление орта \vec{e} будем определять углом φ , и отсчитывать его

Таблица 1. Функции положения механизмов

Рис. № 1 и 2	Цепь механизма кинематическая	Многогранник векторный	Уравнение векторное расчетное	Функция положения в неявном виде
а	[O, A, B, C, O]	$OA + AB + BC + CO = 0$ $OA + AB = OC + CB$	$\bar{e}_1 l_1 + \bar{e}_2 l_2 = OC + \bar{e}_3 l_3$	$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = x_c + l_3 \cos \varphi_3$ $l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = y_c + l_3 \sin \varphi_3$
б	[O, A, B, O]	$OA + AB + BO = 0$ $OA + AB = OB$	$\bar{e}_1 l_1 + \bar{e}_2 l_2 = \bar{e}_3 S_3$	$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = 0_3$ $l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = S_3$
в	[O, A, C, O]	$OA + AC + CO = 0$	$\bar{e}_1 l_1 = OC + \bar{e}_3 S_2$	$l_1 \cos \varphi_1 = x_c + S_2 \cos \varphi_3$
г		$OA = OC + CA$		$l_1 \sin \varphi_1 = y_c + S_2 \sin \varphi_3$

будем от оси Ox против часовой стрелки (см. рис. 3). Запишем проекции орта в векторной и матричной форме

$$\bar{e} = \bar{i} \cos \varphi + \bar{j} \sin \varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Для ведущего звена 1 орт \bar{e}_1 будем прикладывать в точке O . Для звена группы Асура орт \bar{e}_i приложим к внешней кинематической паре и направим к внутренней.

Данное представление векторов позволяет из уравнения векторного многогранника получить расчетное векторное уравнение, проекции которого на оси координат являются функциями положения механизма в неявном виде (см. табл. 1).

Для шарнирного четырехзвенного механизма (рис. 1 а) после преобразований исходных уравнений получим функции положения

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(y_c - l_1 \sin \varphi_1) + l_3 \sin \varphi_3}{(x_c - l_1 \cos \varphi_1) + l_3 \cos \varphi_3}.$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2} \right)_{1,2} = \frac{-(y_c - l_1 \sin \varphi_1) \pm \sqrt{(x_c - l_1 \cos \varphi_1)^2 + (y_c - l_1 \sin \varphi_1)^2 - z^2}}{[z - (x_c - l_1 \cos \varphi_1)]}.$$

$$z = [(x_c - l_1 \cos \varphi_1)^2 + (y_c - l_1 \sin \varphi_1)^2 + l_3^2 - l_2^2] / (2l_3).$$

Если к механизму присоединяется новая группа Асура (см. рис. 4 а), то получаем новый замкнутый контур [O, A, D, F, K, O], и представим его как векторный многогранник

$$\overline{OA} + \overline{AC} + \overline{CF} = \overline{OK} + \overline{KF}.$$

Функции положения в неявном виде

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_c \cos(\varphi_2 - \alpha) + l_4 \cos \varphi_4 = x_k.$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_c \sin(\varphi_2 - \alpha) + l_4 \sin \varphi_4 = S_5.$$

Функции положения звеньев 4 и 5 в зависимости от параметров φ_1 и φ_2

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{l_1 \sin \varphi_1 + l_c \sin(\varphi_2 - \alpha) - S_5}{l_1 \cos \varphi_1 + l_c \cos(\varphi_2 - \alpha) - x_k}.$$

$$S_5 = [l_1 \sin \varphi_1 + l_c \sin(\varphi_2 - \alpha)] \pm \sqrt{l_4^2 - [l_1 \cos \varphi_1 + l_c \cos(\varphi_2 - \alpha) - x_k]^2}.$$

При решении тригонометрических уравнений всегда получаем два корня, и здесь возникает проблема отбора корня.

При решении графическими методами функции положения представляются в табличной форме, для этого строится n положений механизма, и замеряются параметры, определяющие положения звеньев.

3.3. Разметка траекторий

Как известно из курса теоретической механики, под траекторией точки понимается непрерывная кривая, которую точка описывает в процессе своего движения. Такие траектории практически легко построить, если точка принадлежит звену, совершающему вращательное или поступательное движение. Для построения траекторий точек, принадлежащих звеньям, совершающим плоское движение, применяют приближенный метод. Определяют несколько положений перемещающей точки и соединяют их плавной кривой. Построенная кривая может с некоторым приближением рассматриваться как траектория движущейся точки.

Графически разметка траекторий плоских механизмов осуществляется методом засечек и по существу сводится к построению ряда различных положений механизма. Примеры построения траекторий приведены на рис. 4.

Разметка траектории аналитически сводится к определению радиуса-вектора точки, расчета её координат при различных значениях угла φ_1 положения ведущего звена и построения траектории по координатам точки.

Для механизма (рис. 4 а) радиус-вектор точки С зададим в виде

$$\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{e}_1 l_1 + \vec{e}_2 l_C = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 + l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) \end{bmatrix}.$$

Для кулисного механизма (рис. 4 в) радиус-вектор точки В

$$r_B = OA + AB = e_1 l_1 - e_3 l_{AB} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 - l_{AB} \cos \varphi_3 \\ l_1 \sin \varphi_1 - l_{AB} \sin \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Здесь предполагается, что функции положения механизма известны и вычислены параметры, определяющие положения всех звеньев.

3.4. Скорости и ускорения звеньев и точек механизма

При кинематическом исследовании механизма считаем, что закон движения ведущего звена известен

$$\varphi_1 = \varphi_1(t),$$

следовательно, известны угловая скорость и угловое ускорение точки А

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}.$$

Уравнение движения любого звена механизма можно задать в неявном виде

$$\varphi_i = \varphi_i(\varphi_1), \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(t)$$

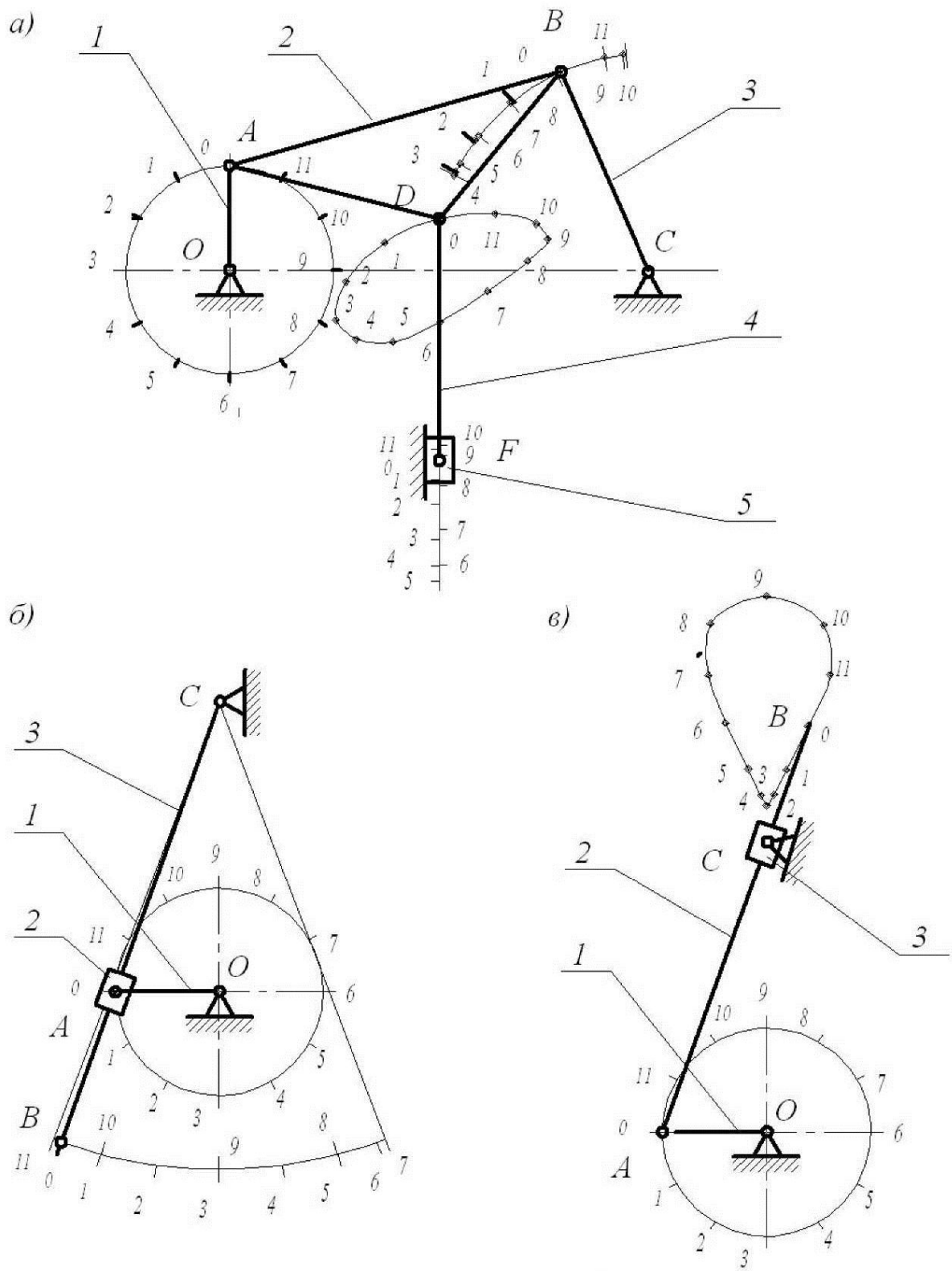


Рис. 4. Разметка траекторий

Отсюда угловая скорость и угловое ускорение звена

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi_i' \omega_1.$$

$$\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\varphi_i' \omega_1) = \varphi_i' \varepsilon_1 + \frac{d\varphi_i'}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \omega_1 = \varphi_i' \varepsilon_1 + \varphi_i'' \omega_1^2.$$

где $\varphi_i' = \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}$ - аналог угловой скорости звена, $\varphi_i'' = \frac{d\varphi_i'}{d\varphi_1} = \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2}$ - аналог углового

ускорения звена. Следует заметить, что функции $\varphi_i = \varphi_i(\varphi_1)$, $\varphi_i' = \varphi_i'(\varphi_1)$.

$\varphi_i'' = \varphi_i''(\varphi_1)$, не зависят от закона движения ведущего звена и определяются схемой механизма и его размерами.

Для получения значений функций φ_i' и φ_i'' рекомендуется дифференцировать функции положения, заданные в неявном виде.

Продифференцируем дважды по параметру φ_1 функции положения механизма (рис. 1 а, табл. 1)

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_2' l_2 \sin \varphi_2 &= -\varphi_3' l_3 \sin \varphi_3 \\ l_1 \cos \varphi_1 + \varphi_2' l_2 \cos \varphi_2 &= \varphi_3' l_3 \cos \varphi_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \cos \varphi_1 - \varphi_2'' l_2 \sin \varphi_2 - \varphi_2' \varphi_2' l_2 \cos \varphi_2 &= -\varphi_3'' l_3 \sin \varphi_3 - \varphi_3' \varphi_3' l_3 \cos \varphi_3 \\ -l_1 \sin \varphi_1 + \varphi_2'' l_2 \cos \varphi_2 - \varphi_2' \varphi_2' l_2 \sin \varphi_2 &= \varphi_3'' l_3 \cos \varphi_3 - \varphi_3' \varphi_3' l_3 \sin \varphi_3 \end{aligned} \right\}$$

Относительно φ_2' , φ_3' , φ_2'' и φ_3'' получены линейные уравнения, из решения которых имеем

$$\varphi_2' = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}, \quad \varphi_3' = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

$$\varphi_2'' = \frac{1}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} [-l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - \varphi_2' \varphi_2' l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \varphi_3' \varphi_3' l_3].$$

$$\varphi_3'' = \frac{1}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} [-l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_2' \varphi_2' l_2 + \varphi_3' \varphi_3' l_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)].$$

Производные функций положения кулисного механизма в неявном виде (рис. 1 в и г, табл. 1)

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 &= S_2' \cos \varphi_3 - \varphi_3' S_2 \sin \varphi_3 \\ l_1 \cos \varphi_1 &= S_2' \sin \varphi_3 + \varphi_3' S_2 \cos \varphi_3 \end{aligned} \right\}.$$

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \cos \varphi_1 &= S_2'' \cos \varphi_3 - 2S_2' \varphi_3' \sin \varphi_3 - \varphi_3'' S_2 \sin \varphi_3 - \varphi_3' \varphi_3' S_2 \cos \varphi_3 \\ -l_1 \sin \varphi_1 &= S_2'' \sin \varphi_3 + 2S_2' \varphi_3' \cos \varphi_3 + \varphi_3'' S_2 \cos \varphi_3 - \varphi_3' \varphi_3' S_2 \sin \varphi_3 \end{aligned} \right\}.$$

Аналог угловой скорости и углового ускорения кулисного механизма

$$S_2' = -l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3), \quad \varphi_3' = l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) / S_2.$$

$$S_2'' = l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - \varphi_3' \varphi_3' S_2, \quad \varphi_3'' = [l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + 2\varphi_3' S_2'] / S_2.$$

Аналогично выводятся функции аналога скорости и ускорения кривошипно-ползунного механизма (рис. 1 б, табл. 1).

Для получения скорости и ускорения точки звена необходимо продифференцировать по времени её радиус-вектор.

Радиус-вектор точки С звена 2 механизма (рис.4 а)

$$r_C = \begin{pmatrix} l_1 \cos \varphi_1 + l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) \end{pmatrix}.$$

Скорость точки С

$$\bar{V}_C = \omega_1 \begin{vmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_2' l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) \\ l_1 \cos \varphi_1 + \varphi_2' l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) \end{vmatrix} = V_A \begin{vmatrix} -\sin \varphi_1 - \varphi_2'(l_C/l_1) \sin(\varphi_2 - \alpha) \\ \cos \varphi_1 + \varphi_2'(l_C/l_1) \cos(\varphi_2 - \alpha) \end{vmatrix}.$$

Ускорение точки С

$$\bar{a}_C = \varepsilon_1 \begin{vmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_2' l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) \\ l_1 \cos \varphi_1 + \varphi_2' l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) \end{vmatrix} + \omega_1^2 \begin{vmatrix} -l_1 \cos \varphi_1 - \varphi_2'' l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) - \varphi_2' \varphi_2' l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) \\ -l_1 \sin \varphi_1 + \varphi_2'' l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) - \varphi_2' \varphi_2' l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) \end{vmatrix}$$

Это выражение преобразуем к виду

$$\bar{a}_C = \left(\varepsilon_1 \begin{vmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 \end{vmatrix} - \omega_1^2 \begin{vmatrix} l_1 \cos \varphi_1 \\ l_1 \sin \varphi_1 \end{vmatrix} \right) + (\varepsilon \varphi_2' + \omega_1^2 \varphi_2'') \begin{vmatrix} -l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) \\ l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) \end{vmatrix} - \omega_1^2 \varphi_2' \varphi_2' \begin{vmatrix} l_C \cos(\varphi_2 - \alpha) \\ l_C \sin(\varphi_2 - \alpha) \end{vmatrix}$$

Здесь первое слагаемое – ускорение точки А, второе и третье слагаемое - соответственно касательное и нормальное ускорение точки С относительно точки А.

3.5. Планы скоростей и ускорений

Графоаналитический метод определения скоростей и ускорений базируется на основных положениях теоретической механики. В методе наряду с аналитическими зависимостями используются графические построения.

При кинематическом анализе принимается, что ведущее звено вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = const$, угловое ускорение $\varepsilon_1 = 0$. Данное допущение позволяет определить аналог скорости и аналог ускорения звена $\varphi_i' = \omega_i / \omega_1$ и $\varphi_i'' = \varepsilon_i / \omega_1^2$, не составляя и не дифференцируя функции положения механизма. Покажем метод на примерах механизмов.

Пример1. Кинематическая схема механизма представлена на рис. 5. Рассмотрим план скоростей звена 1. Скорость точки А - $V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$. Выберем полюс р плана скоростей и отложим от него вектор \overline{pa} , представляющий собой в масштабе K_V вектор скорости \overline{V}_A точки А. Вектор \overline{pa} перпендикулярен радиусу вращения OA и направлен в сторону вращения звена 1 и представляет собой план скоростей звена 1.

Масштаб плана скоростей

$$K_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{\omega_1 \cdot l_{OA}}{pa} \text{ (м/с)/мм,}$$

где скорость измеряется в м/с, а отрезок на плане скоростей - в мм.

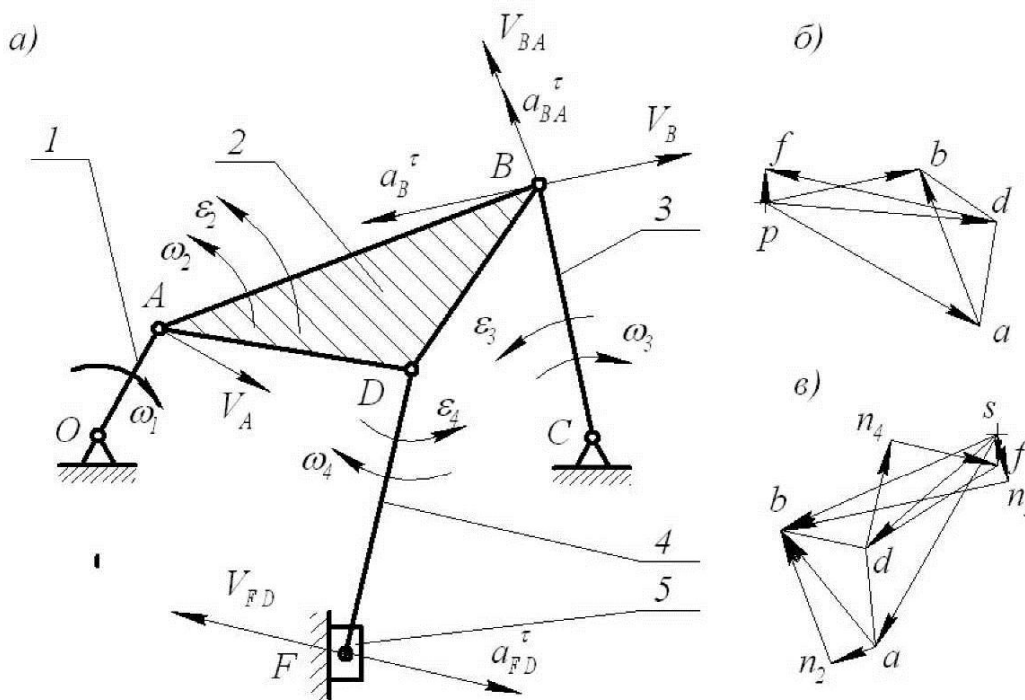


Рис. 5. Построение планов скоростей и ускорений

План скоростей группы Асура, состоящей из звеньев 2 и 3. Плоское движение звена можно разложить на поступательное движение произвольно выбранного полюса и вращательное вокруг этого полюса. Для звена 2, приняв за полюс точку А, скорость точки В определяется из векторного уравнения

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Для определения скорости точки С составим векторные уравнения

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA} = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}.$$

Вектор скорости точки А известен по величине и по направлению. Вектор скорости \vec{V}_B точки В, принадлежащей одновременно звену 3, известен по направлению \sqrt{BC} . Линия действия скоростей \vec{V}_{BA} , \vec{V}_{CA} , \vec{V}_{CB} также известны по направлению, $\vec{V}_{BA} \sqrt{AB}$, $\vec{V}_{CA} \sqrt{AC}$, $\vec{V}_{CB} \sqrt{BC}$. Полученные векторные уравнения решаются и аналитически, и графически (план скоростей).

При решении методом плана скоростей (см. рис. 5 б) проводим через точку а линию действия вектора $\vec{V}_{BA} \sqrt{AB}$, а через полюс р - линию действия скорости $\vec{V}_B \sqrt{BC}$. Пересечение прямых даёт точку b. Значение скорости точки В абсолютной V_B и относительной \vec{V}_{BA} в масштабе K_V

$$V_B = K_V \cdot \overline{pb}, \quad V_{BA} = K_V \cdot \overline{ab}.$$

Для определения скорости точки С на плане скоростей проведем через точку а линию действия скорости $\overline{V}_{CA} \sqrt{AC}$ и через точку b - линию действия скорости $\overline{V}_{CB} \sqrt{BC}$, линии пересекутся в точке с, которую соединим с полюсом р. Скорость точки С в масштабе K_V .

$$V_C = K_V \cdot \overline{pc}.$$

Для группы Асура, состоящей из звеньев 4 и 5, векторное уравнение для скорости точки D

$$\overline{V}_D = \overline{V}_C + \overline{V}_{DC}.$$

Вектор \overline{V}_C известен по величине и по направлению. Линия действия вектора $\overline{V}_{DC} \sqrt{CD}$. Линия действия вектора скорости \overline{V}_D , как точки D звена 5, параллельна линии перемещения звена 5. На плане скоростей через точку с проведем линию перпендикулярную \overline{CD} , а через полюс р – линию параллельную траектории точки D, пересекутся эти линий в точке d. Отсюда скорости

$$V_{DC} = K_V \cdot \overline{cd}, \quad V_D = K_V \cdot \overline{pd}.$$

Совокупность планов скоростей звеньев представляет план скоростей механизма.

Угловые скорости звеньев механизма соответственно

$$\omega_2 = V_{BA}/l_{AB}, \quad \omega_3 = V_B/l_{BC}, \quad \omega_4 = V_{DC}/l_{DC}.$$

Направление угловых скоростей определяется направлением вращательных скоростей относительно полюса.

План ускорений строится в той же последовательности, что и план скоростей.

План ускорений звена 1. Принято, что $\omega_1 = const$, $\varepsilon_1 = 0$, то ускорение точки А

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA} = V_A^2 / l_{OA}$$

направлено по радиусу от точки А центру вращения О. Выберем полюс плана ускорений s (см. рис. 5 в), и от него отложим вектор \overline{sa} , параллельный \overline{OA} и направленный от точки А к точке О. Масштаб плана ускорений

$$K_a = \frac{a_A^n}{\overline{pa}} \text{ (м/с}^2\text{)/мм.}$$

План ускорений группы Асура, состоящей из звеньев 2 и 3, Ускорение точки В, принадлежащей звену 2, совершающему плоское движение

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^l.$$

Ускорение точки В звена 3, совершающего вращательное движение

$$\overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^l.$$

Приравнивая правые части, получим

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^l = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^l.$$

В этом уравнении известны величины векторов нормальных ускорений

$$a_B^n = V_B^2 / l_{BC}, \quad a_{B,A}^n = V_{B,A}^2 / l_{AB},$$

и оба вектора направлены от точки В к соответствующим полюсам вращения. Известны также линии действия касательных ускорений $\bar{a}_B^t \perp \bar{a}_B^n$, $\bar{a}_{B,A}^t \perp \bar{a}_{B,A}^n$. Из полюса s откладываем вектор $\overline{sn_3} = K_a \cdot \bar{a}_B^n$ параллельно \overline{BC} и направленного от точки В к точке С, а затем через точку n_3 проводим линию действия вектора \bar{a}_B^t . Из точки а отложим вектор $\overline{an_2} = K_a \cdot \bar{a}_{B,A}^n$, параллельного \overline{AB} и направленного от точки В к точке А. Через точку n_2 проводим линию действия вектора $\bar{a}_{B,A}^t$. Пересечение прямых определит точку b. Прямая \overline{ab} есть план ускорений звена 2, а прямая \overline{sb} - план ускорений звена 3. Касательные ускорения

$$a_{B,A}^t = K_a \cdot \overline{bn_2}, \quad a_B^t = K_a \cdot \overline{bn_3}.$$

Ускорение точки С звена 2

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA} = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB},$$

где $a_{CA} = a_{BA} \cdot (l_{AC} / l_{AB})$, $a_{CB} = a_{BA} \cdot (l_{BC} / l_{AB})$.

Положение точки с на плане ускорений определяется методом засечек.

План ускорений группы Асура, состоящей из звеньев 4 и 5. Ускорение точки D

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC} = \bar{a}_B + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^t,$$

где ускорение $a_{DC}^n = V_{DC}^2 / l_{CD}$ параллельно \overline{CD} и направлено от точки D к точке С. Построение приведено на рис. 5 в. Прямая \overline{cd} представляет план ускорения звена 4, прямая \overline{sd} - план ускорений звена 5.

Направление угловых ускорений определяется направлением касательных ускорений положением центров вращения.

Пример 2. Рассмотрим кривошипно-кулисный механизм (см. рис. 1в и рис. 6). Механизм состоит из исходного механизма (стойка и звено 1) и группы Асура (звенья 2 и 3). Камень кулисы (звено 2) совершает плоское движение, которое можно разложить на переносное вместе с кулисой (звено 3) и на относительное движение вдоль кулисы.

План скоростей звена 1, представленный отрезком \overline{pa} на рис. 5 б, строится аналогично предыдущему примеру.

Точка А механизма одновременно принадлежит трем звеньям. Обозначим через A_3 точку А, принадлежащую звену 3. Скорость точки А звена 2 равна скорости точки А звена 1, и разложим её на скорость \overline{V}_{A3} в переносном движении (линия её действия перпендикулярна радиусу вращения – прямой \overline{CA}) и скорость \overline{V}_{A23} в относительном движении (линия действия совпадает с направлением \overline{CA} , направление поступательного движения звена 2 относительно звена 3)

$$\overline{V}_{A2} = \overline{V}_{A3} + \overline{V}_{A23}.$$

Графическое решение этого уравнения. Из полюса p проводим прямую \sqrt{BC} , а из точки a прямую параллельную \overline{BC} , точку пересечения этих прямых обозначим через a_3 . Тогда

$$V_{A3} = K_V \cdot \overline{pa_3}, \quad V_{A23} = K_V \cdot \overline{a_3a}.$$

Для определения скорости точки B звена 3 воспользуемся принципом подобия (рис. 6 г)

$$\frac{V_B}{V_{A3}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{pb}}{\overline{pa_3}}, \quad V_B = K_V \cdot \overline{pb}.$$

План ускорений, рис.. 6 в. Как обычно строим план ускорений звена 1.

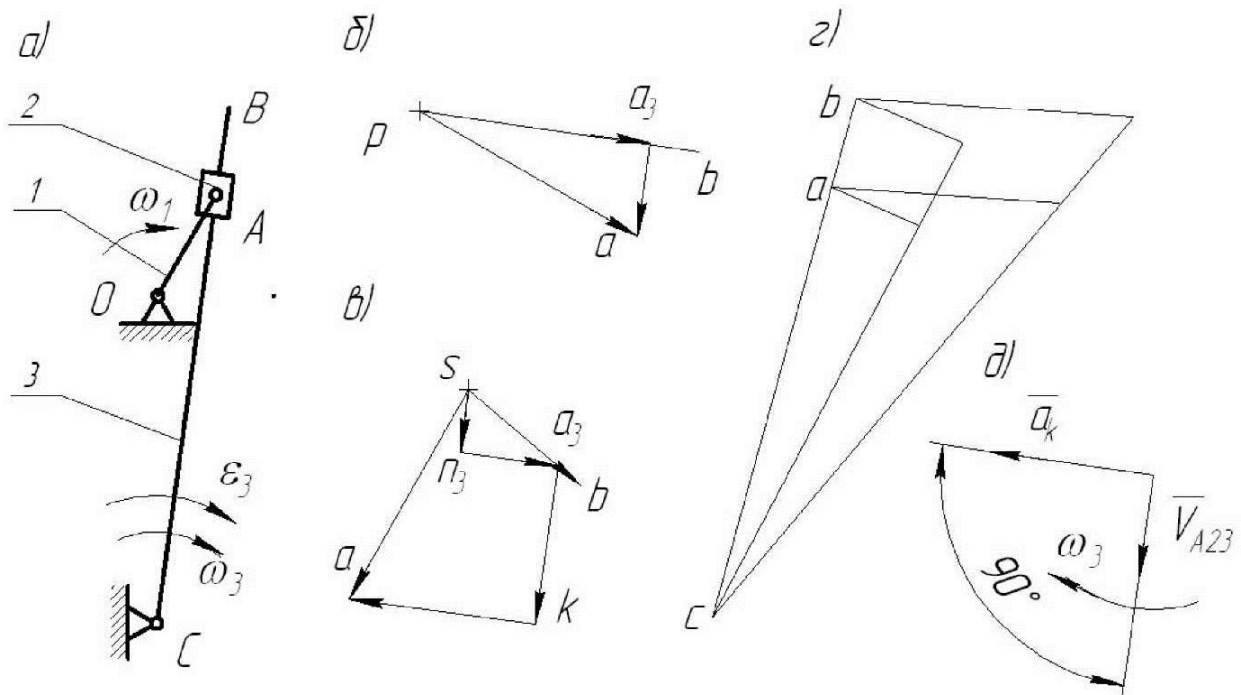


Рис. 6. Планы скоростей и ускорений кулисного механизма

Ускорение точки A звена 2 равно ускорению точки A звена 1. Поскольку переносное движение звена 2 вращательное, то для ускорения точки A можно записать векторное уравнение

$$\overline{a_A} = \overline{a_{A3}^n} + \overline{a_{A3}^t} + \overline{a_{A23}} + \overline{a_{Ak}}.$$

В этом уравнении известно ускорение $a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA} = V_A^2 / l_{OA}$ точки A звена 1 и 2, для точки A звена 3 нормальное ускорение $a_{A3}^n = V_{A3}^2 / l_{AC}$, ускорение кориолисовое $a_{Ak} = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{A23}$. Строим план ускорений (рис. 6 в) в следующей последовательности. Откладываем вектор $\overline{sn_3} = \overline{a_{A3}^n} / K_a$, который параллелен прямой AC и направлен от точки A к точке C . Через точку n_3 проводим линию действия

вектора ускорения \bar{a}_{A3}^t . Определить направление вектора кориолисова ускорения \bar{a}_{Ak} - повернуть вектор относительной скорости \bar{V}_{A23} на угол 90° в сторону вращения переносного вращения (рис. 6 г). Строим вектор $\bar{ka} = \bar{a}_{Ak} / K_a$, соответствующий кориолисову ускорению. Через точку k проводим линию действия относительного ускорения \bar{a}_{A23} , параллельную AC и получаем точку a_3 . Из плана ускорений определяем

$$a_{A23} = a_3 k \cdot K_a, \quad a_{A3}^t = n_3 a_3 \cdot K_a.$$

Ускорение любой точки звена 3 определяется из принципа подобия, так на рис. 6 в построено ускорение точки В.

Пример 3. Коромыслово-кулисный механизм изображен на рис. 7. Звено 2 выполнено в виде шатуна, и его движение (см. пример 2) разложим на переносное движение вместе со звеном 3 и относительное движение вдоль звена 3. Рассмотрим обратное преобразование, то есть звено 3 вращается вместе со звеном 2 и перемещается вдоль звена 2.

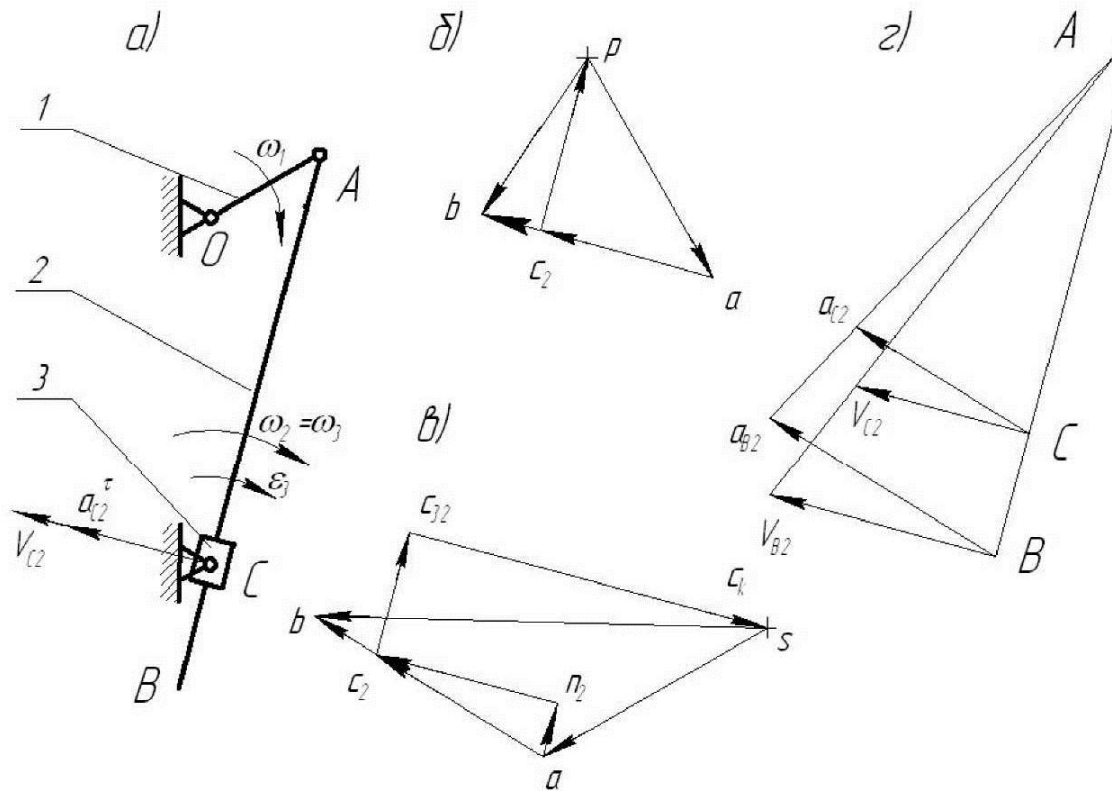


Рис.7. Планы скоростей и ускорений коромыслово-кулисного механизма

Точка С одновременно принадлежит звеньям 2 и 3. Скорость и ускорение точки С звена 3 равны нулю. Скорость и ускорение точки С звена 2

$$\bar{V}_{C2} = \bar{V}_A + \bar{V}_{C2A}, \quad \bar{a}_{C2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{C2A}^n + \bar{a}_{C2A}^t.$$

+ Для точки C звена 3 составим векторные уравнения

$$\vec{V}_{C3} = \vec{V}_{C2} + \vec{V}_{C32} = \vec{V}_A + \vec{V}_{C2A} + \vec{V}_{C32} = 0.$$

$$\vec{a}_{C3} = \vec{a}_{C2} + \vec{a}_{C32} + \vec{a}_k = \vec{a}_A + \vec{a}_{C2A}^n + \vec{a}_{C2A}^t + \vec{a}_{C32} + \vec{a}_k = 0.$$

Планы скоростей и ускорений приведены на рис. 7 б и в, по которым можно определить угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма.

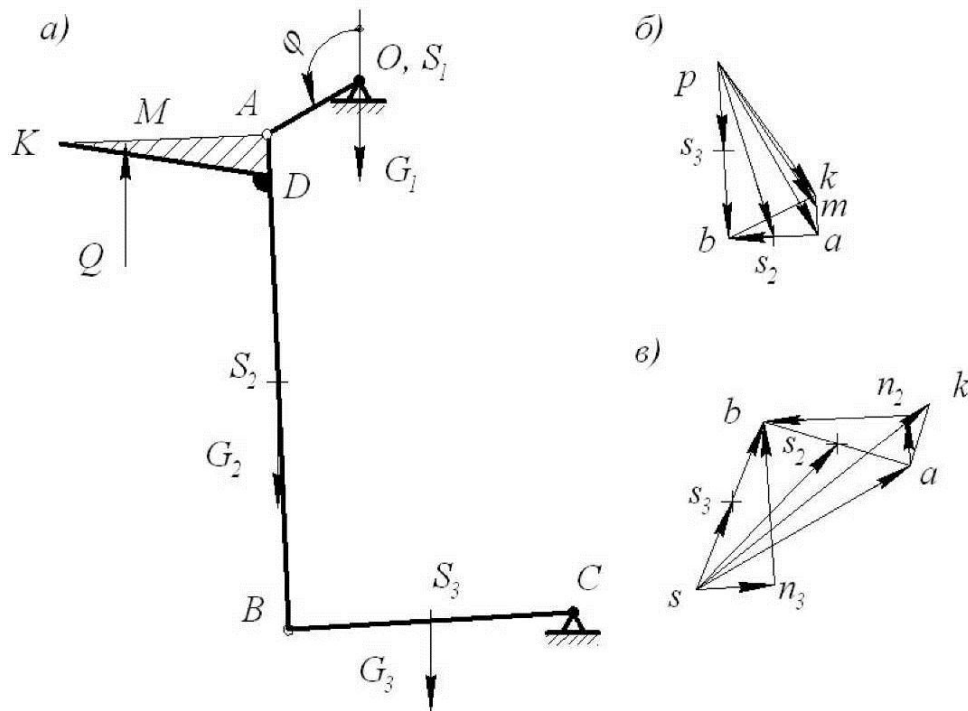


Рис. 8. Планы скоростей и ускорений четырех шарнирного механизма

Пример 4. На рис.8 представлен четырех шарнирный грейферный механизм, приведены его планы скоростей и ускорений.

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1. Общие сведения

При выполнении задания решаются две основные задачи динамики механизма:

- определение закона движения механизма, если заданы силы, вызывающие это движение,

- определение сил, действующих в механизме при заданном законе движения.

При исследовании движения механизма, находящегося под действием задаваемых сил, используется метод, позволяющий заменить силы и моменты сил, приложенные к различным звеньям, одной силой (или моментом сил) и одной массой (или моментом инерции), отнесенными к одному звену. Это звено носит название звена приведения. Таким образом, изучение движения механизма сводится к исследованию движения твердого тела (звена приведения), находящегося под действием приведенной силы (или момента сил). Такая замена механизма называется динамической моделью механизма. Решение задачи движения механизма базируется на законе изменения кинетической энергии механизма. Данный закон в применении к механизму формулируется следующим образом: на заданном перемещении ведущего звена изменение суммы кинетической энергии звеньев механизма равно сумме работ сил, действующих в механизме, на том же перемещении. Этот закон определяет выражения для расчета приведенной массы (или приведенного момента инерции) и приведенной силы (или приведенного момента сил).

При заданном законе движения известны силы сопротивления, силы веса, требуется определить движущий момент и реакции в кинематических парах. В соответствующей кинематической паре отбрасывается часть кинематической цепи, а её действие заменяется силой реакции. В первом приближении не учитываются силы трения, что позволяет сделать задачу статически определимой, так как в этом случае направление реакции для поступательной кинематической пары пятого класса известно, – перпендикулярно направляющим, а для вращательной пары точка её приложения – в центре шарнира.

Определение реакций методом кинетостатики. В основе метода кинетостатики лежит принцип Даламбера, который можно сформулировать следующим образом: если к точкам несвободной системы, наряду с задаваемыми силами, приложить силы инерции, то совокупность этих сил уравновешиваются реакциями в кинематических парах. Принцип Даламбера позволяет при решении задач динамики пользоваться методами статики. Уравнение движения механизма можно записать в форме системы уравнений «динамического равновесия» и решать их аналитическим способом или графоаналитическим способом с применением плана сил.

4.2. Динамическая модель механизма

Динамическую модель механизма (рис.9) представим в виде звена, которое вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_1 и к нему приложен движущий момент M_1 . При движении механизма угловая скорость ω_1 - величина переменная, и её среднее интегральное значение ω_{np} задается в техническом задании.

На рис.9 а представлена модель, в которой момент инерции звена равен приведенному моменту инерции J_{np} механизма, и приложен приведенный момент сил сопротивления M_{np} . На рис. 9 б – к звену приложена приведенная сила сопротивления P_{np} , перпендикулярная радиусу OA , и приведенная масса звена m_{np} сосредоточена в точке A .

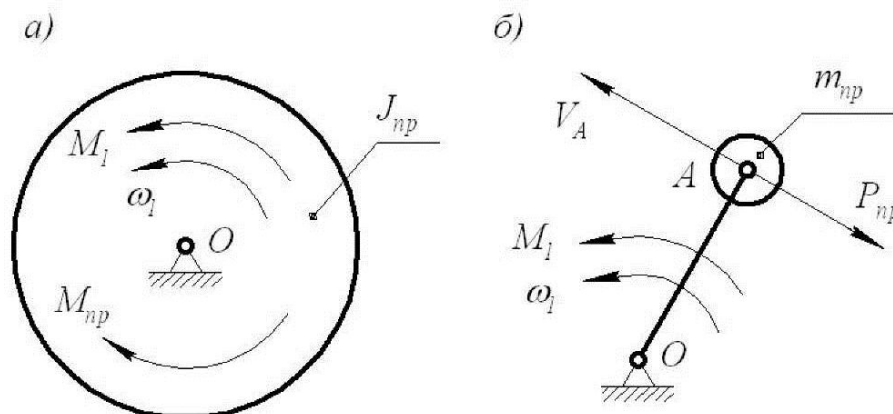


Рис. 9. Динамическая модель механизма

Параметры динамических моделей связаны соотношениями

$$M_{np} = P_{np} l_{OA} \cdot \quad J_{np} = m_{np} l_{OA}^2 \cdot$$

Считаем, что движение звена (механизма) установившее, неравновесное.

4.3. Приведенный момент инерции, приведенная масса механизма

Приведенная масса механизма (приведенный момент инерции) определяется из условия равенства кинетических энергий динамической модели E_m и кинетической энергии всего механизма E_{mex}

$$E_m = E_{mex}$$

Кинетическая энергия динамической модели (рис. 9)

$$E_m = 0,5 \cdot m_{np} V_A^2 = 0,5 \cdot J_{np} \omega_1^2 \cdot$$

Кинетическая энергия механизма равна сумме кинетических энергий всех звеньев

$$E_{mex} = \sum_{i=1}^n E_i$$

Кинетическая энергия звеньев:

а) совершающих вращательное движение (ось вращения проходит через центр масс звена)

$$E_i = \frac{1}{2} J_{Si} \omega_i^2;$$

б) совершающих вращательное движение (ось вращения не проходит через центр масс звена)

$$E_i = \frac{1}{2} m_i V_{Si}^2 + \frac{1}{2} J_{Si} \omega_i^2;$$

в) совершающих поступательное движение

$$E_i = \frac{1}{2} m_i V_{Si}^2;$$

г) совершающих плоское движение

$$E_i = \frac{1}{2} m_i V_{Si}^2 + \frac{1}{2} J \omega_i^2;$$

где m_i - масса звена, J_{Si} - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс, V_{Si} - скорость центра масс звена, ω_i - угловая скорость вращения звена.

Момент инерции звена механизма определяется из выражения

$$J_{Si} = \int \rho^2 dm = m_i \rho_{Si}^2,$$

где m_i - масса звена, ρ_{Si} - радиус инерции звена. Чтобы определить значения величин J_{Si} или ρ_{Si} , необходимо знать конструкцию звена. Так как конструкция звеньев не задается, то рекомендуется при выполнении задания принять

$$\rho_{Si}^2 = 0,1 l_i^2,$$

где l_i - длина звена. Чтобы учесть влияние момента инерции ротора двигателя и передаточного механизма, для звена 1 принять

$$\rho_{S1}^2 = 5 \cdot l_1^2.$$

Из условия равенства кинетических энергий, получим

$$m_{np} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_{Si}}{V_A} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{V_A} \right)^2 \right]. \quad J_{np} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_{Si}}{\omega_1} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right].$$

Приведенная масса механизма, приведенного на рис. 8.

$$m_{np} = J_{S1} \left(\frac{\omega_1}{V_A} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_{S2}}{V_A} \right)^2 + J_{S2} \left(\frac{\omega_2}{V_A} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_{S3}}{V_A} \right)^2 + J_{S3} \left(\frac{\omega_3}{V_A} \right)^2.$$

Подставив значения угловых скоростей и моментов инерции звеньев, получим

$$m_{np} = \frac{J_{S1}}{l_{OA}^2} + m_2 \left(\frac{V_{S2}}{V_A} \right)^2 + \frac{J_{S2}}{l_{AB}^2} \left(\frac{V_{B,A}}{V_A} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_{S3}}{V_A} \right)^2 + \frac{J_{S3}}{l_{BC}^2} \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^2.$$

$$J_{np} = J_{S1} + m_2 \left(\frac{V_{S2}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_{S3}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S3} \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2.$$

Данные формулы позволяют оценить влияние отдельных звеньев на значение приведенной массы. На основании анализа принимается то или иное конструктивное решение, когда требуется малая инерционность механизма или быстрота его срабатывания.

Среднее интегральное значение и коэффициент неравномерности приведенной массы и приведенного момента инерции

$$m_{cp} = \left(\int_0^{2\pi} m_{np} d\varphi \right) / (2\pi) \approx \left(\sum_{i=1}^n m_{npi} \right) / n. \quad J_{cp} = \left(\int_0^{2\pi} J_{np} d\varphi \right) / (2\pi) \approx \left(\sum_{i=1}^n J_{npi} \right) / n.$$

$$\delta_j = (m_{np\max} - m_{np\min}) / (2m_{cp}) = (J_{np\max} - J_{np\min}) / (2J_{cp}) /$$

При установившемся движении, если $\delta_j > 0,1$, рекомендуется на кривошип устанавливать дополнительную массу – маховик.

4.4. Приведенный момент сил, приведенная сила

Приведенный момент сил M_{np} и приведенная сила механизма P_{np} (см. рис. 9) определяется из условия, что ее мощность в каждом положении механизма равна алгебраической сумме мощностей всех сил, приложенных к механизму

$$N = \bar{M}_{np} \cdot \bar{\omega}_1 = \bar{P}_{np} \cdot \bar{V}_A = -M_{np} \cdot \omega_1 = -P_{np} \cdot V_A = \sum \bar{P}_i \bar{V}_i.$$

Рассмотрим решение уравнения для механизма, изображенного на рис. 8 а.

$$M_{np} = -(G_1 \cdot 0 + G_{2x} \cdot V_{S2x} + G_{2y} \cdot V_{S2y} + G_{3x} \cdot V_{S3x} + G_{3y} \cdot V_{S3y} + Q_x \cdot V_{Kx} + Q_y \cdot V_{Ky}) / \omega_1$$

$$P_{np} = -(G_1 \cdot 0 + G_{2x} \cdot V_{S2x} + G_{2y} \cdot V_{S2y} + G_{3x} \cdot V_{S3x} + G_{3y} \cdot V_{S3y} + Q_x \cdot V_{Kx} + Q_y \cdot V_{Ky}) / V_A.$$

Так как в механизме $G_{2x} = G_{3x} = 0$, $G_{2y} = -G_2$, $G_{3y} = -G_3$, то уравнение упрощается

$$P_{np} = (G_2 \cdot V_{S2y} + G_3 \cdot V_{S3y} - Q_x \cdot V_{Kx} - Q_y \cdot V_{Ky}) / V_A.$$

При графоаналитическом решении рекомендуется использовать метод «рычага» Жуковского, если скорости определяются методом планов скоростей. «Рычаг» Жуковского представляет план скоростей, в соответствующих точках которого приложены силы, действующие в механизме, но повернутые на 90° в сторону вращения звена приведения.

В масштабе чертежа выражение для мощности силы соответствует моменту повернутой силы относительно полюса плана скоростей на «рычаге» Жуковского.

Рассмотрим «рычаг» Жуковского на примере механизма, изображенного на рис. 8. На звенья механизма действуют силы тяжести звеньев соответственно G_1 , G_2 , G_3 и сила полезного сопротивления Q . На рис. 10 изображен «рычаг» Жуковского – план скоростей механизма (рис. 8 б), на котором в соответствующих точках добавлены действующие силы, повернутые на 90° против часовой стрелки.

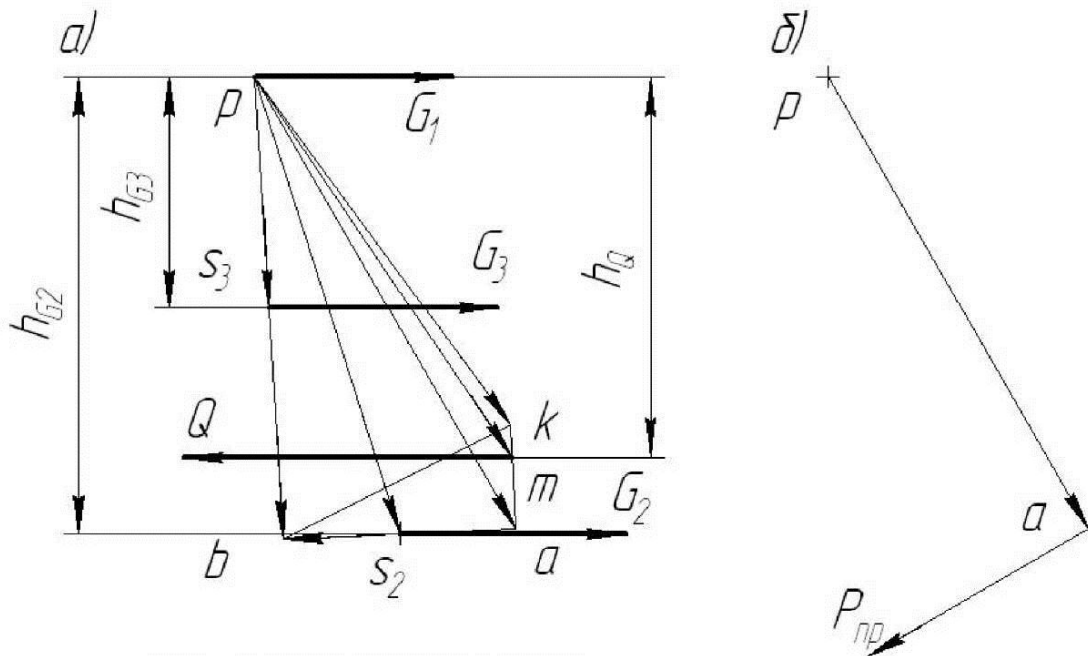


Рис. 10. Рычаг Жуковского

Составим сумму моментов сил относительно полюса p

$$\Sigma M_p = Q \cdot h_Q - G_2 \cdot h_{G2} - G_3 \cdot h_{G3},$$

которая является аналогом алгебраической суммы мощностей сил. Аналог мощности приведенной силы (рис. 10 б)

$$P_{пр} \cdot \overline{pa} = \Sigma M_p.$$

Отсюда значение приведенной силы

$$P_{пр} = (Q \cdot h_Q - G_2 \cdot h_{G2} - G_3 \cdot h_{G3}) / \overline{pa}.$$

Значения плеч сил h_Q , h_{G2} , h_{G3} , \overline{pa} берутся как соответствующие длины на плане скоростей «рычага» Жуковского.

4.5. Закон движения механизма

Определение закона движения механизма сводится к определению закона движения динамической модели механизма (рис. 11). Решение поставленной задачи найдем с помощью уравнения движения механизма в форме изменения кинетической энергии

$$\Delta E_{01} = E_1 - E_0 = A_{M1} - A_{np},$$

где A_{M1} - работа движущего момента M_1 , A_{np} - работа приведенной силы P_{np} или приведенного момента сил M_{np} , $\Delta E_{01} = (E_1 - E_0)$ - разность кинетических энергий механизма в двух последовательных положениях 0 и 1.

Приведенная сила P_{np} известна, движущий момент M_1 определяется ниже. В реальном механизме движущий момент двигателя зависит от угловой скорости ротора, поэтому и движущий момент M_1 механизма также будет зависеть от угловой скорости ω_1 - $M_1 = M_1(\omega_1)$. Но при выполнении данного задания принять $M_1 = const$.

Режим работы механизма – установившейся неравновесный. Цикл работы соответствует одному обороту кривошипа, угол поворота φ_1 изменяется в интервале $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим два положения механизма, соответствующих положениям механизма $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = \varphi_{1i}$, для которых введем следующие обозначения:

- угловой скорости	$\omega_1(0) = \omega_0$	$\omega_1(\varphi_{1i}) = \omega_i$
- приведенного момента инерции	$J_{np}(0) = J_0$	$J_{np}(\varphi_{1i}) = J_i$
- приведенной массы	$m_{np}(0) = m_0$	$m_{np}(\varphi_{1i}) = m_i$
- приведенной силы сопротивления	$P_{np}(0) = P_0$	$P_{np}(\varphi_{1i}) = P_i$
- кинетической энергии механизма	$E(0) = E_0$	$E(\varphi_{1i}) = E_i$
- работы сил	$A(0) = A_0$	$A(\varphi_{1i}) = A_i$
- кинетическая энергия механизма	$E_0 = \frac{J_0 \omega_0^2}{2} = \frac{m_0 l_{O_A}^2 \omega_0^2}{2}$	$E_i = \frac{J_i \omega_i^2}{2} = \frac{m_i l_{O_A}^2 \omega_i^2}{2}$

Работа движущего момента

$$A_{M1} = \int_0^{\varphi_i} M_1 d\varphi = M_1 \varphi_i = P_d \cdot l_{O_A} \cdot \varphi_i.$$

Работа приведенной силы сопротивления

$$A_{npi} = \int_0^{\varphi_i} M_{np} d\varphi = l_{O_A} \int_0^{\varphi_i} P_{np} d\varphi.$$

Изменение кинетической энергии

$$\Delta E_i = A_{Mi} - A_{npi}.$$

Так как изменение кинетической энергии за цикл равно 0, то движущая сила и движущий момент

$$P_d = \frac{M_1}{l_{O_A}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{np} d\varphi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i, \quad M_1 = P_d \cdot l_{O_A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{npi}.$$

Кинетическая энергия в текущем положении

$$E_i = \frac{J_i \omega_i^2}{2} = E_0 + \Delta E_i.$$

Отсюда угловая скорость

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2E_i}{J_i}}.$$

Так как не известен уровень кинетической энергии ни в одном положении механизма, то невозможно определить значение угловой скорости динамической модели. Задача решается приближенными численными методами. Рассмотрим два способа.

1 способ – способ последовательных приближений. Решение рассмотрим для динамической модели, изображенной на рис.9 б.

Исходные уравнения преобразуем к следующим расчетным формулам.

Аналог колебания кинетической энергии

$$\Delta E_{*i} = \frac{\Delta A_i}{l_{OA}^2} = \Delta E_{*(i-1)} + \frac{P_d - 0,5(P_{np(i-1)} + P_{npi})}{l_{OA}} \Delta \varphi. \quad \Delta E_{*0} = 0.$$

Аналог кинетической энергии

$$E_{*i} = E_i / l_{OA}^2 = E_{*0} + \Delta E_{*i}. \quad E_{*0} = 0,5 m_0 \omega_0^2.$$

Колебание угловой скорости

$$\Delta \omega_i = \sqrt{2E_i / J_i} - \omega_{np} = \sqrt{2E_i / (m_i l_{OA}^2)} - \omega_{np} = \sqrt{2E_{*i} / m_i} - \omega_{np}.$$

Средняя величина колебания угловой скорости

$$\Delta \omega_{cp} = \left(\sum_{i=1}^n \Delta \omega_i \right) / n.$$

На каждом шаге j последовательных приближений расчет проводится по следующей схеме.

а) Задать значение угловой скорости в положении 0 - $\omega_{0j} = \omega_{0(j-1)} + \Delta \omega_{(j-1)}$.

б) В n положениях механизма по выше приведенным формулам вычислить значение колебания угловую скорость $\Delta \omega_i$ и её среднюю величину $\Delta \omega_{cp}$.

в) Если $|\Delta \omega / \omega_{np}| \geq 0,01$, расчет повторить с п. а.

На первом шаге принимается $\omega_0 = \omega_{np}$.

2 способ. Метод основан на понятии средней кинетической энергии, и его можно применять при выполнении условия

$$(J_{np \max} - J_{np \min}) / (2J_{cp}) < 0,1.$$

Если условие не выполняется, то на звено приведения устанавливается дополнительная масса (маховик, см. п. 4.2).

Среднее значение кинетической энергии за цикл его работы

$$E_{cp} = 0,5(J_{cp} + J_m)\omega_{np}^2,$$

где J_m - момент инерции маховика.

Работа движущих сил и сил сопротивления

$$\Delta A_i = \Delta A_{(i-1)} + [M_1 - 0,5(M_{np(i-1)} + M_{npi})] \cdot \Delta \varphi. \quad \Delta A_0 = 0.$$

Средняя величина работы

$$\Delta A_{cp} = \left(\sum_i^n \Delta A_i \right) / n.$$

Колебание кинетической энергии

$$\Delta E_i = \Delta A_i - \Delta A_{cp}.$$

Колебание угловой скорости

$$\Delta \omega_i = \sqrt{\frac{2(E_{cp} + \Delta E_i)}{J_{npi} + J_m}} - \omega_{np}.$$

Коэффициент неравномерности вращения кривошипа

$$\delta = \frac{\Delta \omega_{i\max} - \Delta \omega_{i\min}}{2\omega_{np}}.$$

Зависимость изменения угловой скорости от угла поворота кривошипа $\omega = \omega(\varphi)$ называется фазовым портретом работы механизма. Для получения закона движения механизма, т.е. зависимости угловой скорости от времени $\omega = \omega(t)$, следует воспользоваться выражением $d\varphi/dt = \omega$, или

$$t_{0-i} = \int_0^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}.$$

Формулы приближенного численного интегрирования имеют вид

$$t_{0-i} = t_{0-(i-1)} + \Delta t_i,$$

$$\Delta t_i = \frac{2 \cdot \Delta \varphi}{\omega_i + \omega_{i-1}} = \frac{\Delta \varphi}{\omega_{np} + 0,5(\Delta \omega_i + \Delta \omega_{i-1})}. \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Начальные условия $t_{0-0} = 0$.

Имея зависимости $\omega = \omega(\varphi)$, $\omega = \omega(t)$ и исключая ω , можно получить зависимость $\varphi = \varphi(t)$.

Значение углового ускорения определяется :

а) из дифференциального уравнения движения механизма

$$J_{np} \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial J_{np}}{\partial \varphi} = M_1 - M_{np},$$

б) дифференцированием зависимости $\omega_1 = \omega_1(\varphi_1)$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \frac{d\omega_1}{d\varphi_1}.$$

Угловое ускорение равно:

- в первом случае

$$\varepsilon_1 = \left[M_1 - M_{np_i} - 0,5\omega_1^2 \left(\frac{\partial J_{np}}{\partial \varphi_1} \right)_i \right] / J_{np_i},$$

- во втором случае

$$\varepsilon_i = (\Delta\omega_{(i+1)} - \Delta\omega_{(i-1)}) (\omega_{np} + \Delta\omega_i) / (2\Delta\varphi).$$

4.6. Главный вектор и главный момент сил инерции звеньев

Все элементарные силы инерции звена приводятся к главному вектору сил инерции \bar{P}_u , приложенному к центру масс звена, и к главному моменту сил инерции M_u . Определяются они по формулам

$$\bar{P}_u = -m \cdot a_S, \quad M_u = -J_S \cdot \varepsilon.$$

Главный вектор сил инерции равен произведению массы звена на ускорение центра масс и направлен в сторону противоположную ускорению. Главный момент сил инерции звена равен произведению момента инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс, на угловое ускорение звена направлен противоположно угловому ускорению.

Для механизма, изображенного на рис. 8, направление векторов a_S , ε , P_u , M_u показано на рис. 10.

4.7. Расчет реакций в кинематических парах

Реакции в кинематических парах определяются из решения уравнения равновесия звеньев механизма

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma M = 0.$$

Момент силы \bar{P} относительно точки L (см. рис. 10 г) будем определять как скалярное произведение векторов \bar{a} и \bar{P}_*

$$M_L(P) = a_x P_{*x} + a_y P_{*y} = a_x (-P_y) + a_y (P_x),$$

где сила \bar{P}_* есть сила \bar{P} , повернутая на 90° по часовой стрелке, при этом

$$P_{*x} = -P_y, \quad P_{*y} = P_x.$$

Рассмотрим методику решения на примере механизма, изображенного на рис. 8. Схема сил с учетом сил инерции приведена на рис. 11 а. Выделим группу Асура (звенья 2 и 3, рис. 11 б) и заменим действие отброшенных звеньев механизма реакциями в соответствующих кинематических парах:

- действие звена 1 учитывается реакцией R_{12} , приложенной в шарнире А;
- действие стойки (звено 0) – реакцией \bar{R}_{03} , приложенной в шарнире С.

Силы, действующие на звено 1, показаны на рис. 11 в.

Уравнение равновесия звена 2

$$\sum \bar{P}^2 = \bar{R}_{12} + \bar{Q} + \bar{P}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{32} = 0.$$

$$\sum M_B^2 = \overline{BA} \cdot \bar{R}_{12*} + \overline{BK} \cdot \bar{Q}_* + \overline{BS}_2 \cdot (\bar{P}_{u2*} + \bar{G}_{2*}) + M_{u2} = 0.$$

Уравнение равновесия звена 3

$$\sum \bar{P}^3 = \bar{R}_{23} + \bar{G}_3 + \bar{P}_{u3} + \bar{R}_{03} = 0. \quad \bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}.$$

$$\sum M_B^3 = \overline{BS}_3 \cdot (\bar{P}_{u3*} + \bar{G}_{3*}) + \overline{BC} \cdot \bar{R}_{03*} + M_{u3} = 0.$$

Уравнения равновесия звена 1

$$\sum \bar{P}^1 = \bar{R}_{21} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{01} = 0. \quad \bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}.$$

$$\sum M_O^1 = M_1 + \overline{AO} \cdot (-\bar{R}_{12*}) = 0$$

Вектора точек приложения сил

$$\overline{AO} = -\bar{e}_1 l_{OA} = -l_{OA} \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad \overline{BA} = -\bar{e}_2 l_{AB} = -l_{AB} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\overline{BS}_2 = -\bar{e}_2 l_{BS2} = -l_{BS2} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{BK} = -\bar{e}_2 l_{AB} + \bar{e}_{2*} l_{AK} = -l_{AB} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix} + l_{AK} \begin{bmatrix} \sin \varphi_2 \\ -\cos \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{BS}_3 = -\bar{e}_3 l_{BS3} = -l_{BS3} \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 \end{bmatrix} \quad \overline{BC} = -\bar{e}_3 l_{BC} = -l_{BC} \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Спроектируем векторные уравнения на оси координат

$$R_{12x} + Q_x + P_{u2x} + R_{32x} = 0.$$

$$R_{12y} + Q_y + P_{u2y} - G_2 + R_{32y} = 0.$$

$$R_{23x} + P_{u3x} + R_{03x} = 0.$$

$$R_{23y} - G_3 + P_{u3y} + R_{03y} = 0.$$

$$-R_{12x} + R_{01x} = 0.$$

$$-R_{12y} - G_1 + R_{01y} = 0.$$

$$-R_{12x} \sin \varphi_2 + R_{12y} \cos \varphi_2 - [\sin \varphi_2 + (l_{AK}/l_{AB}) \cos \varphi_2] Q_x - [\cos \varphi_2 + (l_{AK}/l_{AB}) \sin \varphi_2] Q_y -$$

$$-P_{u2x} (l_{BS2}/l_{AB}) \sin \varphi_2 + (P_{u2y} - G_2) (l_{BS2}/l_{AB}) \cos \varphi_2 + M_{u2} = 0.$$

$$-P_{u3x} (l_{BS3}/l_{BC}) \sin \varphi_3 + (P_{u3y} - G_3) (l_{BS3}/l_{BC}) \cos \varphi_3 - R_{03x} \sin \varphi_3 + R_{03y} \cos \varphi_3 + M_{u3} = 0.$$

$$M_1 - l_{OA} (R_{12x} \sin \varphi_1 - R_{12y} \cos \varphi_1) = 0.$$

Из данных линейных уравнений определяются проекции реакций в кинематических парах и крутящий момент M_1 .

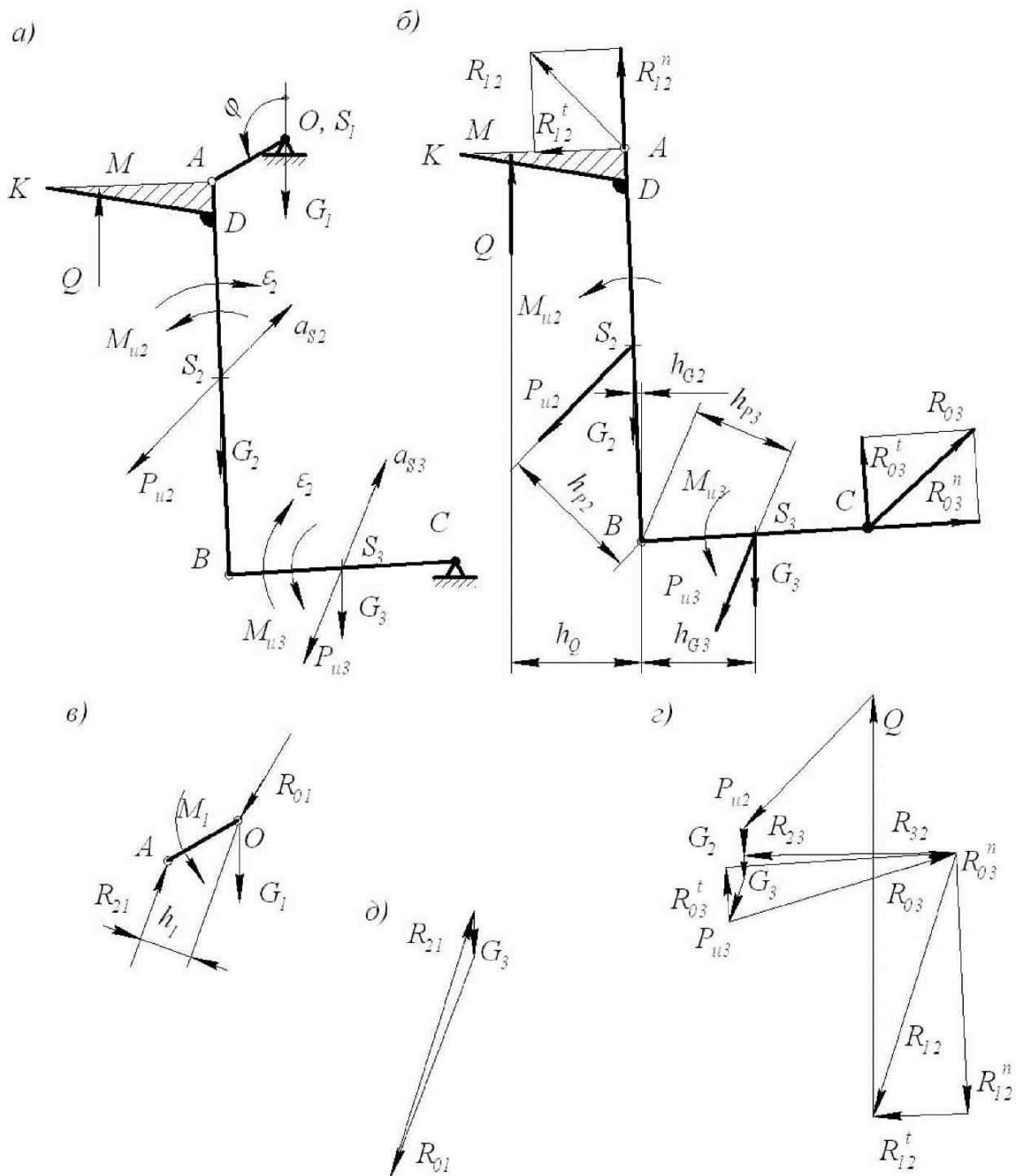


Рис. 11. Реакции в кинематических парах. План сил

Графоаналитический метод. Разложим реакции \bar{R} в шарнирах на нормальную R^n и касательную R^t составляющие. Нормальная составляющая направлена вдоль линии, соединяющей точку приложения реакции с точкой В (внутренняя кинематическая пара группы Асура, рис. 11 б). Направление реакций принимается произвольное.

Составим уравнения моментов относительно точки В для звена 2 и для звена 3

$$\Sigma M_B^2 = R_{12}^t \cdot l_{AB} - Q \cdot h_Q + P_{u2} \cdot h_{P2} + G_2 \cdot h_{G2} + M_{u2} = 0.$$

$$\Sigma M_M^3 = M_{u3} - G_3 \cdot h_{G3} - P_{u3} \cdot h_{P3} + R_{03}^t \cdot l_{BC} = 0.$$

Из данных уравнений определяются касательные составляющие реакций

$$R_{12}^t = (Q \cdot h_Q - P_{u2} \cdot h_{P2} - G_2 \cdot h_{G2} - M_{u2}) / l_{AB}.$$

$$R_{03}^t = (-M_{u3} + G_3 \cdot h_{G3} + P_{u3} \cdot h_{P3}) / l_{BC}.$$

Если значение реакции имеет знак «+», значит, что верно выбрано направление реакции R^t . Если знак «-», то необходимо изменить на противоположное направление реакции R^t .

Уравнения равновесия для звена 2 и для звена 3 представим в виде

$$\Sigma P^2 = R_{12}^n + R_{12}^t + \bar{Q} + P_{u2} + \bar{G}_2 + R_{32} = 0.$$

$$\Sigma P^3 = \bar{R}_{23} + G_3 + P_{u3} + R_{03}^t + R_{03}^n = 0.$$

Учитывая, что в шарнире В реакции связаны соотношением $R_{32} = -R_{23}$, уравнение равновесия группы Асура

$$R_{12}^n + (R_{12}^t + \bar{Q} + P_{u2} + \bar{G}_2) + (\bar{G}_3 + P_{u3} + R_{03}^t) + R_{03}^n = 0.$$

Графическое решение данного уравнения представлено на рис. 11 г. Рекомендуется вначале последовательно построить все силы звена 2, стоящие в скобках, затем все силы звена 3, также стоящие в скобках. Проведя линии действия реакций \bar{R}_{12}^n и \bar{R}_{03}^n , получим замкнутый план сил. На этом же плане сил получим реакции $R_{32} = -R_{23}$ из уравнений равновесия звена 2 или 3.

Реакция \bar{R}_{01} в шарнире О и движущий момент M_1 определяются из уравнений равновесия звена 1 (здесь учитывается, что $R_{21} = -R_{12}$)

$$\Sigma P^1 = G_1 + \bar{R}_{21} + \bar{R}_{01} = 0.$$

$$\Sigma M_O^1 = M_1 - R_{21} \cdot h_1 = 0.$$

План сил приведен на рис. 11 д.

В механизмах с высшей кинематической парой (рис. 3) при определении реакций удобнее рассматривать уравнения равновесия для звена с высшей кинематической парой, а не уравнения равновесия для группы Асура преобразованного механизма.