

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ
КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Методические указания к лабораторной работе

Методические указания соответствуют ФГОС ВПО по направлению (специальности) 190300.65 «Подвижной состав железных дорог».

Даны основные положения по кинематическому анализу зубчатых механизмов аналитическим методом. Рассмотрена кинематика механизмов с неподвижными осями, планетарных, дифференциальных, сдвоенных планетарных и замкнутых дифференциальных механизмов.

Предназначены для студентов 2-го курса всех форм обучения, изучающих дисциплину «Теория механизмов и машин».

ВВЕДЕНИЕ

В практике машиностроения нашли широкое применение зубчатые механизмы. Зубчатые механизмы проектируют для получения постоянного или переменного отношения угловых скоростей их звеньев. В первом случае они получаются с применением круглых, во втором – некруглых зубчатых колес.

Из всех видов механических передач требованию снижения материалоемкости машин наиболее полно удовлетворяют дифференциальные механизмы и их разновидность – планетарные зубчатые механизмы, отличающиеся малыми габаритами и массой. Это связано с использованием эффекта многопоточности и применением внутреннего зацепления.

Одной из основных задач при исследовании зубчатых механизмов является их кинематическое исследование. В методических указаниях приведены основные положения по кинематическому анализу зубчатых механизмов с круглыми колесами аналитическим методом.

Освоив теоретический материал и выполнив лабораторную работу, студенты получают навыки экспериментального определения передаточных отношений зубчатых механизмов.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Целью работы является теоретическое и экспериментальное определение передаточных отношений зубчатых механизмов.

Передаточным отношением зубчатого механизма называется отношение угловых скоростей его звеньев. При вычислении передаточного отношения от звена j к звену k имеем

$$u_{jk} = \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{n_j}{n_k} = \frac{\varphi_j}{\varphi_k}, \quad (1)$$

где ω – угловая скорость звена, с^{-1} ; n – частота вращения звена, мин^{-1} ; φ – угол поворота звена за определенный промежуток времени.

Передаточное отношение от звена k к звену j

$$u_{kj} = \frac{\omega_k}{\omega_j} = \frac{n_k}{n_j} = \frac{\varphi_k}{\varphi_j}.$$

Очевидно, что между передаточными отношениями u_{jk} и u_{kj} существует зависимость

$$u_{jk} = \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{1}{\omega_k / \omega_j} = \frac{1}{u_{kj}}. \quad (2)$$

Если колеса механизма вращаются в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), то имеет смысл различным направлениям вращения колес присвоить знаки плюс или минус. Условимся положительным считать направление вращения колеса, направленное против хода часовой стрелки. Тогда угловая скорость ω_2 колеса 2 (рис.1, а) будет отрицательной. Поэтому передаточное отношение для внешнего зацепления двух колес будет отрицательным. При внутреннем зацеплении колеса вращаются в одну сторону (рис. 1, б) передаточное отношение ω_{12} положительно.

Для механизмов с колёсами, вращающимися в непараллельных плоскостях, знак передаточного отношения в указанном смысле не имеет значения. В этом случае для определения направления вращения ведомого звена используются специальные приёмы [1], [3].

Зубчатые передачи с неподвижными осями колёс разделяются на *простые (одноступенчатые)* и *сложные (многоступенчатые)*. Простые механизмы приведены на рис.1, здесь же указаны их передаточные отношения, выраженные через числа зубьев колёс.

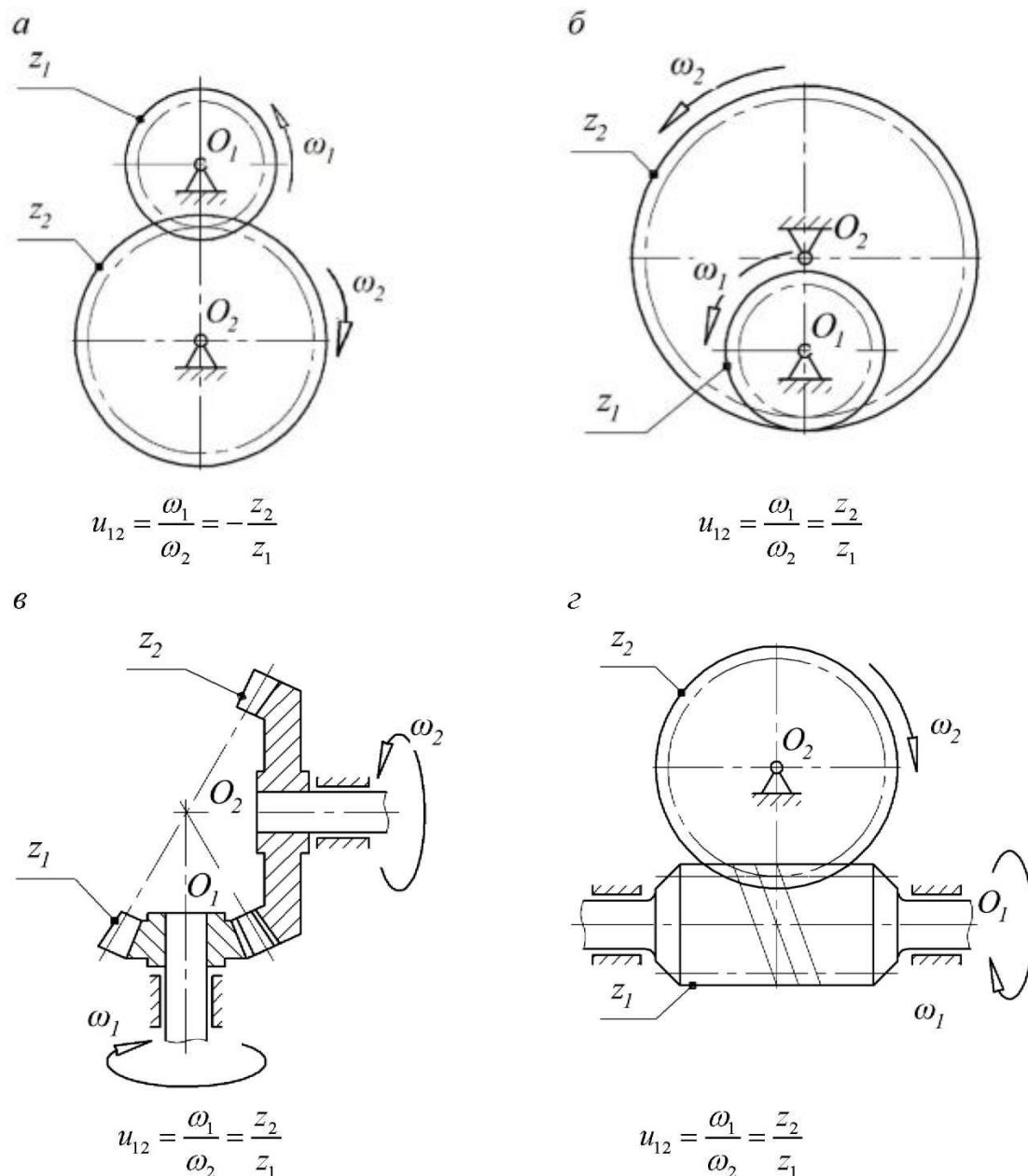


Рис. 1. Простые (одноступенчатые) механизмы с неподвижными осями колес: а – внешнее зацепление; б – внутреннее зацепление; в – передача с коническими колесами; г – червячная передача

Сложные (многоступенчатые) передачи с неподвижными осями колёс (рис. 2) получаются при соединении нескольких одноступенчатых передач в один механизм. **Передаточное отношение сложного зубчатого механизма равно произведению передаточных отношений простых механизмов, входящих в его состав.**

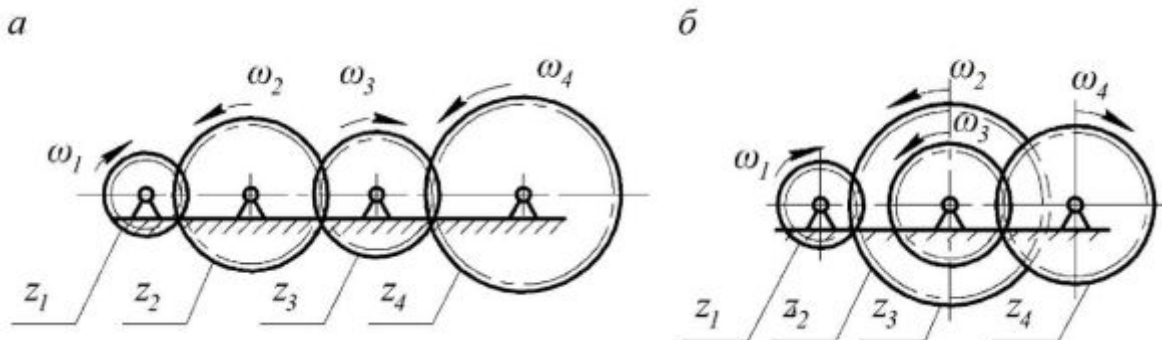


Рис. 2 Сложные механизмы с неподвижными осями: *а* – последовательное соединение колес; *б* – ступенчатое соединение колес

Для механизма с последовательным соединением колес (рис. 2, *а*):

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}. \quad (3)$$

Знак минус показывает, что зубчатые колеса 1 и 4 вращаются в разные стороны.

Передаточное отношение в обратном направлении, т. е. от колеса 4 к колесу 1:

$$u_{41} = u_{43} \cdot u_{32} \cdot u_{21} = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(-\frac{z_3}{z_4}\right) \cdot \left(-\frac{z_2}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{z_1}{z_4}.$$

Для механизма со ступенчатым соединением колес (рис. 2, *б*):

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (4)$$

Аналогично, в обратном направлении:

$$u_{41} = u_{43} \cdot u_{21} = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(-\frac{z_3}{z_4}\right) \cdot \left(-\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2}.$$

Обратим внимание на то, что правило перемножения передаточных отношений справедливо только для механизмов, оси вращения которых неподвижны.

Если в механизме с неподвижными осями стойку привести во вращение вокруг оси первого колеса, то такой механизм превратится в **дифференциальный** (рис. 3).

В нем стойка становится новым ведущим звеном – водилом, которое «водит» оси колёс вокруг неподвижной оси O_1 . Колесо, ось вращения которого неподвижна, называется **центральный колесом** (колесо 1 на рис. 3). Зубчатые колёса, оси вращения которых перемещаются по окруж-

ности, называются *сателлитами* (колеса 2, 3, и 4 на рис. 3). Степень подвижности дифференциального механизма равна двум, так как в нём два ведущих звена – колесо 1 и водило H , которые приводятся во вращение от двух независимых друг от друга двигателей M_1 и M_2 .

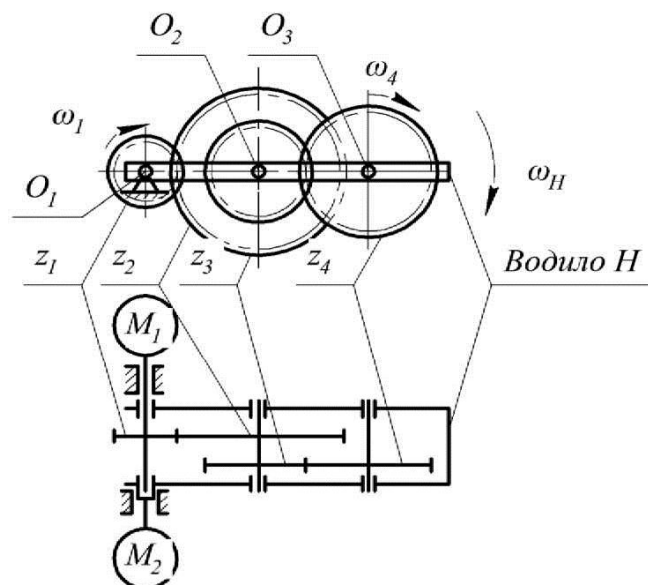


Рис. 3. Дифференциальный механизм

В дифференциальном механизме различают абсолютные и относительные угловые скорости звеньев. Абсолютные скорости колёс измеряются по отношению к стойке, а относительные – по отношению к водилу. Для кинематического исследования дифференциального механизма используется метод обращения движения.

Суть данного метода заключается в том, что мысленно всему механизму в целом задаётся вращение вокруг оси центрального колеса с угловой скоростью, равной угловой скорости водила, но направленной в противоположную ему сторону. В таком условном механизме водило H становится неподвижным, так как его угловая скорость будет равна нулю. Тогда и оси O_1, O_2, O_3 всех зубчатых колёс станут неподвижными и дифференциальный механизм превратится в механизм с неподвижными осями. Такой механизм называется преобразованным. Угловые скорости колёс 1 и 4 в преобразованном механизме

$$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H, \quad (5)$$

$$\omega_4^{(H)} = \omega_4 - \omega_H, \quad (6)$$

где $\omega_1, \omega_H, \omega_4$ – абсолютные угловые скорости; $\omega_1^{(H)}, \omega_4^{(H)}$ – относительные угловые скорости 1-го и 4-го колёс.

В скобках принято указывать обозначение неподвижного звена механизма.

Передаточное отношение в преобразованном механизме от колеса 4 к колесу 1 следующее:

$$u_{41}^{(H)} = \frac{\omega_4^{(H)}}{\omega_1^{(H)}} = \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H}. \quad (7)$$

Формула (7) называется формулой Виллиса.

Поскольку преобразованный механизм является механизмом с неподвижными осями, то его передаточное отношение $u_{41}^{(H)}$ можно вычислить по известным числам зубьев колес:

$$u_{41}^{(H)} = u_{43} \cdot u_{21} = \left(-\frac{z_3}{z_4} \right) \left(-\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}. \quad (8)$$

При кинематическом исследовании дифференциального механизма угловые скорости ведущих звеньев ω_1 и ω_H должны быть заданы. После определения $u_{41}^{(H)}$ по формуле (8) в соотношении (7) остаётся одно неизвестное – угловая скорость ω_4 ведомого колеса 4. Она легко может быть определена. После расчётов, полученный знак ω_4 укажет направление вращения этого колеса.

В технических устройствах широко используются *соосные* дифференциальные механизмы, в которых оси ведущего колеса 1 и ведомого 4 совпадают (рис. 4).

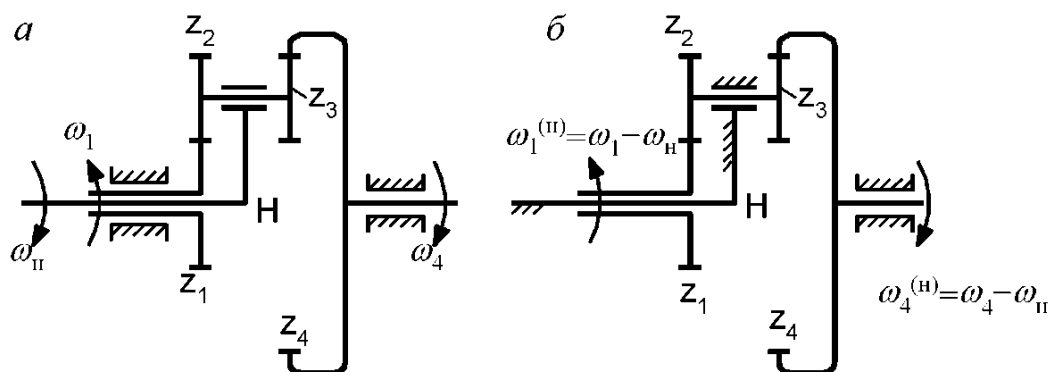


Рис. 4. Соосный дифференциальный механизм (а) и соответствующий ему преобразованный механизм (б)

Если в рассмотренном дифференциальном механизме центральное колесо 1 сделать неподвижным, то дифференциальный механизм преобразуется в *планетарный* (рис. 5).

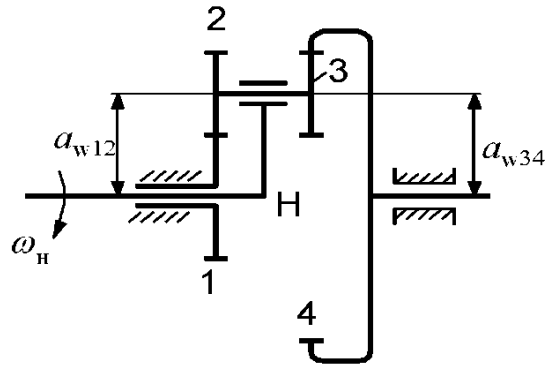


Рис. 5. Соосный планетарный механизм

Планетарные механизмы являются частным случаем дифференциальных и к ним можно применить все выводы, сделанные для дифференциальных механизмов. Формула (7) для планетарного механизма при ω_1 , равной нулю, примет вид:

$$u_{41}^{(H)} = \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} = \frac{\omega_4 - \omega_H}{-\omega_H} = -\left(\frac{\omega_4}{\omega_H}\right) + 1.$$

Учитывая, что отношение абсолютных скоростей звеньев есть передаточное отношение планетарного механизма, получим

$$u_{4H}^{(1)} = 1 - u_{41}^{(H)}, \quad (9)$$

где $u_{4H}^{(1)}$ – передаточное отношение планетарного механизма при ведомом водиле и неподвижном колесе 1, в предположении, что передача движения осуществляется от 4-го колеса к водилу.

Таким образом, чтобы определить передаточное отношение планетарного механизма, необходимо от единицы вычесть передаточное отношение преобразованного механизма, которое всегда вычисляется от колеса 4 к колесу неподвижному (**обратите на это внимание**).

Если же водило является ведущим звеном, то следует перейти к формуле (9) с учетом соотношения (2):

$$u_{H4}^{(1)} = \frac{\omega_H}{\omega_4} = \frac{1}{\omega_4 / \omega_H} = \frac{1}{u_{4H}^{(1)}} = \frac{1}{1 - u_{41}^{(H)}}. \quad (10)$$

В соосном механизме межосевые расстояния зацепляющихся колес: $a_{w12} = a_{w34}$ (рис. 5). Поэтому числа зубьев колёс должны соответствовать условию

$$\frac{m_{12}}{2}(z_1 + z_2) = \frac{m_{34}}{2}(z_4 - z_3). \quad (11)$$

При равных модулях зацепления $m_{12} = m_{34}$ условие соосности для механизма, изображенного на рис. 5, будет

$$z_1 + z_2 = z_4 - z_3.$$

Условие соосности можно использовать для определения числа зубьев одного из колёс по известным числам зубьев трёх остальных.

Как простые механизмы с неподвижными осями могут образовывать сложные механизмы (рис. 2), так и простые планетарные механизмы могут составлять сложные механизмы. На рис. 6, *a* изображена схема сложного механизма, состоящего из двух планетарных механизмов. Первый планетарный механизм состоит из колес 1, 2, 3 и ведомого водила H , а второй – из ведущего водила H' и колес 2', 3', 4, 5. Водило H первого механизма наглухо прикреплено к водилу H' второго, тогда $\omega_H = \omega_{H'}$.

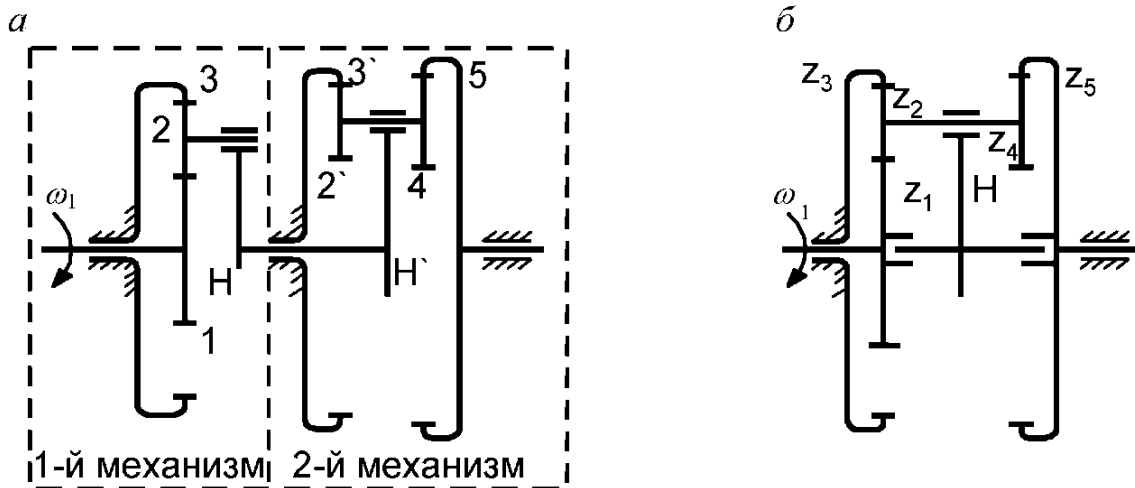


Рис. 6. Сложные планетарные механизмы: *a* – два последовательно включенных планетарных механизма; *б* – сдвоенный планетарный механизм

Для определения общего передаточного отношения u_{15} сдвоенного планетарного механизма перемножим передаточные отношения входящих в него механизмов

$$u_{15} = u_{1H}^{(3)} \cdot u_{H'5}^{(3')}. \quad (12)$$

Передаточное отношение 1-го планетарного механизма $u_{1H}^{(3)}$ при ведомом водиле H по соотношению (9) будет

$$u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)} = 1 - u_{12} \cdot u_{23} = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \frac{z_3}{z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_1 + z_3}{z_1}. \quad (13)$$

Передаточное отношение $u_{H'5}^{3'}$ 2-го планетарного механизма при ведущем водиле H' по соотношению (10) имеет вид:

$$u_{H'5}^{(3')} = \frac{1}{1 - u_{33'}^{(H')}} = \frac{1}{1 - u_{54} \cdot u_{23'}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z_4}{z_5}\right)\left(\frac{z_{3'}}{z_{2'}}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{z_4 z_{3'}}{z_5 z_{2'}}} = \frac{z_2 z_5}{z_2 z_5 - z_3' z_4}. \quad (14)$$

Подставив (13) и (14) в (12), окончательно получим

$$u_{15} = \frac{(z_1 + z_3) \cdot z_2 z_5}{z_1(z_2 z_5 - z_3' z_4)}. \quad (15)$$

Если конструктивно механизм выполнить так, чтобы

$$z_2 = z_{2'}, z_3 = z_{3'}, \quad (16)$$

то можно получить сдвоенный планетарный механизм, изображенный на рис. 6, б. Его передаточное отношение определяется по формуле (15) с учетом (16).

Если в дифференциальном механизме ($W = 2$) звенья соединить (замкнуть) зубчатой цепью со степенью подвижности $W = -1$, то получим **замкнутый дифференциальный механизм**. Степень подвижности всего механизма станет равной единице. При кинематическом исследовании замкнутого дифференциального механизма следует сначала выделить его составные части, т. е. дифференциальный механизм и замыкающую цепь. Замыкающая цепь в схеме механизма обычно представляет собой зубчатую передачу с неподвижными осями колес. Затем для дифференциального механизма записывается формула Виллиса (7), а для замыкающей цепи, как зубчатой передачи с неподвижными осями, соотношение типа (4). После этого из полученной системы двух уравнений можно определить требуемое передаточное отношение.

В качестве примера рассмотрим дифференциальный механизм, изображенный на рис. 4, а. Добавим к нему замыкающую кинематическую цепь, состоящую из зубчатых колес с числами зубьев z_5 , z_6 и z_7 . На рис. 7, а эта цепь показана штриховой линией. Колесо 5 цепи жестко связано с центральным колесом 1 дифференциального механизма, а колесо 7 – с центральным колесом 4. Поэтому в замкнутом дифференциальном механизме (рис. 7, б) выполняются соотношения:

$$\omega_1 = \omega_5; \quad \omega_4 = \omega_7. \quad (17)$$

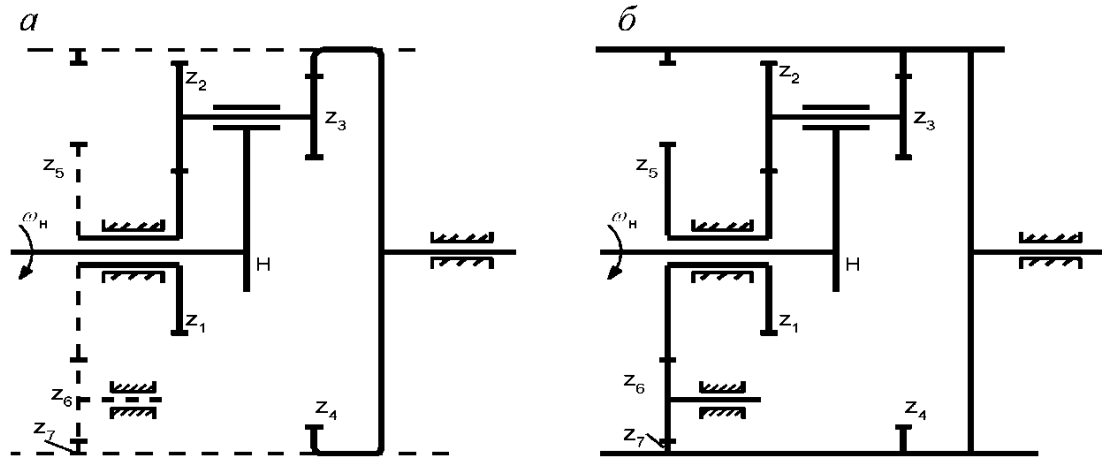


Рис. 7. Замкнутый дифференциальный механизм: *а* – схема образования механизма; *б* – схема замкнутого дифференциального механизма

Пусть заданы числа зубьев всех колёс и требуется определить передаточное отношение u_{H4} замкнутого дифференциального механизма. По формуле Виллиса (7) для дифференциального механизма имеем

$$u_{41}^{(H)} = \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H}, \quad (18)$$

где передаточное отношение преобразованного механизма

$$u_{41}^{(H)} = u_{43} \cdot u_{21} = \left(\frac{z_3}{z_4} \right) \left(-\frac{z_1}{z_2} \right) = -\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}. \quad (19)$$

Для замыкающей цепи, как для зубчатого механизма с неподвижными осями, можно записать:

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_5}{\omega_7} = u_{57}, \quad (20)$$

где передаточное отношение

$$u_{57} = u_{56} \cdot u_{67} = \left(-\frac{z_6}{z_5} \right) \left(\frac{z_7}{z_6} \right) = -\frac{z_7}{z_5}. \quad (21)$$

Соотношение (18) запишем в виде:

$$\omega_H (1 - u_{41}^{(H)}) = \omega_4 \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_4} u_{41}^{(H)} \right),$$

или с учетом (20) получим

$$\frac{\omega_H}{\omega_4} = \frac{1 - u_{57} \cdot u_{41}^{(H)}}{1 - u_{41}^{(H)}}. \quad (22)$$

Подставив (19) и (21) в соотношение (22), найдем искомое передаточное отношение замкнутого дифференциального механизма

$$u_{H4} = \frac{\omega_H}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4 z_5 - z_1 z_3 z_7}{z_5 (z_2 z_4 + z_1 z_3)}.$$

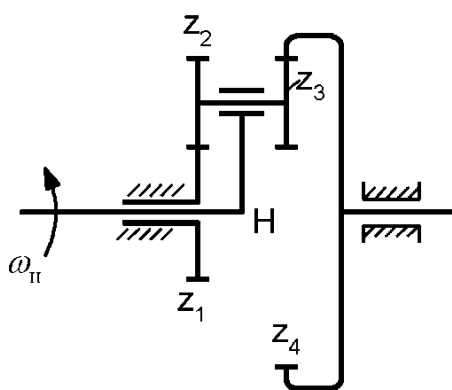
2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. По заданной модели вычертить схему механизма. Для планетарного и дифференциального механизма следует начертить также схему преобразованного механизма.

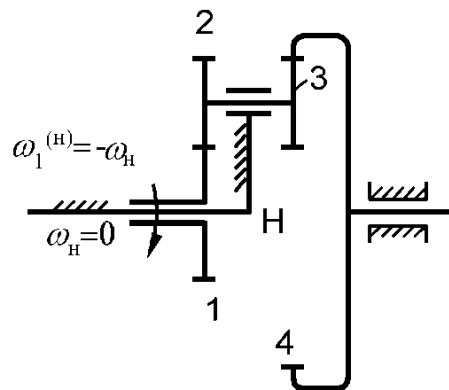
2. Записать формулу и вычислить передаточное отношение механизма.

3. Определить передаточное отношение механизма экспериментально. Для этого следует повернуть ведущее звено на любое количество оборотов в положительном направлении и замерить угол поворота ведомого звена. По формуле (1) подсчитать передаточное отношение и сопоставить его с найденным ранее.

Пример. 1. Схема механизма



а) планетарный механизм



б) преобразованный планетарный механизм

$$\begin{aligned} z_1 &= 60, \\ z_2 &= 30, \\ z_3 &= 60. \end{aligned}$$

2. По условию соосности (11) определяем число зубьев z_4 центрального колеса:

$$z_4 = z_1 + z_2 + z_3 = 60 + 30 + 60 = 150$$

Так как ведущим звеном является водило H (на схеме ведущее звено помечается круговой стрелкой), то передаточное отношение находим по формуле (10):

$$u_{H4}^{(1)} = \frac{\omega_H}{\omega_4} = \frac{1}{\omega_4 / \omega_H} = \frac{1}{u_{4H}^{(1)}} = \frac{1}{1 - u_{41}^{(H)}} = \frac{1}{1 - u_{43} u_{21}} = \frac{1}{1 - \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}} = \frac{1}{1 + \frac{60 \cdot 60}{30 \cdot 150}} = \frac{1}{1,8}.$$

Знак плюс, полученный в передаточном отношении, свидетельствует о том, что водило и колесо 4 будут вращаться в одну сторону.

3. Выразим передаточное отношение через углы поворота звеньев:

$$u_{H4}^{(1)} = \frac{\omega_H}{\omega_4} = \frac{\varphi_H}{\varphi_4} = \frac{360^\circ}{650^\circ} = \frac{1}{1,8}.$$

где угол поворота ведущего водила был принят 360° . При этом ведущее колесо 4 повернулось на угол 650° также против хода часовой стрелки.

Сравнение величин передаточного отношения механизма в пунктах 2 и 3 показывает, что результаты аналитического расчета и практического определения передаточного отношения в пределах точности эксперимента совпадают.

Вопросы для самопроверки

1. Какой зубчатый механизм называется простым?
2. Какой зубчатый механизм называется сложным?
3. Какой зубчатый механизм называется дифференциальным?
4. Какой зубчатый механизм называется планетарным?
5. Какое звено планетарного механизма называется центральным колесом?
6. Какое звено планетарного механизма называется сателлитом?
7. Какое звено планетарного механизма называется водилом?
8. Что такое передаточное отношение зубчатого механизма?
9. Как определяется передаточное отношение сложных зубчатых механизмов с рядовым соединением зубчатых колес?
10. Как определяется передаточное отношение сложных зубчатых механизмов со ступенчатым соединением зубчатых колес?
11. Запишите формулу Виллиса.
12. Какова цель обращения движения при кинематическом анализе планетарных механизмов?
13. Запишите формулу Виллиса для одной из схем дифференциального механизма?
14. Опишите методику кинематического анализа замкнутого дифференциального механизма.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / И.И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
2. Артоболевский, И.И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И.И. Артоболевский, Б.В. Эдельштейн. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 256 с.
3. Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / К.В. Фролов, [и др.]; под ред. К.В. Фролова. – М. : Высш. шк., 1987. – 496 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ	4
2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ.....	13
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	15