

ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ
ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ
Учебное пособие

В работе излагаются возможные методы решения задач динамики механизмов с жесткими звеньями и степенью свободы, равной единице. В главе 1 приведено обоснование выбора динамической модели, соответствия между постановкой технической задачи, ее математической формулировкой и путями численного и (или) аналитического решения. При постановке задач динамики невозможно уйти от вопросов, выходящих за рамки ТММ. К ним относятся характеристики источников и потребителей энергии машины. Этой теме посвящена глава 2, в которой дано представление о ряде типовых характеристик. Более подробно рассмотрены характеристики двух наиболее распространенных типов приводов — электро- и гидромеханического. Основное содержание пособия изложено в главах 3 (начальная задача динамики), 4 (краевые задачи циклового и нециклового движения) и 5 (силовой расчет).

Для студентов старших курсов, преподавателей и инженеров, сталкивающихся с вопросами динамики на начальных этапах проектирования машин.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ	8
1. ОТ МЕХАНИЗМА К МОДЕЛИ	9
1.1. Оправдание простоты динамической модели	9
1.2. Цели расчетов. Динамические и математические модели.....	14
<i>Дифференциальная и энергетическая формы уравнений движения (15).</i>	
1.3. Математическая формулировка задач динамики механизмов ...	17
<i>Начальная и краевые задачи (17).</i>	
1.4. Качественный анализ составляющих уравнения движения	18
<i>Массы и моменты инерции звеньев (19). Приведенный момент инерции J (приведенная масса m) (20). Точность задания внешних воздействий (20). Статическая податливость системы (22). Силы инерции (23).</i>	
1.5. Учет трения в кинематических парах	24
<i>Трение в высшей паре (26). КПД зубчатой пары (27). Трение в рычажных механизмах (28). КПД рычажного механизма (31). КПД системы механизмов (32).</i>	
2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСТОЧНИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЗМОВ.....	35
2.1. Источники и потребители энергии в машине и механизме.....	35
2.2. Механические характеристики некоторых источников и потребителей энергии.....	38
<i>Нагрузки в технологических машинах (38). Индикаторные диаграммы (39). Внешние характеристики тепловых двигателей (ДВС, паро-, газотурбинных двигателей и т. д.) (41). Скоростная характеристика лопастных машин (41). Трение в кинематических парах (42). Податливость элементов конструкции (46).</i>	
2.3. Определение области существования возможных механических характеристик приводов	48

2.4. Механические характеристики электромеханических приводов	51
2.4.1. Типы электродвигателей и их характеристики	52
2.4.2. Управление характеристиками электродвигателей	53
2.5. Выходные механические характеристики гидромеханических приводов	62
2.5.1. Типы гидроприводов и их характеристики	62
<i>Насосный, аккумуляторный и магистральный гидроприводы (63).</i>	
2.5.2. Управление характеристиками гидроприводов	65
<i>Объемное (67) и дроссельное регулирование насосного привода (68). Последовательное (69) и параллельное включение дросселя (70). Регулирование параметров движения гидروпередат с аккумуляторным и магистральным приводами (72).</i>	
3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА)	73
3.1. Энергетическая форма уравнения движения	73
<i>Геометрическая интерпретация решения (74). Влияние параметров m, F_d, v_n на закон движения (75). Влияние положения s_p графика $F_c(s)$ на $(F_d)_{nm}$ и закон движения (75). Влияние протяженности нагружения на закон движения механизма (77).</i>	
3.2. Дифференциальная форма уравнения движения	79
<i>Метод последовательных приближений Пикара (79). Сходимость позиционной задачи (80). Влияние скоростной характеристики на движение системы. Сходимость автономной задачи (82). Сходимость при вычислении ускорений (85). О пользе v_n (87).</i>	
3.3. Некоторые принципы регулирования движения механизмов	88
<i>Управление движением силой $F_d(s)$ (89). Регулирование скорости (90). Протяженность участка погружения (91). Расположение участка нагружения внутри полного хода точки (звена) приведения (91). Начальный уровень энергии системы (91). Допустимый перепад скорости $\Delta v_{нб}$ (92).</i>	
4. ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ	93
4.1. О режимах работы машины	94
<i>Цикловое (94) и нецикловое движение (96). Две крайние задачи циклового движения (97).</i>	
4.2. Нецикловое движение	99
4.2.1. Перемещение на заданное расстояние без ограничения на время операции (задача со свободным конечным временем)	101
<i>Задачи с $m = \text{const}$ (102). Влияние $v_n \neq 0$ и $v_k \neq 0$ (107). Учет $m = m(s)$ (107).</i>	

4.2.2. Перемещение на заданное расстояние за заданное время (обеспечение заданного быстродействия механизма).....	107
4.2.3. О достоверности результатов	109
4.3. Цикловое движение.....	112
4.3.1. Общие положения итерационных методов решения краевых задач циклового движения	112
4.3.2. Численное решение на основе энергетической формы уравнения движения.....	114
<i>Позиционная система (114). Особенности расчета автономной системы (117).</i>	
4.3.3. Влияние скоростной характеристики на движение механизма (движение позиционной и автономной систем при $J = J_c$)	119
5. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ...	125
5.1. Общая схема решения.....	125
5.2. Матричное представление уравнений движения звена механизма	127
5.3. Силовой расчет шарнирного четырехзвенника	129
5.4. Особенности расчета поступательных пар и сдвоенных шарниров.....	132
5.5. Блочный метод составления матрицы коэффициентов	135
5.6. Примеры составления матрицы коэффициентов для сложного механизма	139
5.7. Особенности учета сил трения	142
6. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ. Что же мы получили и кому все это нужно?!.....	147
<i>Обслуживание внутренних нужд ТММ, исходные данные для проведения предварительных расчетов на прочность элементов конструкции, конструирования и последующих исследований динамики машины, исходные данные для расчета привода, предложения по управлению движением.</i>	
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	158

ПРЕДИСЛОВИЕ

Лучше знать мало, чем знать плохо.

Ан. Франс. Восстание ангелов

Предполагается, что читатель знаком с понятиями «динамическая и математическая модели», «приведенная масса (момент инерции)», «приведенная сила (момент)». Этот материал можно найти в любом учебнике или учебном пособии по ТММ, и его достаточно для работы с данной книгой. Предлагаемые вопросы динамики механизмов почему-либо отсутствуют в литературе по ТММ или изложены, на взгляд авторов, недостаточно полно. Однако понимание их полезно при постановке задач исследования и расчетах. Очень важным является отыскание соответствия между постановкой технической задачи, ее математической формулировкой и путями численного и (или) аналитического решения. Это позволяет воспользоваться известными методами и не изобретать без необходимости доморощенных. Книга, с одной стороны, предостерегает от чрезмерного оптимизма при интерпретации получаемых результатов, с другой — пытается предложить достаточно достоверные сведения. Говоря словами известного математика Р. Беллмана, предложена попытка в процессе постановки и решения задач «пройти узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения».

Книга была задумана как пособие для решения задач динамики при работе над курсовым проектом по ТММ, но будет полезна для студентов старших курсов и инженеров, сталкивающихся с вопросами динамики на начальных этапах проектирования машин.

Авторы обращают внимание на то, что в книге рассматриваются вопросы **динамики механизмов**, а не динамики машин. Именно поэтому используются элементарные динамические мо-

дели, единственно возможные на начальном этапе проектирования машины.

При постановке задач динамики невозможно уйти от вопросов, выходящих за рамки ТММ. К ним относятся характеристики источников и потребителей энергии машины. Этой теме отведена глава 2. Мы дали представление о ряде типовых характеристик. Более подробно рассмотрели характеристики двух наиболее распространенных типов приводов — электро- и гидромеханического. Соответствующие параграфы написаны специалистами в этих областях — А.Б. Красовским (кафедра электротехники) и М.В. Рябининым (кафедра гидравлики). Мы не обещаем многого, но в пределах рассматриваемых моделей предложенные подходы позволяют получать достаточно правдоподобные результаты. На основе изложенного можно формулировать и решать любые задачи данного класса.

1. ОТ МЕХАНИЗМА К МОДЕЛИ

Оправдание простоты динамической модели. Цели расчетов. Динамическая и математическая модели: *дифференциальная и энергетическая форма уравнений движения*. Математическая формулировка задач динамики механизмов: *начальная и краевая задачи*. Качественный анализ составляющих уравнения движения: *массы и моменты инерции звеньев; приведенный момент инерции J (приведенная масса m); точность задания внешних воздействий; статическая податливость системы; силы инерции*. Учет трения в кинематических парах: *трение в высшей паре; КПД зубчатой пары; трение в рычажных механизмах; КПД рычажного механизма; КПД системы механизмов*.

1.1. Оправдание простоты динамической модели

Предположим, что человек имеет форму шара.
П.Л. Чебышев

В результате неформализованных действий талантливого инженера или формализованных действий инженера средней руки мы имеем одну или несколько **кинематических схем механизмов**, способных реализовать заданный режим работы [3].

Что же представляет собой **кинематическая схема**? Это набор кружочков, прямоугольников, линий и т. п. — звеньев и кинематических пар, вычерченных в некотором масштабе (рис. 1.1). Дальнейший переход от кружочков и линий к конструкции требует нахождения сечений звеньев и размеров кинематических пар. Только после этого можно говорить о массах и моментах инерции звеньев, условиях трения, податливости элементов системы и далее о конструкции, приводе и т. п. Всю эту цепочку действий можно представить в виде блок-схемы (рис. 1.2). Итерационный процесс последующих расчетов заданной или найденной схемы очевиден и состоит из нескольких циклов.

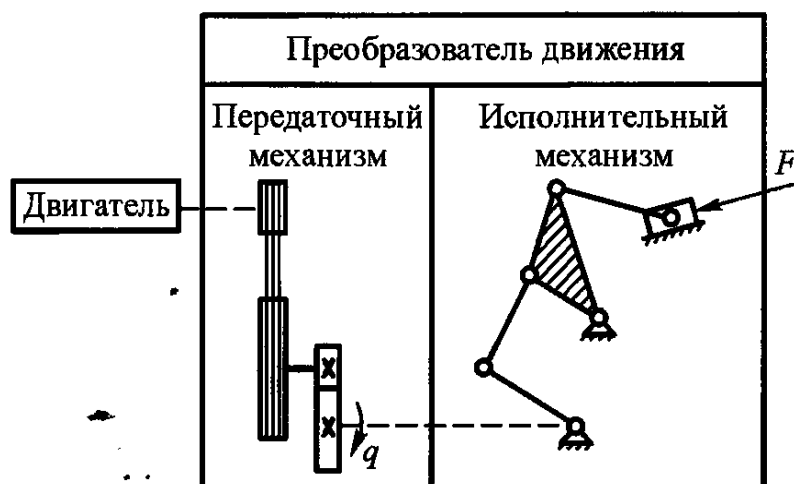


Рис. 1.1

Вопросы динамики рассматриваются в двух блоках: силовой расчет и динамический синтез. При первом прохождении цепочки расчетов можно найти реакции в кинематических парах только по внешним воздействиям, без учета масс и моментов инерции звеньев, условий трения и т. д., то есть без учета ускоренного движения элементов механизма. Далее по найденным реакциям можно определить размеры сечений звеньев и кинематических пар. Это, в свою очередь, позволяет найти массы и моменты инерции звеньев, оценить податливость элементов системы и приступить к конструированию. По результатам конструирования можно задать условия трения в кинематических парах и т. д. Казалось бы, теперь можно провести уточненное определение реакций в парах (цикл 1). Не тут-то было. Для учета ускоренного движения в силовом расчете нужно знать законы движения элементов механизма. А они нам известны только в интегральном виде, например в виде времени цикла. Таким образом, естественным является продолжение расчетов во втором блоке — динамическом синтезе, одной из целей которого является определение закона движения механизма* (цикл 2). Однако для проведения этого расчета необходимо знать тип привода и его параметры, что также является одной из целей расчета. Этим замыкается еще один цикл (цикл 3).

* Итерационный характер расчетов позволяет задаться произвольными значениями масс и моментов инерции. Все равно на последующих итерациях уточняются как размеры сечений звеньев и пар, так и их массы и моменты инерции.



Рис. 1.2

После проведения нескольких циклов результаты двух последовательно проведенных расчетов оказываются достаточно близкими — **сходятся**.

Ясно, как много зависит от **квалификации инженера при задании начального приближения, выбора целей и методов расчета**. Видите — начало расчетов характеризуется прибли-

женностью получаемых результатов. Хорошо это или плохо? Ни то, ни другое. Это факт. Все зависит от того, для каких дальнейших расчетов будут использоваться полученные результаты.

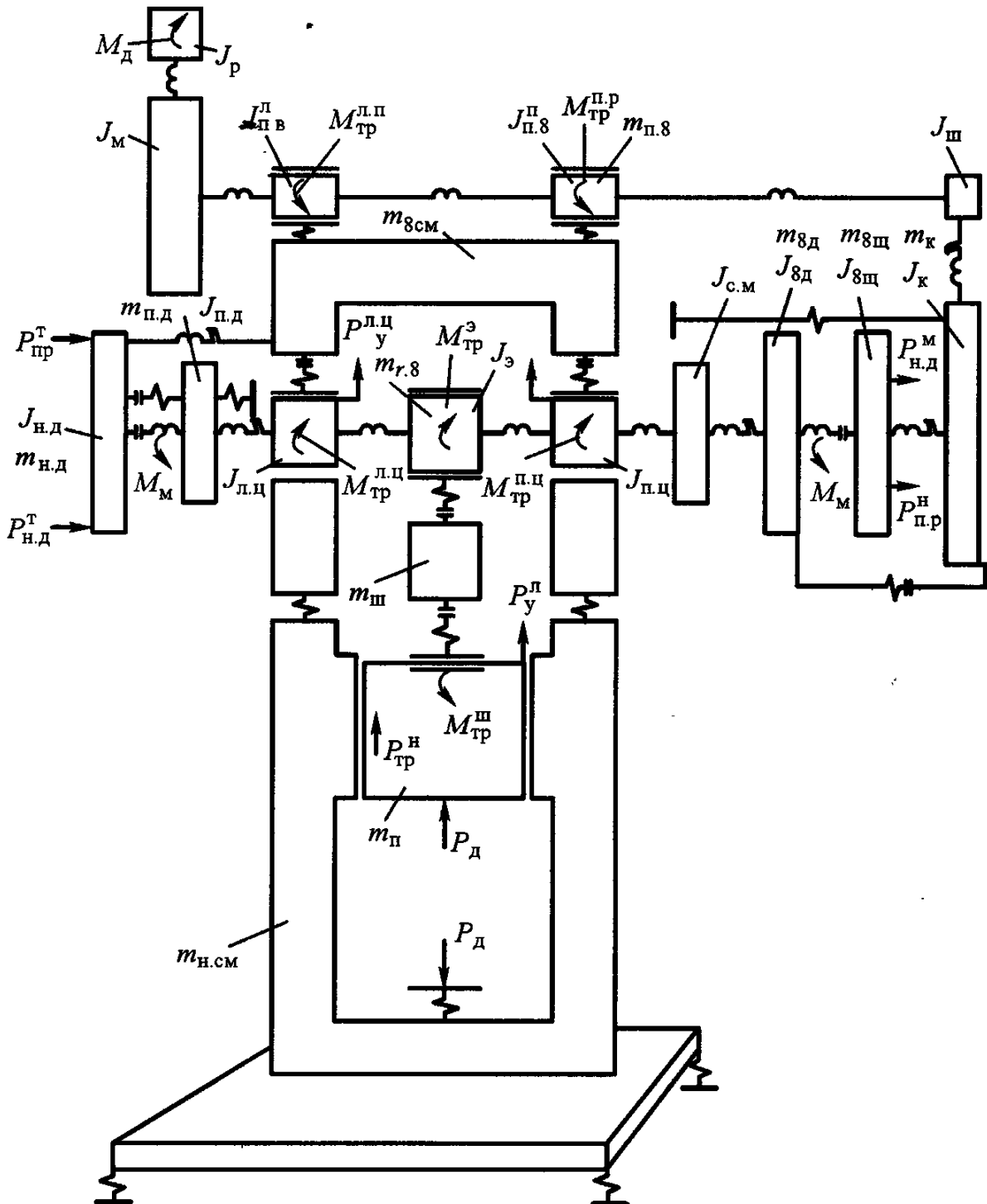


Рис. 1.3

Рассмотрим простой пример (см. рис. 1.1). Размеры шарниров механизма даже на первой итерации определяются с точностью 20...50 %. Как такая точность скажется на расчетах по различным динамическим моделям?

Возьмем очень хорошую динамическую модель машины [4], учитывающую не только массы и моменты инерции звеньев, но и податливости элементов конструкции (рис. 1.3). Все прекрасно, но квадрат собственной частоты крутильных колебаний вала диаметром d с диском на конце пропорционален d^4 [5], т. е. ошибка в определении исходных данных на 20...50 % приводит к ошибке в результате на 100...300 %.

Теперь рассмотрим элементарную динамическую модель механизма этой машины (рис. 1.4, а). Звенья и пары механизма (см. рис. 1.1) приняты жесткими. В этом случае помимо внешних нагрузок (движущего момента и силы сопротивления) M_d и F_c мы можем учесть только трение в кинематических парах. В случае сухого трения в кинематических парах момент сопротивления на валу кривошипа равен $M(F_c) + M_{тр} \sim F_c(l_1 + fd/2)$, и ошибка в результатах расчетов может оказаться меньше ошибки исходных данных.

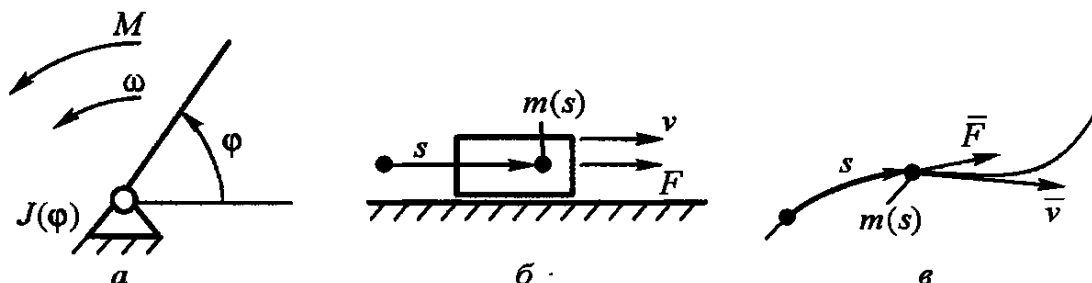


Рис. 1.4

Таким образом, делаем первый и очень важный вывод: **сложность модели должна соответствовать достоверности исходных данных**. «Лучше знать мало, чем знать плохо» (А. Франс. «Восстание ангелов»). И «лучше предвидеть плохо, чем не предвидеть вовсе» (А. Пуанкаре).

Будем считать, что **динамика машин** занимается моделями, подобными приведенной на рис. 1.3, а **динамика механизмов** — моделями, подобными приведенным на рис. 1.4. В этом случае можно говорить не о значениях исходных данных, а об их оценках.

1.2. Цели расчетов. Динамические и математические модели

Мы постоянно повторяем, что находимся в самом начале процесса, объем исходной информации у нас ограничен, а количественные характеристики часто приближенны. Поэтому наши возможности при постановке и решении задач также скромны. Это касается и вопросов динамики: требуется увязать нагружение исполнительных звеньев механизма или системы механизмов и работу электро-, гидро-, пневмопривода.

Соответственно, ЦЕЛЯМИ динамических расчетов являются:

1) определение ограниченного числа достоверных параметров, необходимых для расчета привода;

2) анализ возможных режимов работы машины;

3) предложения по управлению движением машины.

Ниже рассматривается динамика механизмов с одной степенью подвижности ($w = 1$), жесткими звеньями и голономными связями (отсутствие зазоров в кинематических парах). Возможны три типа динамических моделей, которые описывают три вида механических движений:

а) вращательное движение тела с моментом инерции J под действием момента $M(\varphi, \omega, t)$ вокруг неподвижной оси — рис. 1.4, а;

б) прямолинейное движение точки массой m под действием силы $F(s, v, t)$ — рис. 1.4, б;

в) общий случай — движение точки массой m под действием силы $F(s, v, t)$ вдоль некоторой траектории — рис. 1.4, в.

Следует отметить, что параметры J и m также могут быть функциями скорости и времени, например при вращении открытого сосуда с жидкостью $J = J(\omega)$. Однако здесь (кроме особо оговоренных случаев) будут рассмотрены два класса механических систем: позиционные, силы (моменты) которых являются функциями положения динамической модели, и автономные, силы (моменты) которых являются функциями положения и скорости динамической модели, а время в явном виде в уравнения не входит. Примем, что масса (момент инерции) модели зависит от ее положения:

$$m = m(s); \quad J = J(\varphi).$$

Для автономной системы и в общем случае движение описывается уравнением движения в дифференциальной форме. Позиционная система может описываться как уравнением движения в дифференциальной форме, так и уравнением движения в энергетической форме.

Дифференциальная форма уравнения движения.

Вращательное движение (см. рис. 1.4, а):

$$J\varepsilon + 0,5\omega^2 \frac{dJ}{d\varphi} = M(\varphi, \omega, t). \quad (1.1)$$

Прямолинейное движение (см. рис. 1.4, б):

$$\frac{d}{dt}(mv) = ma + 0,5v^2 \frac{dm}{ds} = F(s, v, t). \quad (1.2)$$

В общем случае (см. рис. 1.4, в) к (1.2) добавляется уравнение

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n, \quad (1.3)$$

где ρ — радиус кривизны траектории движения точки.

Энергетическая форма уравнения движения.

Вращательное движение (см. рис. 1.4, а):

$$T - T_i = 0,5(J\omega^2 - J_i\omega_i^2) = A(\varphi) = \int_{\varphi} M(\varphi) d\varphi. \quad (1.4)$$

Прямолинейное движение (рис. 1.4, б):

$$T - T_n = 0,5(mv^2 - m_n v_n^2) = A(s) = \int_s F(s) ds. \quad (1.5)$$

В общем случае (см. рис. 1.4, в) к (1.2) добавляется уравнение (1.3).

В уравнениях (1.1)–(1.5)

$$J = J(\varphi) = J_c + I_v(\varphi); \quad m = m(s) = m_c + m_v(s), \quad (1.6)$$

где J_c, m_c — постоянные составляющие J и m ; J_v, m_v — переменные составляющие J и m , зависящие от положения механизма.

Значительный класс задач в этой книге сводится к рассмотрению автономных систем. Частным случаем автономной системы является позиционная. Для автономной системы правая часть уравнений (1.1) и (1.2) имеет вид

$$F = F(s, v) \text{ или } M = M(\varphi, \omega). \quad (1.7)$$

Для механических систем без обратной связи (рис. 1.5, а) функция (1.7) является линейной комбинацией функций силовых характеристик, зависящих от положения и скорости звена (точки приведения):

$$F = F(s) + F(v) = F_s + F_v \text{ или } M = M(\varphi) + M(\omega) = M_\varphi + M_\omega. \quad (1.8)$$

Соответственно, уравнения движения (1.1) и (1.2) преобразуются к виду

$$J\varepsilon + 0,5\omega^2 \frac{dJ}{d\varphi} = M_\varphi + M_\omega \quad (1.9)$$

или

$$ma + 0,5v^2 \frac{dm}{ds} = F_s + F_v. \quad (1.10)$$

При наличии обратной связи (рис. 1.5, б) правая часть этих уравнений описывается функцией (1.7).

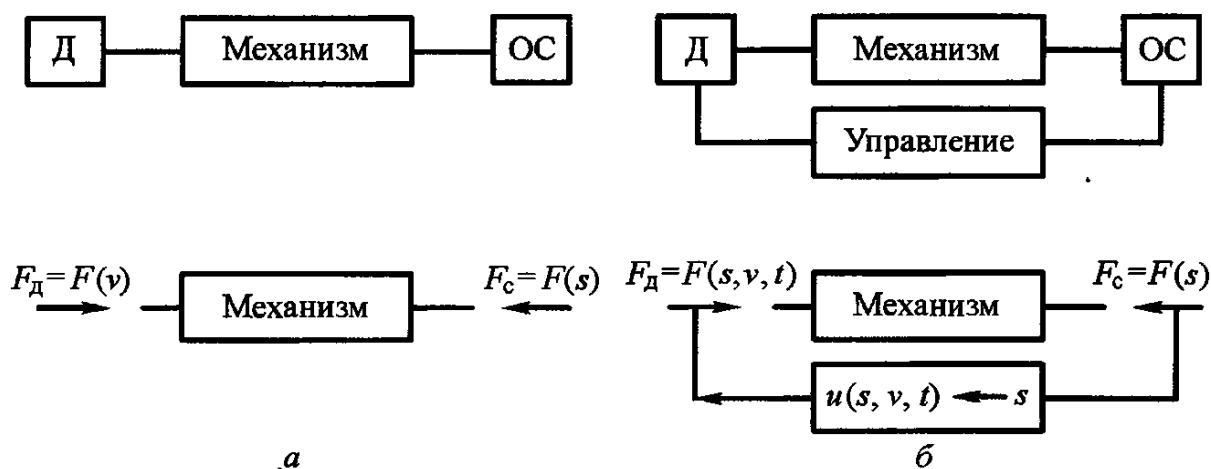


Рис. 1.5

В состав правой части уравнения движения могут входить помимо внешних воздействий от привода (Д) и обрабатываемой среды (ОС) приведенные силы (моменты) трения, определенные каким-либо приближенным или точным (если очень повезет) способом.

1.3. Математическая формулировка задач динамики механизмов

Начальная задача — АНАЛИЗ движения механизма при заданных силе (моменте) и массе (моменте инерции) и начальных условиях $s_n, v_n, t_n, (\varphi_n, \omega_n, t_n)$. Цель решения задачи — определение ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ в форме $s = s(t)$ или $\varphi = \varphi(t)$. Задача может считаться решенной, если получены зависимости $v = v(s)$ или $\omega = \omega(t)$, либо иные парные сочетания параметров (s, v, a, t) или $(\varphi, \omega, \varepsilon, t)$. В этом случае, например,

$$\tau(s) = \int_s \frac{ds}{v(s)}. \quad (1.11)$$

Краевые задачи. В простейшем случае требуется, чтобы материальная точка, начав движение в заданной точке пространства, попала в другую заданную точку пространства. Решение такой задачи сложнее решения начальной. Все краевые задачи так или иначе связаны с **управлением движением**, т. е. с целенаправленным принуждением. Соответственно, **цель движения** — указание свойств, которые движение должно приобрести в результате этого принуждения [6]. Уравнения, выражающие цель движения, называются **программой движения**. В наших задачах управление движением может осуществляться регулированием скорости привода (пассивным — с помощью аккумулятора энергии, например маховика или гидроаккумулятора; активным — с помощью системы управления, например управлением потоком жидкости в гидросистеме) и регулированием силового воздействия, например переключением давления в гидросистеме. Краевыми условиями могут быть:

$$\begin{aligned} &v_n, v_k, v_{нб}, v_{нм}, v_{ср} \text{ и т. д.}; \\ &F_n, F_k, F_{нб}, F_{нм}, F_{ср} \text{ и т. д.}; \\ &t_{\text{опер}}, t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n \text{ и т. д.}; \\ &a_n, a_k, a_{нб} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Краевые задачи — это задачи динамического СИНТЕЗА. В результате их решения определяются параметры управления движением:

$$\begin{aligned}v &= v(s) \text{ и (или) } s = s(t); \\m &= m_c \text{ или } J = J_c; \\F_d &= F_d(s) \text{ или } F_d = F_d(v),\end{aligned}$$

где F — управляющее воздействие привода.

В зависимости от типа привода и возможностей системы управление может быть непрерывным или дискретным. В последнем случае в число искомых или задаваемых параметров входит число рациональных переключений F_d .

1.4. Качественный анализ составляющих уравнения движения

Этот параграф, по-видимому, будет самым сложным в изложении и понимании. Мы будем постоянно вынуждены говорить «оценим», «похоже», «правдоподобно», «не противоречит здравому смыслу» и т. п.

У нас в распоряжении есть уравнения движения в двух формах — энергетической и дифференциальной. Мы уверены, что сумеем их решить, если не аналитически (на это надежды мало), то, по крайней мере, численно. Мы умеем свести задачу о динамике сложного механизма с одной степенью подвижности (см. рис. 1.1) к задаче о вращении звена вокруг неподвижной точки (см. рис. 1.4, а) или движению материальной точки по заданной траектории (см. рис. 1.4, б, в).

До сих пор предполагалось, что мы все знаем о составляющих уравнения движения. Основывалась эта уверенность на том, что силы, моменты, массы и моменты инерции звеньев известны. Тот факт, что мы имеем дело не с точными значениями величин или зависимостями, а с их математическими ожиданиями, пока не рассматривался. Конечно, в § 1.1 была ссылка на неполноту информации на начальном периоде расчетов и связанную с этим приближенность получаемых результатов. Однако эту грустную информацию следует дополнить сведениями о степени достоверности исходных данных и

увязать их с будущими результатами. Переходя на «прозу», можно сказать, что следует рассмотреть соответствие (адекватность) предполагаемых результатов и исходных данных.

В качестве объектов анализа рассмотрим:

- точность задания масс и моментов инерции звеньев, возможность варьирования их значений;
- соотношение между J_c и J_v (m_c , m_v);
- точность задания внешних воздействий (сил и моментов);
- статическую податливость элементов механизма;
- влияние сил инерции.

Массы и моменты инерции звеньев. Их значения, а также положения центров масс определяются по результатам прочностных расчетов и конструирования. Исходными данными для этого служат результаты силового расчета механизма. В процессе проектирования проводится уточнение этих параметров.

Рассмотрим соответствие между размерами звеньев, их массой и моментом инерции. Обозначим линейный размер тела L . Тогда габариты тела ограничиваются размерами $L_1 \times L_2 \times L_3$, а масса и момент инерции с точностью до постоянного множителя определяются соотношениями

$$m \sim L^3; \quad J \sim L^5. \quad (1.12a)$$

Нетрудно заметить, что наилучшим образом влиять на момент инерции всей системы удобно с помощью специальной вращающейся массы, называемой маховиком. Нередко она входит в узлы управления машиной (муфта включения-выключения привода) или является составной частью какого-либо звена передаточного механизма.

Для рычажных исполнительных механизмов фиксированными являются длины звеньев. Воздействовать на массу звена можно только изменением площади его сечения, причем нижней оценкой является результат расчета на прочность. Соответственно, на момент инерции звена влияет не только минимально возможная площадь сечения, но и конфигурация звена. Можно считать правдоподобным, что масса и момент инерции звена рычажного механизма пропорциональны квадрату линейного размера поперечного сечения (его площади):

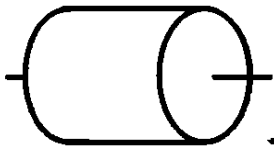
$$m \sim L^2; \quad J \sim L^2. \quad (1.126)$$



$$L=1; m=1; J=1$$

Для кулачка нефиксированным размером является только его ширина. Соответственно, его масса и момент инерции пропорциональны только первой степени линейного размера:

$$m \sim L; J \sim L. \quad (1.12в)$$



$$L=1,15; m=1,5; J=2$$

Сравнение формул (1.12а)–(1.12в) показывает, что помимо каких-либо иных соображений предпочтительным является варьирование массой и моментом инерции вращательного звена передаточного механизма, причем даже незначительное изменение линейных размеров существенным образом отражается на моменте инерции и массе.

Рис. 1.6

При увеличении всех размеров маховика на 15 % момент инерции увеличивается примерно на 100 %, а масса — на 50 % (рис. 1.6).

Приведенный момент инерции J (приведенная масса m). Итак, $J = J_c + J_v(\varphi)$. Рассмотрение множества механизмов, цикловых и нецикловых, позволяет утверждать, что $J_c \gg J_v^{нб}$. Даже для нецикловых механизмов $J_v^{нб} / J_c < 0,5$. Это позволяет в различного рода аналитических расчетах цикловых механизмов предлагать приемлемые допущения. Например, можно считать, что

$$\frac{1}{J_c + J_v} \approx \frac{1}{J_c}; \ln \frac{J}{J_n} = \ln \frac{J_c + J_v}{J_c + J_{vн}} \approx \frac{J_v}{J_c}$$

и т. д.

Точность задания внешних воздействий. Характеристики нагружения — силы (моменты) движущие и сопротивления — представляют в виде таблиц (массивов), графиков или функций. Их описание приводится в соответствующих дисциплинах и представляет собой математическое ожидание характеристик данного типа нагружения. Очень важно понять, что это именно **математическое ожидание**, а не достоверность. Это значит, что в зависимости от каких-либо факторов возможны отклонения от представленных значений нагрузки. Например, материал в состоянии поставки может иметь отклонение от приведенных в справочнике или паспорте характеристик на несколько процентов. На его характеристики могут влиять и иные факторы — подготовка к обра-

ботке, скорость обработки и т. д. При проектировании не занимаются исследованием природы этих отклонений, но знать о них и учитывать в расчетах необходимо.

Поясним эти соображения следующим примером.

Пример. Ползун прессы деформирует некоторую заготовку. Предположим, что на действительное значение силы деформирования оказывают влияние следующие факторы: разброс механических характеристик исходного материала, несовершенства технологии и объединенные в одну группу прочие несовершенства. Пусть разброс значений предела текучести (прочности) материала составляет $\pm 10\%$ от паспортного; сила деформирования в зависимости от несовершенств технологии может отклоняться от ожидаемой также на $\pm 10\%$; в результате прочих несовершенств возможно отклонение силы деформирования на $\pm 10\%$. Все отклонения носят случайный характер.

Мерой отклонения с вероятностью P от ожидаемого значения силы деформирования является доверительный интервал. Его можно вычислить следующим образом [7].

Примем, что число несовершенств соответствует числу оригинальных опытов $n = 3$; число независимых испытаний каждого опыта $m = 2$ (принято, что наибольшее и наименьшее отклонения каждого из несовершенств получены в результате единичного опыта).

Тогда доверительный интервал Δ отклонения силы деформирования F с заданной вероятностью $P = 95\%$ от ее математического ожидания определяется следующей процедурой:

$$\Delta = t_p[n(m-1)]S_b = 0,18F; \quad (1.13)$$

$$S_b = \sqrt{\frac{S_y^2}{nm}}; \quad S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^2}{n}; \quad S_i^2 = \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2.$$

Здесь $t_p[n(m-1)] = t_{0,95}(3 \cdot 1) = 3,18$ — критерий Стьюдента; S_b — среднее квадратическое отклонение; S_y^2 — дисперсия воспроизводимости; S_i^2 — дисперсия отклика каждого оригинального опыта; y_{iu} — i -й отклик в серии из m опытов; $\bar{y}_i$ — среднее значение отклика в серии из m опытов.

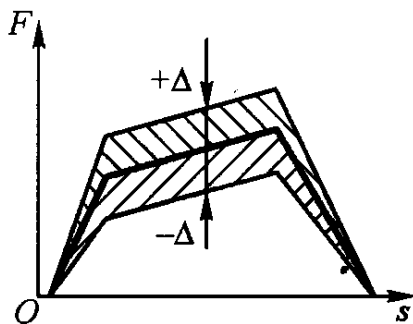


Рис. 1.7

Откликом на вероятностный характер нагружения (рис. 1.7) является изменение приведенной силы (момента) и далее кинетической энергии системы и закона движения точки (звена) приведения (см. рис. 1.4) при неизменной зависимости приведенной массы (момента инерции).

Вероятностный характер нагружения механизма может существенным образом повлиять на понимание (содержательную интерпретацию) результатов расчета, проведенных на основе манипуляций с математическими ожиданиями функций, заложенных в математическую модель. В частности, при исследовании движения механизма с приводом от асинхронного электродвигателя со слишком жесткой скоростной характеристикой может оказаться, что эффекты, связанные с ней, невозможно отделить от влияния вероятного разброса деформирующей силы (см. главу 4).

Статическая податливость системы. Опять приходится говорить, что мы слишком мало знаем о будущих свойствах конструкции (сечения элементов конструкции, материалы, зазоры, стыки, условия трения и т. д.), чтобы хорошо оценить влияние податливости системы на ее динамику (о влиянии точности расчета размеров элементов конструкции уже было сказано). Поэтому ограничимся гипотезой о линейной зависимости между нагружением и податливостью механической системы. Количественные

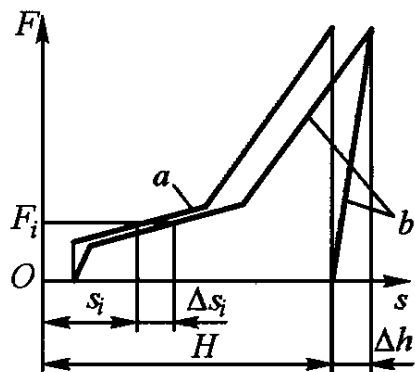


Рис. 1.8

оценки читатель может найти в литературе по расчету и конструированию машин соответствующих отраслей техники или задаться такой оценкой, ориентируясь на понятие предела пропорциональности материала ($\sigma_{\text{пл}}$). Тогда допустимая деформация элементов конструкции принимается меньше $\epsilon_{\text{пл}} = (1...5) \cdot 10^5$ [8].

На рис. 1.8 показана исходная зависимость силы от перемещения исполнительного звена (кривая *a*) и с учетом статиче-

ской податливости системы (кривая b). Следует отметить, что при прохождении крайних положений механизма изменяется функция силы, приложенной к исполнительному звену: сила сопротивления превращается в движущую и наоборот (рис. 1.9).

Силы инерции. Влияние сил инерции определяется, с одной стороны, значениями масс звеньев, их конфигурацией (моментом инерции) и характером нагружения (растяжение-сжатие, изгиб, кручение); с другой стороны — ускорениями (угловыми ускорениями) звеньев. В простейших случаях (растяжение-сжатие) между массой звена и нагрузкой существует прямая связь: с одной стороны, сечение звена пропорционально нагрузке, а с другой — его массе. Тогда соотношение между силой инерции и нагрузкой имеет вид

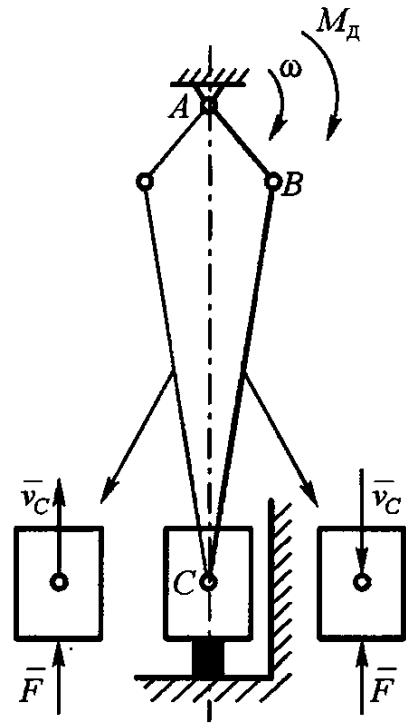


Рис. 1.9

$$\frac{\Phi}{F} = \frac{ma}{[\sigma]S} = \frac{ma}{[\sigma]\frac{m}{l\gamma}} = \frac{al\gamma}{[\epsilon]E}. \quad (1.14a)$$

Здесь Φ , m , a , l , S , E , γ , $[\sigma]$, $[\epsilon]$ — сила инерции, масса, ускорение центра масс, длина, площадь сечения, модуль упругости, плотность материала звена, допустимые напряжения и соответствующие им деформации; F — нагрузка на звено.

Если принять, что материал звена — сталь и $[\epsilon] \sim \epsilon_{\text{шт}}/2$, получим

$$\frac{\Phi}{F} \approx \frac{al}{5 \cdot 10^3}. \quad (1.146)$$

Для шатуна кривошипно-ползунного механизма при $r/l = 1/5$ (r , l — длины кривошипа и шатуна) и скорости вращения кривошипа ω можно принять, что мажоранта ускорения ползуна $ma_j(a) \approx \omega^2 r$. Тогда получаем, что

$$\frac{\Phi}{F} \approx \frac{(\omega r)^2}{10^3} \quad \text{или} \quad (\omega r) \approx 30 \sqrt{\frac{\Phi}{F}}. \quad (1.14b)$$

Например, для кривошипа длиной 0,1 м, вращающегося с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с ($n = 1000$ об/мин), $\Phi/F = 0,1$. Получается, что при больших значениях ускорений звеньев (нормальное ускорение оси пальца кривошипа $a = 100g$) силы инерции могут быть весьма и весьма невелики.

В более сложных случаях вряд ли возможны такие элементарные выкладки. Например, масса ползуна зависит от его конструкции, которая, в свою очередь, определяется не только прочностными требованиями, но также жесткостью и рабочими функциями ползуна.

Сумма сил инерции всех звеньев позволяет соотнести их влияние с влиянием основной нагрузки и возможных отклонений от нее. Вероятностный характер нагружения механизма, о котором говорилось ранее (см. рис. 1.7 и формулы (1.13)), позволяет в определенных случаях включать силы инерции в перечень возмущений, входящих в доверительный интервал нагрузки рабочего процесса. Возможна и другая постановка вопроса: по вычисленным силам инерции оценить их влияние на силовую картину с позиций вероятностного характера нагружения, т. е. определить, можно ли включить их в перечень возмущений, входящих в доверительный интервал нагружения.

1.5. Учет трения в кинематических парах

Трение увеличивает требуемую мощность привода машины и снижает ее ресурс. Наличие трения позволяет в одних случаях сглаживать проявления динамических эффектов системы, а в других — их усиливать.

Наверное, вопросы, связанные с трением, относятся к категории самых неприятных из всех неприятных вопросов, особенно на начальной стадии проектирования. Это связано с ужасающей неопределенностью характера трения в кинематических парах. Даже в течение одного цикла нагружения характер трения может существенно изменяться (рис. 1.10). Мы видим, как по мере возрастания нагрузки трение в подшипнике переходит из жидкостного (см. рис. 1.10, а) к полужидкостному (см. рис. 1.10, б) и далее по мере выдавливания смазки — к сухому (см. рис. 1.10, в). Более или менее достоверные предположения о процессах трения можно де-

лать только на заключительных стадиях расчета, когда проработана конструкция машины, известны в достаточной степени будущие условия ее эксплуатации.

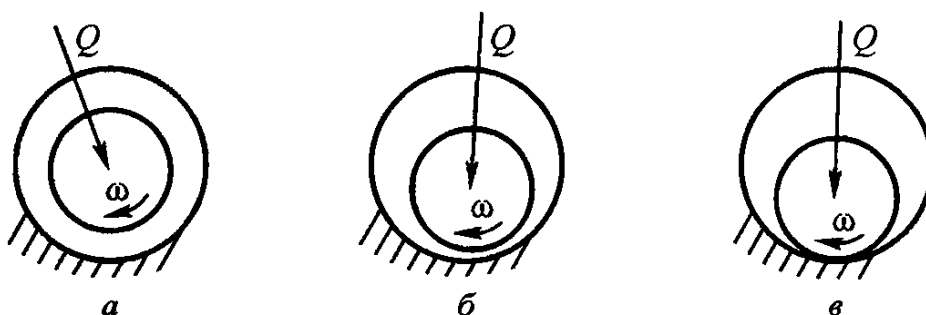


Рис. 1.10

Неопределенность проявления эффектов, связанных с нагружением соединений, их конструкцией, наладкой, условиями трения, может проявляться в том, что одна и та же кинематическая пара в процессе эксплуатации изнашивается по-разному по своей длине (рис. 1.11). Причиной износа верхней части направляющей ползуна (зона *a*) являются контактные напряжения σ_k ; причиной износа нижней части (зона *б*) — скольжение сопрягаемых поверхностей, характеризуемое произведением контактного напряжения и скорости скольжения ($\sigma_k v_{ск}$).

Однако учитывать трение нужно (см. фразу о предвиденье А. Пуанкаре). Но как? Прекрасные теории, примененные преждевременно, могут привести к нелепым результатам. Поэтому, чтобы выкладки были более или менее правдоподобными, воспользуемся самой элементарной гипотезой — законом Амонтона — Кулона (хуже сухого трения в кинематической паре ничего не может быть). Принимаем, что соприкасающиеся поверхности кинематических пар механизма работают в условиях трения скольжения с постоянным коэффициентом трения $f \ll 0,5$. Тогда можно считать, что сила трения Q^t пропорциональна нормальной реакции Q^n в элементе кинематической пары и направлена против скорости ее скольжения (рис. 1.12):

$$Q^t = f Q^n. \quad (1.15)$$

Это допущение существенно упрощает учет трения при подготовке динамической модели (см. рис. 1.4) и силовом расчете (глава 5).

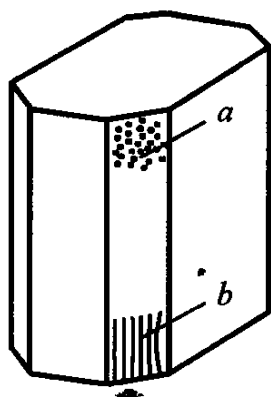


Рис. 1.11

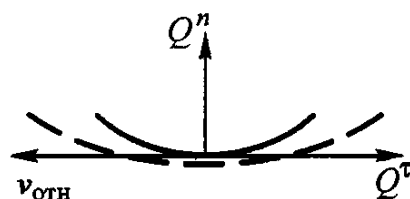


Рис. 1.12

Здесь мы рассмотрим влияние трения на энергетические параметры механизма: движущую силу (момент) и КПД. Степень точности предлагаемого расчета достаточна: влияние вариации коэффициента трения f в пределах $(0,5 \dots 1,5)f$ от справочного значения не слишком скажется на значении движущей силы и КПД. Гораздо большее влияние на результат могут оказать размеры кинематических пар и конфигурация механизма. Во всяком случае, эти утверждения нетрудно проверить, воспользовавшись материалами данного пособия.

Трение в высшей паре. Вопросам трения в высшей паре уделено достаточно внимания в любом учебнике или пособии по ТММ, особенно в случаях, касающихся КПД зубчатых механизмов. В них можно найти как выводы, так и справочный материал. Однако нас интересуют не точные значения параметров трения, а их **оценки** и удобство интерпретации результатов. Поэтому в предложенных ниже рассуждениях и выводах уделяется внимание простоте выкладок и правдоподобности получаемых результатов.

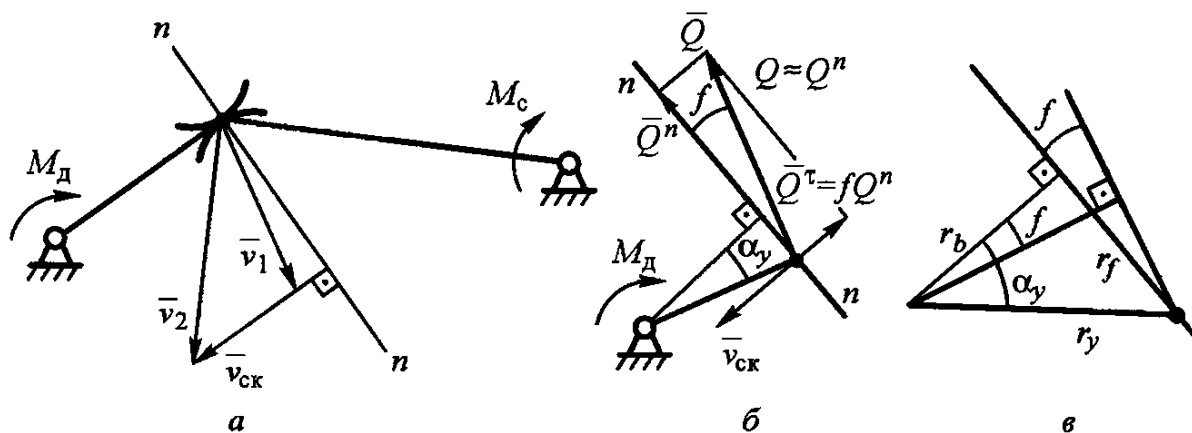


Рис. 1.13

Рассмотрим только трение скольжения. Наличием трения качения пренебрежем для упрощения выкладок. На рис. 1.13, а представлены высшая пара и соотношения между скоростями контактирующих точек ее элементов. На рис. 1.13, б действие ведомого звена заменено реакцией Q , приложенной в точке контакта. При отсутствии трения движущий момент определяется как

$$M^0 = Q^n r_b.$$

При учете трения значение полной реакции практически равно ее нормальной составляющей; более существенное влияние на движущий момент оказывает изменение плеча момента этой силы r_f (рис. 1.13, в):

$$r_f = r_y \cos(\alpha_y - f) = \frac{r_b \cos(\alpha_y - f)}{\cos \alpha_y} \approx r_b (1 + \operatorname{tg} \alpha_y).$$

Тогда с учетом трения движущий момент определяется как

$$M = Q r_f \approx Q^n r_b (1 + f \operatorname{tg} \alpha_y).$$

КПД зубчатой пары. Зацепление зубчатой пары эвольвентной передачи осуществляется по линии зацепления $N_1 N_2$ на ее рабочем участке. Можно догадаться, что чем меньше по сравнению с $N_1 N_2$ рабочий участок линии зацепления, тем выше КПД передачи. Поэтому рассмотрим наихудший случай — зацепление осуществляется от точки N_1 до N_2 (рис. 1.14). Такое допущение существенно упростит выкладки. Также целесообразно принять, что $Q^n = \text{const}$. Тогда полезная работа (без учета трения) при прохождении одной пары сопряженных эвольвент определяется как

$$A^0 = \int_{\varphi_\alpha} Q^n r_b d\alpha_y = Q^n r_b \varphi_\alpha.$$

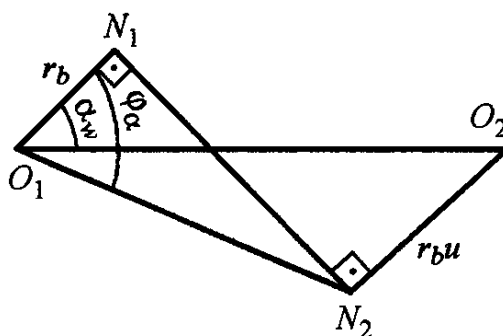


Рис. 1.14

Затраченная работа равна

$$A = \int_{\varphi_\alpha} Q^n r_b (1 + f \operatorname{tg} \alpha_y) d\alpha_y = Q^n r_b \left(\varphi_\alpha + f [-\ln(\cos \alpha_y)]_0^{\varphi_\alpha} \right) = \\ = Q^n r_b [\varphi_\alpha - f \ln(\cos \varphi_\alpha)].$$

КПД (η) определяется согласно формуле

$$\eta = \frac{A^0}{A} = \frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\alpha - f \ln(\cos \varphi_\alpha)}, \quad (1.16a)$$

причем

$$\operatorname{tg} \varphi_\alpha = (1 + u) \operatorname{tg} \alpha_w. \quad (1.16b)$$

Здесь u — передаточное отношение зубчатой пары.

Так как $f \ll 1$ и $\alpha_y < \frac{\pi}{4}$, можно принять, что

$$\ln(\cos \varphi_\alpha) = -\frac{\varphi_\alpha^2}{2} - \frac{\varphi_\alpha^4}{12} - \frac{\varphi_\alpha^6}{45} - \dots \approx -\frac{\varphi_\alpha^2}{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_\alpha \approx \varphi_\alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha_w \approx \alpha_w.$$

Теперь

$$\eta \approx \frac{2}{2 + f\varphi_\alpha} \approx \frac{1}{1 + \frac{1+u}{2} f\alpha_w}. \quad (1.17)$$

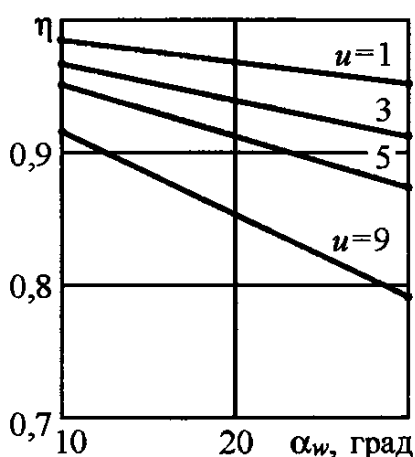


Рис. 1.15

Нетрудно увидеть, что в неявном виде в этих формулах присутствуют и все виды смещений (суммарное и воспринимаемое смещения), а сами формулы не противоречат здравому смыслу, что также подтверждается графиками рис. 1.15, построенными по результатам расчетов по этим формулам для коэффициента трения скольжения $f = 0,1$.

Трение в рычажных механизмах. По сравнению с зубчатыми механизмами рассмотрению трения в низших парах и рычажных механизмах в учебной литературе

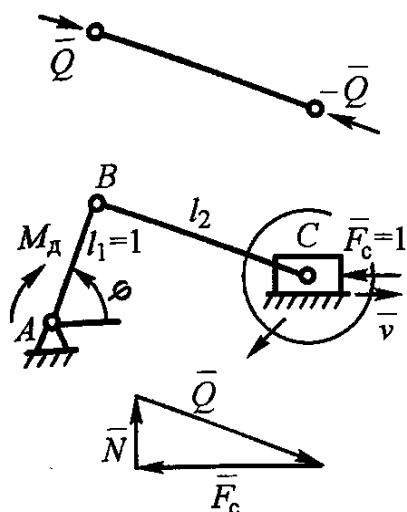


Рис. 1.16

уделено значительно меньше внимания. По-видимому, это связано с кажущейся простотой вопроса. Мы хотим обратить внимание на особенности учета трения в рычажных механизмах, поскольку связанные с ним потери в рычажных механизмах машины значительно выше, чем в ее передаточных (зубчатых) механизмах. Здесь мы должны отметить, что потери на трение в рычажном механизме больше, чем в передаточном, а ресурс зубчатого механизма все равно значительно ниже ресурса рычажного.

Рассмотрим влияние трения на потери в кривошипно-ползунном механизме, нагруженном силой сопротивления F_c и движущим моментом M_d (рис. 1.16). Массы и моменты инерции звеньев не учитываются. Это позволяет элементарно определить реакции в кинематических парах, затем дать содержательную интерпретацию результатов и перейти к обобщению. В качестве динамической модели рассмотрим звено, вращающееся относительно неподвижной оси (см. рис. 1.4, а). Тогда приведенный момент силы полезного сопротивления

$$M_{\text{пол}} = Fl_1 v_C / v_B. \quad (1.18)$$

Потери на трение складываются из потерь в шарнирах A, B, C и поступательной паре (r_A, r_B, r_C — размеры шарниров; f, f_n — коэффициенты трения во вращательных и поступательных парах; $l_2 \gg l_1$):

$$M_{\text{тр}} \omega_1 = fQr_A \omega_1 + fQr_B (\omega_1 \pm \omega_2) + fQr_C \omega_2 + f_n N v_C. \quad (1.19a)$$

Ясно, что $Q \approx F$, а слагаемые, содержащие $f_n N$ и ω_2 , значительно меньше остальных. Это позволяет упростить выражение (1.19a) до вида

$$M_{\text{тр}} \approx fQ(r_A + r_B). \quad (1.19b)$$

Этот подход легко распространить на вычисление потерь на трение в рычажных механизмах любой сложности, если известны

относительные скорости (угловые скорости) сопрягаемых звеньев и вычислены реакции в кинематических парах без учета трения. Введем следующие обозначения: $Q_{\text{тр}}$ — приведенная сила (момент) трения; $\dot{q}$ — скорость точки (угловая скорость звена) приведения; i, j — номера сопрягаемых звеньев; $f_{ijв}$, $f_{ijп}$ — коэффициенты трения во вращательных и поступательных парах; v_{ij} , ω_{ij} — относительные скорости (угловые скорости) звеньев; r_{ij} — радиусы вращательных пар; N_{ij}^0, Q_{ij}^0 — реакции в поступательных и вращательных парах, вычисленные без учета трения. Тогда потери на трение определяются из условия равенства мгновенных мощностей модели и механизма:

$$Q_{\text{тр}} \dot{q} = \sum_i (f_{ijв} Q_{ij}^0 r_{ij} \omega_{ij} + f_{ijп} N_{ij}^0 v_{ij}), \quad (1.20)$$

которая легко преобразуется к форме приведенной силы (момента) трения.

Здесь уместно сказать о том, что при вычислении потерь на трение необходимо учитывать конструктивные особенности кинематических пар механизма. Например, кривошип кривошипно-ползунного механизма нагружен силой Q и уравновешивающим моментом $M = Ql_{AB}$ и установлен в двух подшипниках (рис. 1.17, а). Равнодействующая в опоре A равна нулю, а реакции в подшипниках — Q . Соответственно, $M_{\text{тр}A} = 2fQr_A$. Аналогично вычисляется сила трения в поступательной паре (рис. 1.17, б):

$$F_{\text{тр}} = fN(1 + 2b/a).$$

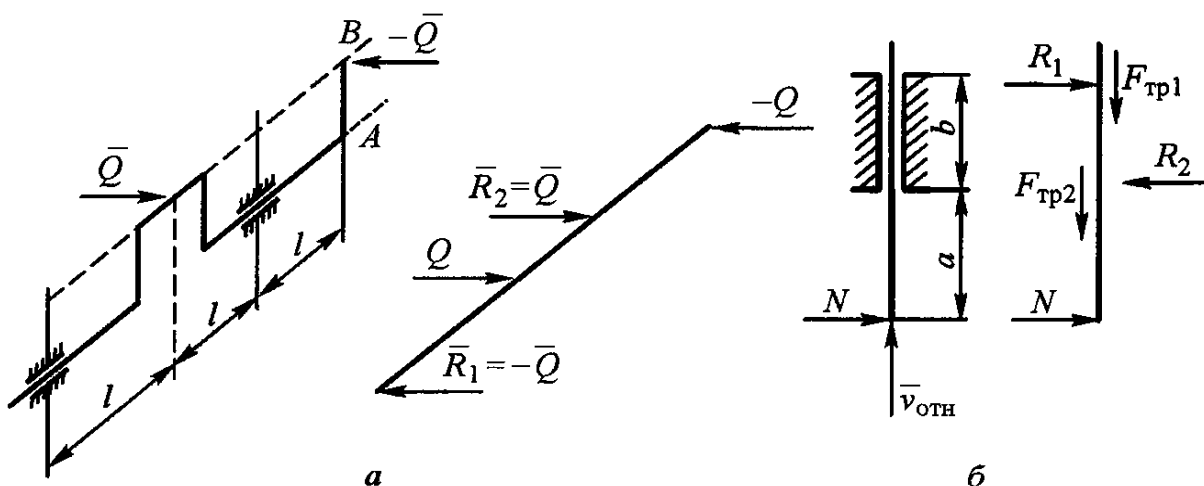


Рис. 1.17

КПД рычажного механизма. Способ определения КПД рычажного механизма очевиден. Также очевидны трудности, связанные с наглядной интерпретацией результатов вычислений КПД механизмов произвольной сложности: непредсказуемая сложность функций нагружения и передаточных функций, входящих в формулу (1.20). Поэтому ограничимся элементарным примером, не дающим количественного прогноза, но позволяющим делать качественные обобщения.

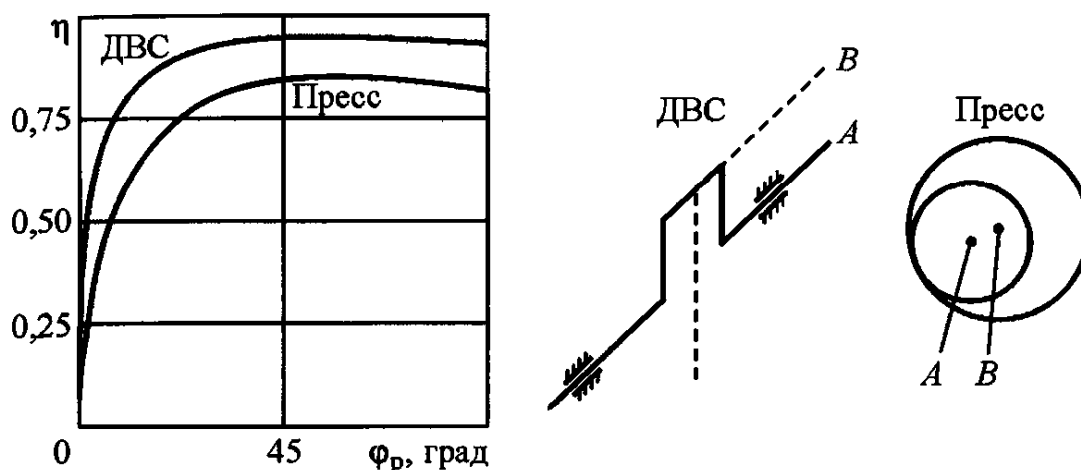


Рис. 1.18

Вернемся к кривошипно-ползунному механизму (см. рис. 1.16) и формулам (1.18) и (1.19б). Примем, что механизм нагружен постоянной силой F при повороте кривошипа на угол ϕ_p . В этом случае КПД не зависит от работы этой силы и вычисление его не представляет сложности [3]. На рис. 1.18 приведены зависимости $\eta(\phi_p)$ для $f = 0,03$ и соотношений размеров, характерных для кривошипно-ползунного механизма ДВС ($(r_A + r_B)/l_1 = 1$) и прессы ($(r_A + r_B)/l_1 = 4$). Для ДВС в качестве кривошипа используется коленчатый вал и соответственно размеры r_A и r_B примерно равны, для прессы — эксцентрик, у которого $r_B \gg r_A$. Характерно, что КПД зависит не только от размеров шарниров и угла давления в поступательных парах — что ожидалось, но и от длительности нагружения, что не так очевидно. Это позволяет предположить, что увеличивать КПД можно не только за счет улучшения условий трения в парах, но и за счет ϕ_p , т. е. более рационального распределения нагрузки или усложнения механизма. Вместе с этим уве-

личение протяженности нагружения увеличивает нагрузку на кривошип: приведенный момент сил сопротивления пропорционален первой передаточной функции ν_C/ν_B , максимум которой приходится на $\varphi_p \ll 90^\circ$.

Сравнение КПД зубчатого и рычажного механизма (см. рис. 1.15 и 1.18) показывает, что в машине потери на трение в кинематических парах рычажного механизма по крайней мере не меньше, чем в передаточном механизме (редукторе).

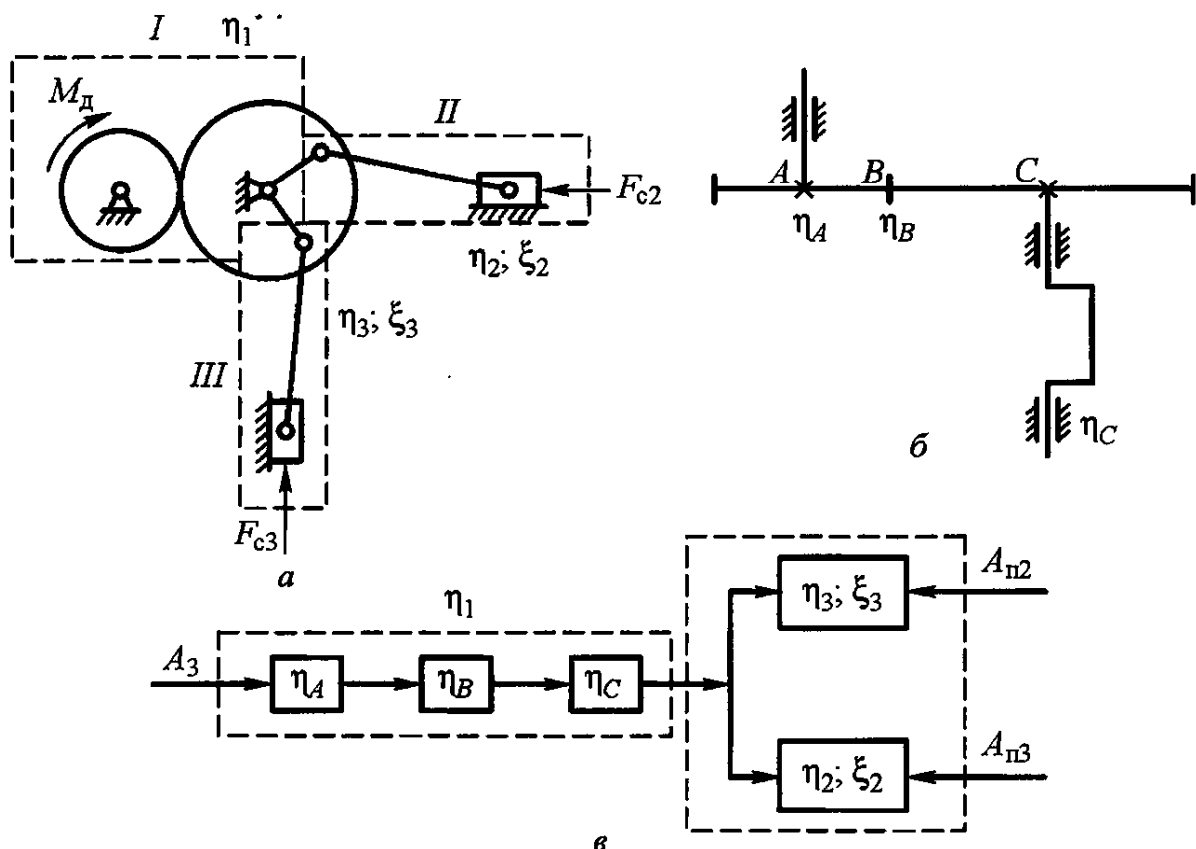


Рис. 1.19

КПД системы механизмов. Рассмотрим два типа соединения механизмов машины для преобразования энергетического потока от источников энергии (двигателей) к ее потребителям (исполнительным звеньям, рабочим органам): последовательное и параллельное. В качестве примера рассмотрим систему механизмов, показанную на рис. 1.19, а. В нее входит передаточный механизм I, служащий для преобразования частоты вращательного движения; к передаточному механизму присоединены два исполнительных рычажных механизма, служащих для преобразования вращатель-

ного движения в возвратно-поступательные движения ползунов (II и III). Известна полезная работа, необходимая для выполнения рабочих операций:

$$A_{\Pi} = A_{\Pi 2} + A_{\Pi 3} = \xi_2 A_{\Pi} + \xi_3 A_{\Pi},$$

причем $\xi_2 + \xi_3 = 1$.

Известны КПД (η) рычажных механизмов и кинематических пар, составляющих передаточный механизм (рис. 1.19, б). Структура потока передачи энергии представлена на рис. 1.19, в.

КПД зубчатой передачи (КПД высшей пары рассмотрен ранее) определяется как КПД последовательно соединенных элементов: входной шарнир A , высшая пара B выходной шарнир C (см. рис. 1.19, б). Нетрудно увидеть, что КПД передачи определяется как

$$\eta_1 = \eta_A \eta_B \eta_C.$$

Аналогично определяется КПД всей системы, если известен общий КПД механизмов II и III (η_{23}):

$$\eta = \eta_1 \eta_{23}.$$

Рассмотрим определение общего КПД параллельного соединения II—III:

$$\frac{1}{\eta_{23}} = \frac{A_{323}}{A_{\Pi}} = \frac{\frac{A_{\Pi 2}}{\eta_2} + \frac{A_{\Pi 3}}{\eta_3}}{A_{\Pi}} = \frac{\xi_2}{\eta_2} + \frac{\xi_3}{\eta_3}.$$

Здесь A_{323} — затраченная работа системы механизмов II—III.

Нетрудно заметить, что разветвление энергетического потока, осуществляемого при параллельном соединении, более выгодно, так как потери от нагрузки элементов цепи частью энергии меньше потерь от нагрузки общим потоком энергии.

На основании рассмотренного примера можно дать обобщенные формулы для определения КПД последовательного и параллельного соединения.

Последовательное соединение:

$$\eta = \prod_i \eta_i. \quad (1.21)$$

Параллельное соединение:

$$\frac{1}{\eta} = \sum_i \frac{\xi_i}{\eta_i}. \quad (1.22)$$

Здесь индекс i — номер соответствующего элемента энергетической цепи.

Завершая параграф «Учет трения в кинематических парах», отметим, что ориентировочные значения КПД элементов механизмов можно найти в различных справочниках и пособиях, например [9]. Однако к этим сведениям следует относиться чрезвычайно аккуратно. Без указаний функциональных свойств механизма, особенностей конструкции, нагрузки на ее элементы, размеров кинематических пар, условий трения эти сведения могут оказаться слишком далекими от истинных. Например, потери на трение (а соответственно, и КПД вала на двух опорах) зависят от положения равнодействующей относительно опор (см. рис. 1.17). Фактически это указание на особенности конструкции. В случае, когда равнодействующая проходит между опорами, потери на трение будут меньше, чем при консольном нагружении вала. Таким образом, непосредственное вычисление потерь в механизме предпочтительнее операций со справочными данными о КПД.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСТОЧНИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЗМОВ

Источники и потребители энергии в машине и механизме. Механические характеристики некоторых источников и потребителей: *нагрузки в технологических машинах; индикаторные диаграммы; внешние характеристики тепловых двигателей (ДВС, паро-, газотурбинных двигателей и т. д.); скоростная характеристика лопастных машин; трение в кинематических парах; податливость элементов конструкции.* Определение области существования возможных механических характеристик приводов. Механические характеристики электромеханических приводов. Типы электродвигателей и их характеристики. Управление характеристиками электродвигателей. Выходные механические характеристики гидромеханических приводов. Типы гидроприводов и их характеристики: *насосный, аккумуляторный и магистральный гидроприводы.* Управление характеристиками гидроприводов: *объемное и дроссельное регулирование насосного привода; последовательное и параллельное включение дросселя; регулирование аккумуляторного и магистрального приводов.*

2.1. Источники и потребители энергии в машине и механизме

Схема механизма, приведенная на рис. 1.1, отображает только одну группу качеств проектируемой машины, а именно качества, связанные с моделированием работы механизмов машины. При составлении динамической модели механизма необходимо учитывать влияние функциональных элементов машины (рис. 2.1). Фактически это проявляется в активном или пассивном управлении параметрами привода (электро-, гидромеханического и т. д.) и изменении структуры машины (например, изменение структуры механизмов [3]). Управление может изменять как параметр уравне-

ния движения (например, приведенный момент инерции), так и характер движущих сил (рис. 2.2, а). Система управления получает информацию о состоянии рабочего процесса и преобразует ее в управление параметрами привода или других элементов машины. В наших задачах нецелесообразно рассматривать сложные модели. Поэтому нам достаточно ограничиться заданием или определением воздействий на механическую систему в форме, приведенной на рис. 1.5 или рис. 2.2, б.

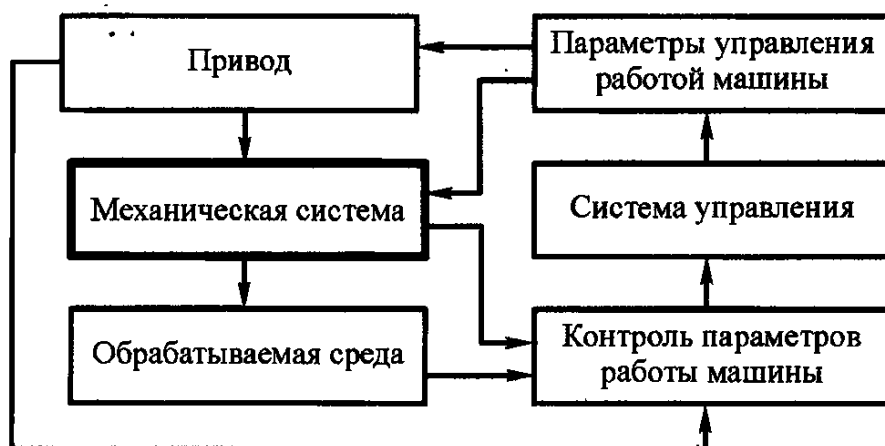


Рис. 2.1

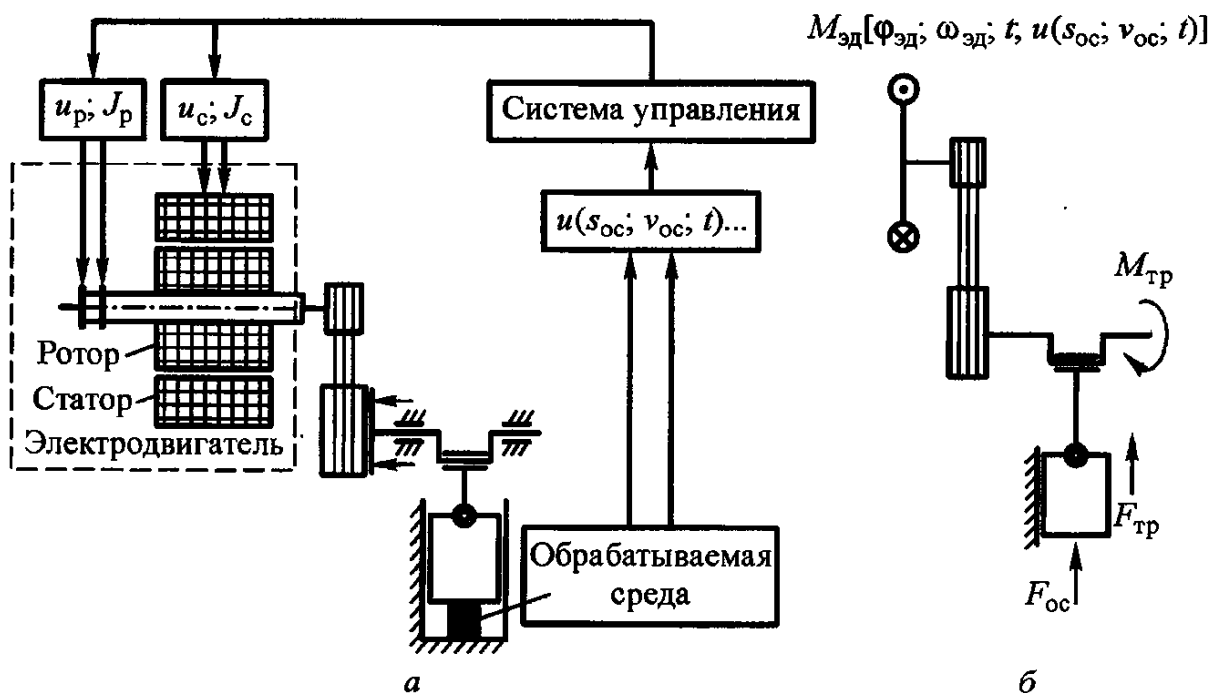


Рис. 2.2

Вид правой части уравнения движения механизма в формах (1.1) — (1.10) зависит от параметров кинематической схемы (метрических характеристик), конструкции и конструктивных особенностей машины (массы и моментов инерции звеньев, размеров кинематических пар, условий трения в парах, податливости звеньев и элементов машины, термодинамических особенностей конструкции), характеристик сил движущих и сопротивления (см. рис. 1.2).

Воспользуемся известными в механике понятиями «источник» и «потребитель» энергии для описания возможных составляющих правой части уравнений движения. Достаточно выделить следующие группы: «источник энергии» и «потребители энергии — обрабатываемая среда, потери на трение в кинематических парах, прочие потери» (рис. 2.3). Условность этих понятий определяется уровнем моделирования работы системы. Например, винт самолета по отношению к двигателю является потребителем энергии, а по отношению ко всему самолету — источником. Многообразие возможных сочетаний источников и потребителей энергии делает бессмысленным их полное перечисление. Поэтому ограничимся перечислением некоторых из них, показавшихся нам наиболее интересными. Особое внимание обратим на два наиболее распространенных типа привода — электро- и гидромеханический, причем попытаемся найти аналогию между ними. Введение этих понятий позволяет рассматривать в наших динамических моделях силы сопротивления, трения, движущие силы и т. д. как внешние и представлять их в форме механических характеристик внешних воздействий на механизм.

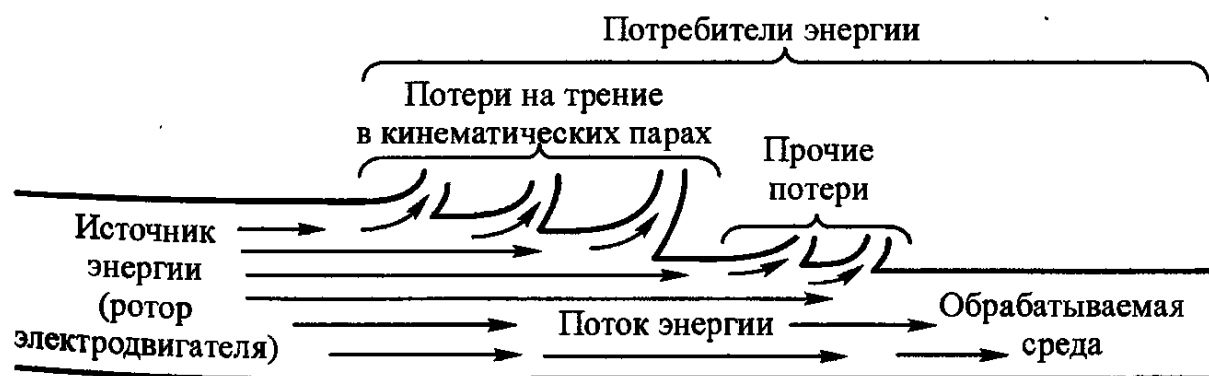


Рис. 2.3

2.2. Механические характеристики некоторых источников и потребителей энергии

В общем виде механические характеристики представляют собой зависимость силы (момента) от положения, скорости и времени. В определенных случаях эти зависимости однопараметрические, а именно функции или только положения, или только скорости, или только времени.

Дать полный обзор существующих характеристик источников и стоков энергии представляется и нецелесообразным, и невозможным. Поэтому мы ограничимся перечислением некоторых из них на феноменологическом (описательном) уровне. Дать математическое описание этих нагрузок можно в виде некоторых приближенных функциональных зависимостей, разложений в ряд (Тейлора, Маклорена, Фурье и т. д.), массивов. Это зависит от постановки задачи и выбора метода решения.

Ниже без претензий на какое-либо серьезное обобщение приведен перечень следующих схематизированных механических характеристик: нагрузки в технологических машинах (металлообрабатывающие станки, кузнечно-штамповочные машины, прокатные станы), индикаторные диаграммы поршневых машин (пневматических, ДВС, гидравлических), внешние характеристики тепловых двигателей, электрических и гидравлических машин. Кроме того, рассмотрены характеристики податливости системы и ее элементов, а также характеристики сил трения. Конкретные сведения о механических характеристиках следует искать в справочных материалах по соответствующим отраслям техники. В данной книге отдельно и более подробно даны сведения о механических характеристиках электро- и гидромеханических приводов, наиболее широко применяемых в технике.

Нагрузки в технологических машинах. При сравнительно небольших скоростях исполнительного звена нагрузки в технологических машинах можно считать функциями положения. Примерами таких сил являются силы резания (рис. 2.4, а), силы деформирования при штамповке (рис. 2.4, б, в).

Примером нагрузки, заданной в форме зависимости от времени, является момент, приложенный на валках прокатного стана (рис. 2.4, г).

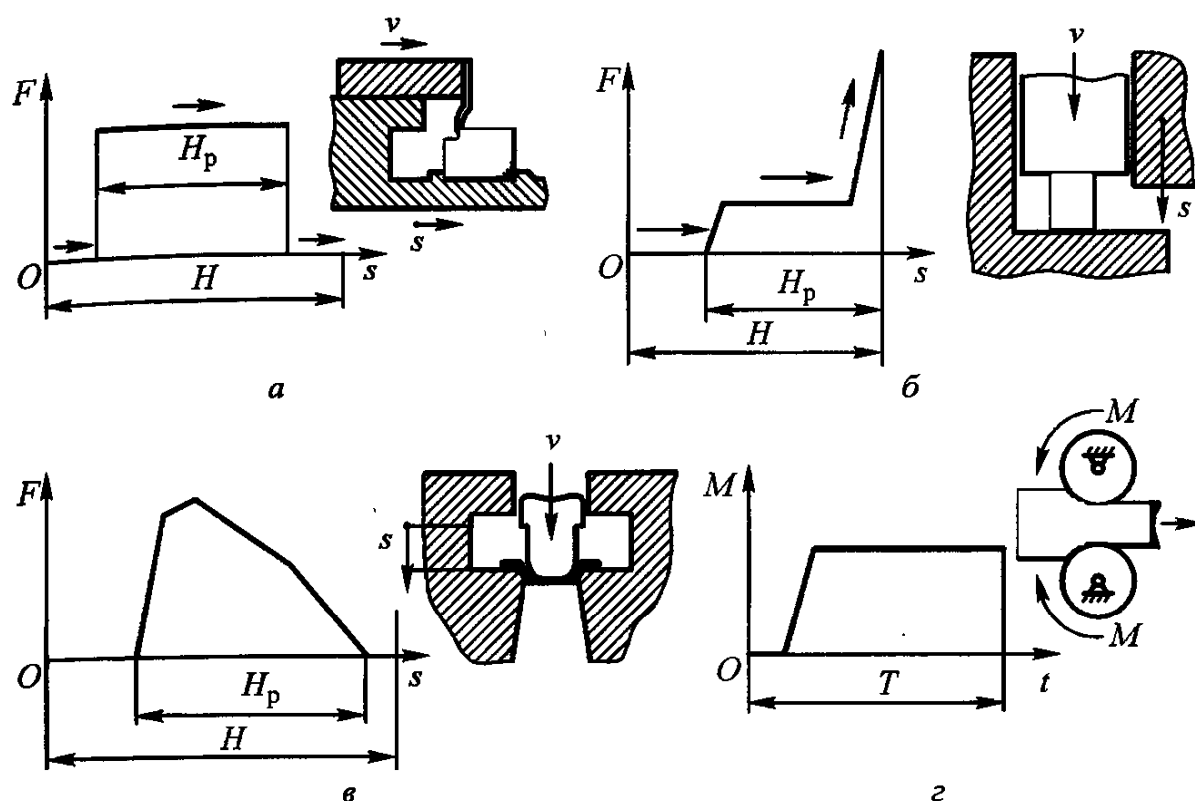


Рис. 2.4

Индикаторные диаграммы. В большинстве пневматических, гидравлических, тепловых двигателей (ДВС) рабочий процесс осуществляется за счет возвратно-поступательного (реже возвратно-вращательного) перемещения поршня (плунжера) под действием перепада давлений (рис. 2.5, а). Для описания рабочего процесса в этих системах применяют зависимости изменения давления в рабочей полости от положения поршня $p = p(s)$, называемые индикаторными диаграммами*.

Индикаторная диаграмма двухтактного ДВС представлена на рис. 2.5, б. Здесь полный цикл работы двигателя совершается за переход поршня из одного крайнего положения в другое и обратно (за один оборот кривошипа). Индикаторная диаграмма имеет две ветви. При ходе вправо происходит сгорание и расширение горючей смеси; при ходе влево — всасывание новой порции горючей смеси и ее сжатие.

* В математике диаграмма — способ графического изображения величин при помощи фигур (столбцов, секторов и т. п.), площади которых пропорциональны этим величинам [10].

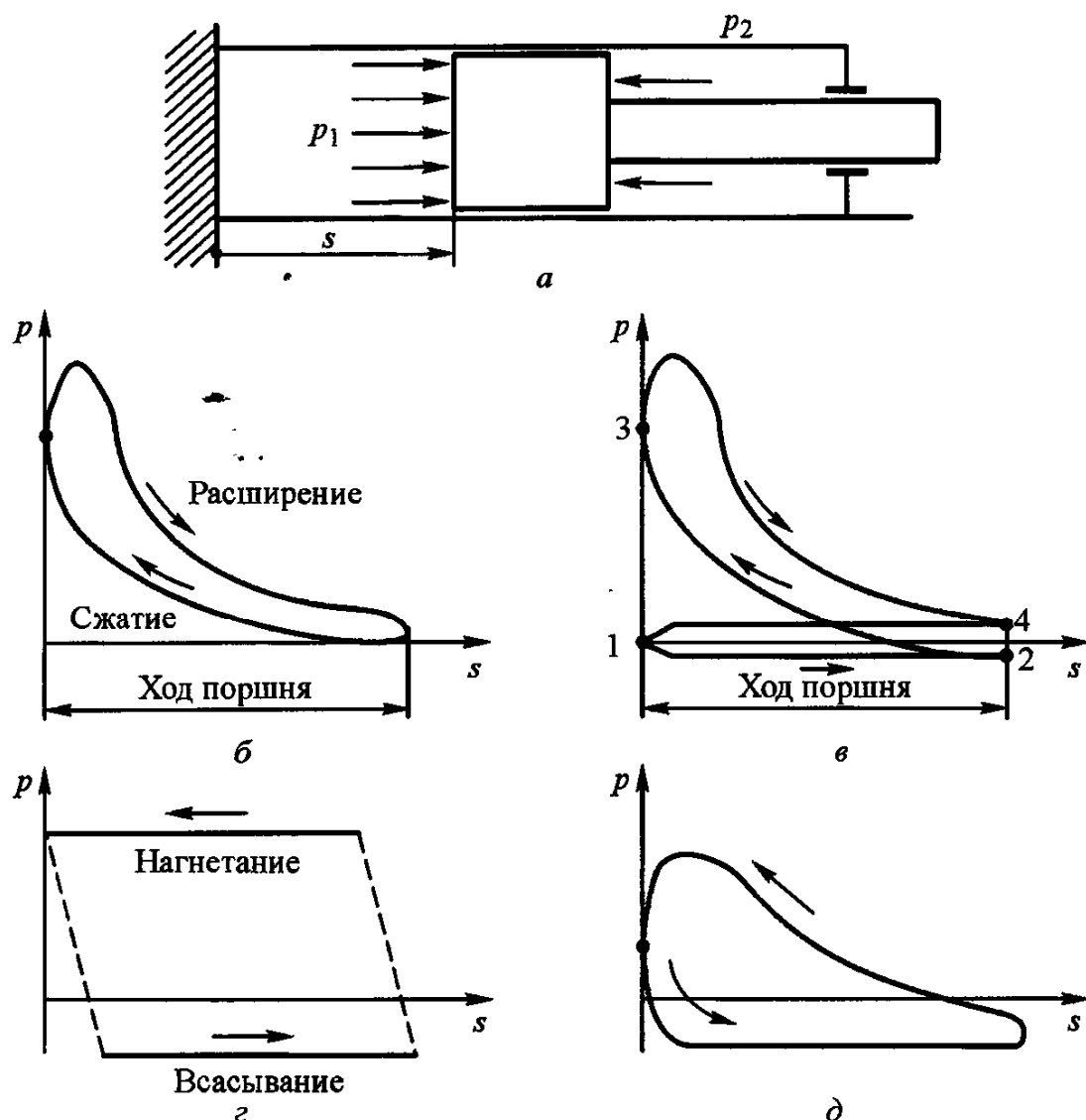


Рис. 2.5

Индикаторная диаграмма четырехтактного ДВС представлена на рис. 2.5, в. Здесь полный цикл работы двигателя совершается за двойной переход поршня из одного крайнего положения в другое и обратно (за два оборота кривошипа), а индикаторная диаграмма имеет четыре ветви. Первая ветвь (всасывание) — участок диаграммы 1–2; вторая (сжатие) — 2–3; третья (сгорание и расширение горючей смеси) — 3–4 и четвертая (выталкивание продуктов сгорания) — 4–1. Далее процесс повторяется в той же последовательности.

Аналогичные индикаторные диаграммы описывают рабочие процессы поршневых насосов (рис. 2.5, г) и компрессора (рис. 2.5, д).

Внешние характеристики тепловых двигателей (ДВС, паро-, газотурбинных двигателей и т. д.). Зависимость движущего момента на валу теплового двигателя от скорости его вращения называется внешней скоростной характеристикой.

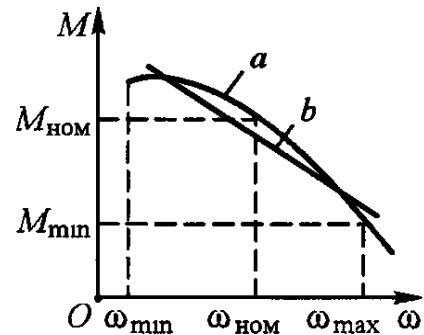


Рис. 2.6

На рис. 2.6 приведена внешняя скоростная характеристика ДВС (кривая *a*). Возможный диапазон изменения скорости коленчатого вала ДВС определяется $\omega_{\min}$ — минимально устойчивой скоростью вращения вала, и $\omega_{\max}$ — границей дымления, т. е. границей неэкономичного режима. Рабочим участком характеристики целесообразно считать интервал $(\omega_{\text{ном}}, \omega_{\max})$, где $\omega_{\text{ном}}$ соответствует максимальной мощности ДВС, а $\omega_{\max}$ — минимально допустимому моменту $M_{\min}$. Реальная внешняя характеристика *a* может быть аппроксимирована прямой (прямая *b*)

$$M = a - k\omega. \quad (2.1)$$

Условия аппроксимации и значения коэффициентов зависят от типа двигателя (карбюраторный, дизельный, комбинированный) и условия обеспечения запаса мощности, требующейся для устойчивой работы. При высокой равномерности хода ($\delta < 0,01$) момент можно считать постоянным.

Аналогичной кривой описывается внешняя скоростная характеристика паро- и газотурбинных двигателей. Устойчивая работа двигателя осуществляется в диапазоне $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$. Значение $\omega_{\min}$ связано с неустойчивой работой агрегатов двигателя и переходом через резонансную частоту. Обычно $\omega_{\min} \approx 0,25\omega_{\text{ном}}$. Значение $\omega_{\max}$ является ограничением по максимальному крутящему моменту (т. е. ограничением по прочности вала). Как и в предыдущем случае, реальная характеристика аппроксимируется прямой (2.1). Условия аппроксимации и значения коэффициентов зависят от типа двигателя и его конструктивных и эксплуатационных особенностей (одно- и многоступенчатые турбины).

Скоростная характеристика лопастных машин. Лопастное колесо (рис. 2.7, *a*) в качестве движителя или рабочего органа используется в различных роторных машинах: машинах-двигателях

(гидротурбинах), передаточных механизмах (гидротрансформаторах), рабочих машинах (гребных винтах судов, осевых и центробежных компрессоров и насосов, пропеллерах, гидротормозах и т. д.). Для них скоростная характеристика имеет вид, приведенный на рис. 2.7, б.

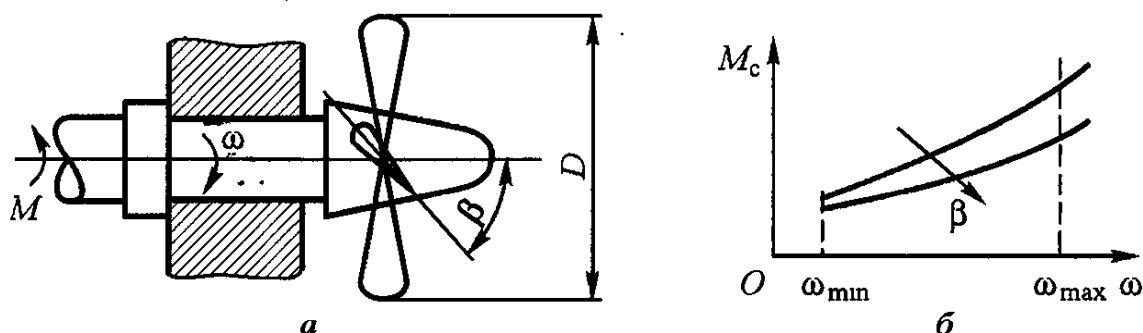


Рис. 2.7

Момент M включает три составляющих:

$$M = M_1 + M_2 + M_3. \quad (2.2)$$

Значение постоянной составляющей M_1 определяется наличием сухого трения в элементах механизма. Составляющая M_2 создается касательными напряжениями сдвига жидкости в зазоре и зависит от динамического коэффициента вязкости смазки, размеров пары «вал винта — опора» и угловой скорости вращения вала. Составляющая M_3 создается за счет сил инерции рабочей среды и, следовательно, зависит от плотности ρ , размера винта D , угла наклона винта к оси вращения β и скорости вращения вала. Диапазон возможных значений ω определяется, с одной стороны, $\omega_{\min}$ (отсутствием неоднозначного режима работы — помпажа), с другой — $\omega_{\max}$ (ограничением на отрыв потока, наступлением кавитации, максимальным крутящим моментом).

Трение в кинематических парах. В главе 1 (§ 1.5) были рассмотрены вопросы учета трения в кинематических парах на начальной стадии проектирования. В их основе лежала гипотеза Амонтона—Кулона о постоянстве значения коэффициента трения, не зависящего от силы взаимодействия между сопрягаемыми поверхностями. Этот вид трения наименее благоприятен для работы кинематических пар.

Обычно пары трения обеспечиваются смазкой. В условиях вязкого трения диссипативные силы зависят от относительной скорости элементов пар и контактных точек, вязкости смазки и давления на поверхности трения.

В расчетах часто пользуются понятием «приведенный коэффициент трения f^* ». Ввод этого понятия позволяет получить линейное соотношение между нагрузкой и коэффициентом трения при различных условиях работы кинематической пары. Характер изменения приведенного коэффициента трения в зависимости от режима работы вращательной пары показан на рис. 2.8. Здесь *I*, *II*, *III* — зоны жидкостного, смешанного и граничного трения соответственно. Характеристикой режима работы вращательной пары является обобщенный параметр (режимная характеристика) $\lambda = \frac{\mu\omega}{p}$, где μ — коэффициент вязкости смазки; ω — относительная скорость; p — давление на поверхности трения.

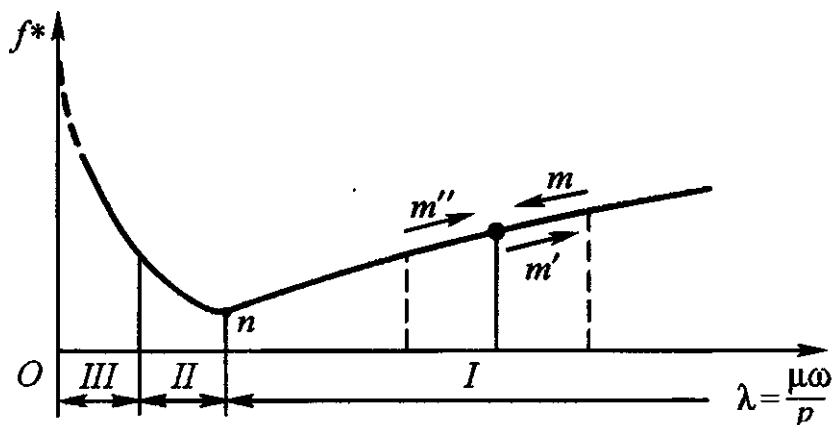


Рис. 2.8

Выбор режима работы узла трения в некоторой точке *m* обеспечивает его устойчивую работу в зоне жидкостного трения (зона *I*). В самом деле, снижение ω ведет к уменьшению λ и соответственно к снижению f^* . Это приводит к снижению температуры в узле и далее к увеличению μ (т. е. к увеличению λ) и возврату точки *m* в исходное положение. При попадании рабочей точки в зону *II* смешанного и зону *III* граничного трения происходит последовательное увеличение μ , f^* и уменьшение λ . Таким образом, наблюдается постоянный дрейф рабочей точки к области сухого трения.

При жидкостном трении поверхности пар разделяются слоем смазки, толщина которого больше суммы микронеровностей поверхностей трения. Жидкая пленка между ними обеспечивает смазывающий эффект, поэтому относительное скольжение поверхностей сопровождается только внутренним трением жидкости (слоев смазки). Это вполне правомерно, так как толщина таких пленок достаточно мала и силы вязкого трения значительно больше инерционных сил, возникающих в жидкости. Поэтому сила трения оказывается значительно меньшей, чем при сухом или граничном трении.

Чтобы трение было чисто жидкостным, нужно внутри смазочной пленки создать такое давление, при котором оно уравновесило бы другие внешние силы. Необходимое давление может быть создано подачей смазки под давлением (гидростатическое трение) или за счет движения смазки в клиновом зазоре (гидродинамическое трение). Первый способ требует специальных конструктивных мер для локализации давления в области пары трения. Второй способ осуществить технически проще, но он может быть реализован только при достаточно больших относительных скоростях элементов пар.

Основные эффекты, проявляющиеся в условиях гидродинамического трения, излагаются в соответствии с работой [11]. Рассмотрение эффектов жидкостного трения базируется на решении задачи о слое смазки между наклонными пластинами (рис. 2.9).

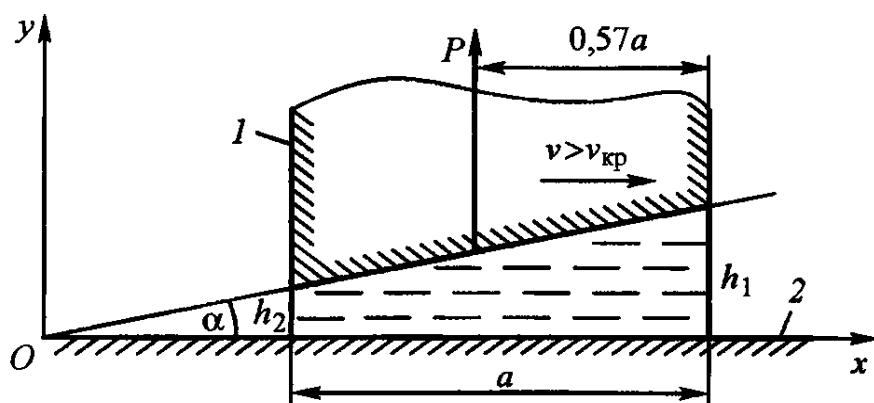


Рис. 2.9

Пусть элемент 1 пары длиной a , наклоненный под углом α к оси Ox , перемещается относительно неподвижного элемента 2 в

направлении оси Ox со скоростью $v > v_{кр}$. Предполагаем, что область между элементами пары заполнена во время движения смазкой. Очевидно, что при заданном направлении движения элементы пары испытывают действие результирующих сил давления и трения (P и F). Согласно [11],

$$P = \frac{6\mu va^2}{h_2^2(k-1)^2} \left(\ln k - 2 \frac{k-1}{k+1} \right); F = -\frac{2\mu va}{h_2(k-1)} \left(2 \ln k - 3 \frac{k-1}{k+1} \right), \quad (2.3)$$

где $k = h_1/h_2$; μ — коэффициент вязкости.

Так как наименьшая толщина слоя h_2 значительно меньше размера a , можно заключить, что основной эффект смазки при переменной толщине слоя заключается в образовании поддерживающей силы, по порядку величины большей результирующей силы трения. Безразмерный коэффициент в формулах (2.3) для поддерживающей силы обращается в нуль при $k = 1$ и $k = \infty$. Таким образом, внутри этого интервала значение поддерживающей силы будет иметь экстремум при $k \approx 2,2$. Ему соответствуют значения

$$P = 0,16 \frac{\mu va^2}{h_2^2}; F = -0,75 \frac{\mu va}{h_2}; \frac{|F|}{P} = 4,7 \frac{h_2}{a}. \quad (2.4)$$

Точка приложения экстремального результирующего давления располагается вблизи середины рассматриваемого слоя несколько ближе к узкой его части на расстоянии, равном $0,57a$.

Заметим, что при движении элемента 1 в сторону узкой части слоя (см. рис. 2.9) развивается сила, стремящаяся прижать элемент 1 к элементу 2.

Полученные результаты можно использовать для качественного объяснения основного эффекта смазки для вращательной пары (рис. 2.10). Пусть нагрузка на горизонтальный вал направлена по вертикали. До вращения вала его шип будет касаться поверхности вкладыша подшипника в нижней точке (см. рис. 2.10, *a*). Область между поверхностями шипа и вкладыша разделим на две равные части A и B . В первые моменты вращения движение поверхности шипа будет происходить в сторону широкой части слоя в области A и в сторону узкой части слоя в области B . Соответственно, давление на шип будет направлено от подшипника к шипу в области A и

от шипа к подшипнику в области B (см. рис. 2.10, б). Так как эти силы не уравниваются нагрузкой, то шип под их действием в результате сместится вправо вверх. Это смещение будет происходить до тех пор, пока направление результирующего давления на шип не станет противоположным направлению вектора внешней нагрузки Q (см. рис. 2.10, в). Зависимость момента трения во вращательной паре от скорости вращения в условиях жидкостного трения показана на рис. 2.11.

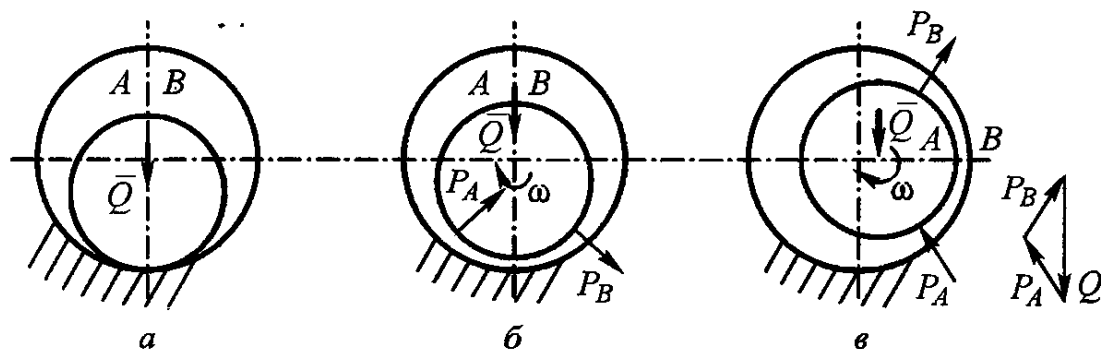


Рис. 2.10

Необходимо отметить еще один эффект трения, связанный с переходом от состояния покоя к движению: этот переход характеризуется резким скачком силы трения в начальный момент трогания с места и далее снижением силы трения при движении (рис. 2.12, а). Для наших расчетов достаточно ввести понятия «сила трения покоя» F_n и «сила трения движения» F_d , причем разница между этими силами может быть весьма существенной. Тогда переход от трения покоя к трению движения можно схематизировать в соответствии с рис. 2.12, б. Учитывая существенную неопределенность условий трения, на начальной стадии проектирования можно ограничиться приближением $F_n \cong 1,3F_d$.

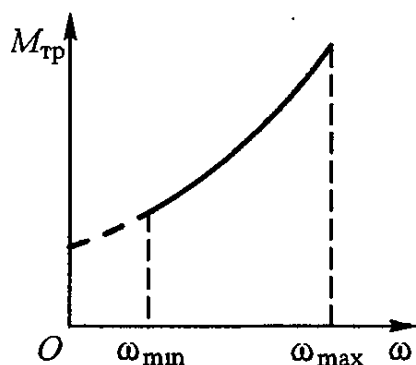


Рис. 2.11

Податливость элементов конструкции. Податливость элементов конструкции зависит от материала, геометрического и силового характера сопряжения кинематических пар. Металлические элементы конструкции работают в области упругих деформаций. Для них с очень

большой точностью характерна линейная зависимость между нагрузкой и перемещением (рис. 2.13, а, кривая 1), независимо от вида нагружения (растяжение-сжатие, изгиб, кручение).

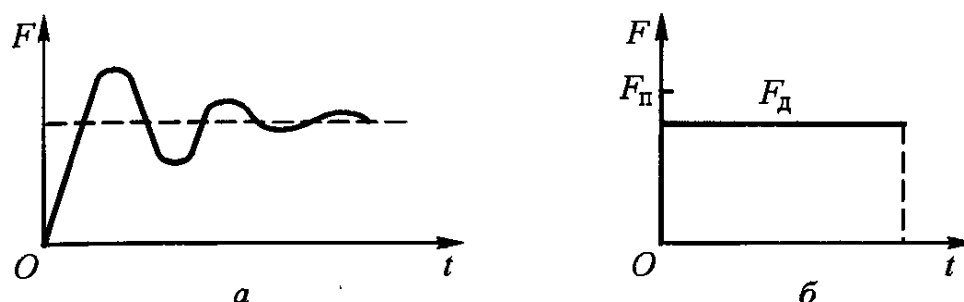


Рис. 2.12

Зависимость между нагрузкой и податливостью неметаллических элементов конструкции может быть существенно нелинейной (рис. 2.13, а, кривая 2 — резина; кривая 3 — полимеры). Зависимости между нагрузкой и разгрузкой для неметаллических материалов различны, поэтому график $F(s)$ имеет две ветви, одна из которых соответствует нагрузке, а другая — разгрузке (рис. 2.13, б). Контур, образованный этими ветвями, называется петлей гистерезиса. В этом случае деформация элементов сопровождается заметной диссипацией энергии.

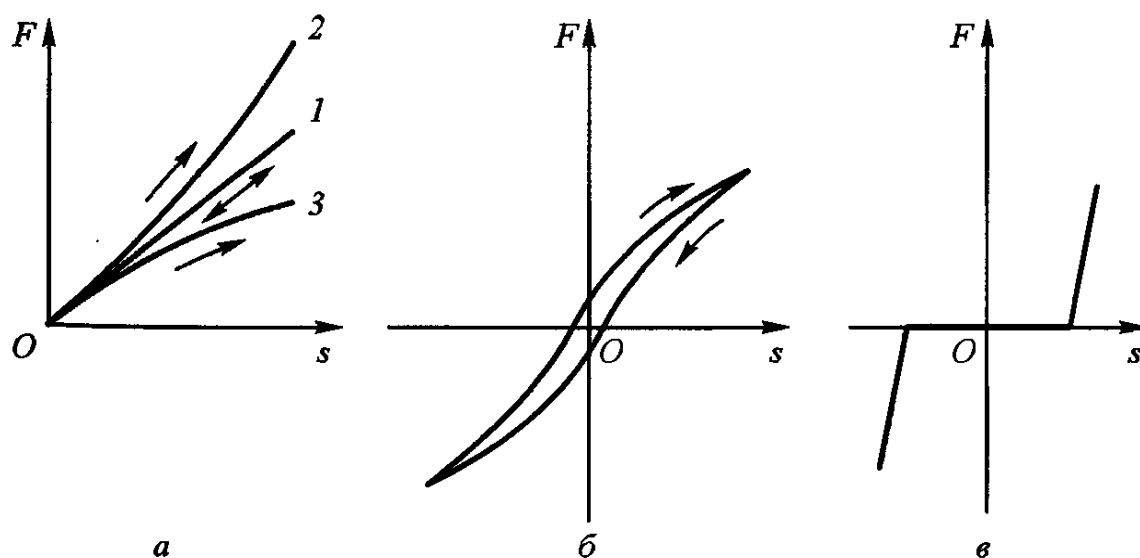


Рис. 2.13

Для различных по конструкции пружинных элементов зависимость между нагрузкой и перемещением может быть как линейной

(например, цилиндрические пружины из проволоки постоянного сечения), так и нелинейной (например, конические пружины). Существенно нелинейными являются зависимости между нагрузкой и перемещением при перекладке зазоров в кинематических парах (рис. 2.13, в).

2.3. Определение области существования возможных механических характеристик приводов

Область существования возможных механических характеристик можно определить, если движущую силу будет развивать источник неограниченной мощности. Таковым может быть источник движущей силы, у которого заведомо $F_d > F_c$, а скорость определяется в результате решения уравнения движения, или источник скорости, движущая сила которого определяется в результате решения уравнения движения, причем обязательным является выполнение ограничения $F_{d \max} > F_{c \max}$.

Рассмотрим точку массой $m = \text{const}$, движущуюся по прямой под действием силы $F_s = F_d + F_c(s)$. Это динамическая модель, представленная на рис. 1.4, б. Ей может соответствовать движение поршня (плунжера) гидроцилиндра. Поршень может приводиться в движение от гидроаккумулятора неограниченного объема (рис. 2.14, а) или насоса неограниченной мощности с нерегулируемой подачей (рис. 2.15, а).

В первом случае можно считать, что давление в аккумуляторе $p_{\text{ак}} = \text{const}$, движущая сила, приложенная к поршню, $F_d = \text{const}$ (рис. 2.14, б), а скорость зависит от положения поршня и определяется решением уравнения (1.9), которое в рассматриваемом случае преобразуется к виду

$$F_s = F_c(s) + F_d = ma = mv(s) \frac{dv}{ds}. \quad (2.5)$$

Его решение:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{mv_{\text{н}}^2}{2} + F_d s + \int_s F_c ds = T_{\text{н}} + A_d + A_c; \\ v &= \sqrt{v_{\text{н}}^2 + \frac{2}{m} F_d s + \frac{2}{m} A_c}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем

$$\frac{mv_n^2}{2} + F_d s \geq |A_c|. \quad (2.7)$$

Результатом решения является фазовая характеристика системы $v = v(s)$.

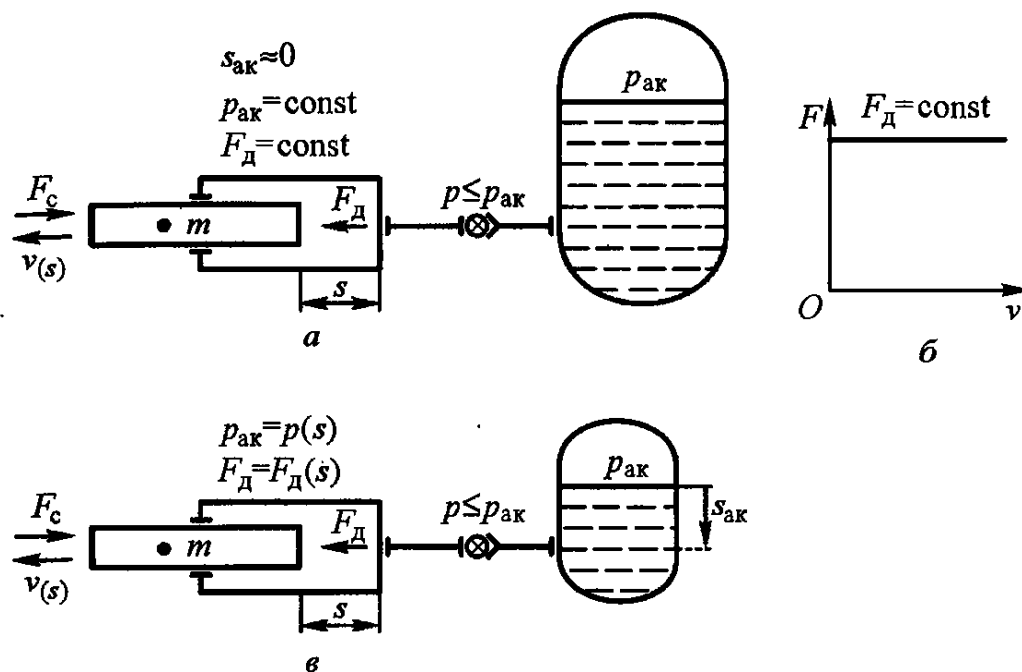


Рис. 2.14

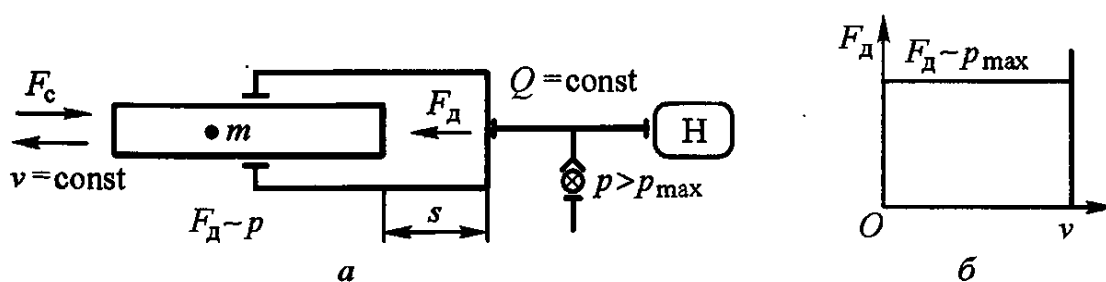


Рис. 2.15

Во втором случае можно считать, что подача насоса $Q = \text{const}$; движущая сила, приложенная к поршню, пропорциональна давлению насоса, которое, в свою очередь, не превышает допустимого ($F_d \sim p \leq p_{max}$). Тогда поршень движется с постоянной скоростью $v = \text{const}$ (рис. 2.15, б), а уравнение движения имеет вид

$$F_s = F_d + F_c = 0. \quad (2.8)$$

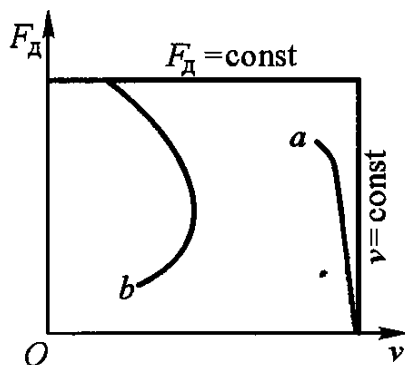


Рис. 2.16

В обоих случаях принимается условие малости сопротивлений в гидравлической системе.

Естественным обобщением этих задач является поле возможных характеристик движущих сил, ограниченное линиями $F_d = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (рис. 2.16). Внутри этого поля располагаются все возможные так называемые **механические** характеристики приводов. На рис. 2.16 приведены два примера таких характеристик.

Кривая a является аналогом статической характеристики* неуправляемого асинхронного электродвигателя $F_d = F(v)$. Таким образом, можно говорить об аналогии объемного гидродвигателя асинхронному электродвигателю.

Кривая b описывает зависимость $F_d(v)$ гидромеханической системы с аккумулятором малой емкости (рис. 2.14, в), т. е. системы, в которой объемы цилиндра и аккумулятора одного порядка. В этом случае перепад давления зависит от положения плунжера и соответственно от уровня жидкости в аккумуляторе:

$$p_{\text{ак}} = p(s_{\text{ак}}); \quad F_d = F_d(s); \quad s \sim s_{\text{ак}},$$

т. е. движущая сила является функцией положения. При решении этой задачи в формуле (2.6) слагаемое $A_d = F_d s$ заменяют на

$$A_d = \int_s F_d(s) ds.$$

Электромеханическим аналогом аккумулятора большой емкости (магистральный привод) можно считать электродвигатель постоянного тока со специальной системой управления, который будет в числе прочих рассмотрен в следующем параграфе.

Для обобщения сказанного можно ввести понятия **идеальных управляемых источников скорости** ($v = \text{const}$) и **силы** ($F = \text{const}$). Очевидно, что при движении по произвольной траектории в первом случае источник механической энергии непосредственно зада-

* Статические характеристики — зависимости $F_d(v)$ или $M_d(\omega)$ для стационарных режимов работы привода.

ет закон изменения скорости $v(t)$ и связанные с ним напрямую параметры движения и т. д. Силы, действующие в пределах перемещения, определяются из решения уравнения движения. Во втором случае, наоборот, сила F — независимая переменная, а зависимости $v(t)$, $a(t)$ и т. д. являются решением уравнения движения.

С точки зрения управления движением эти подходы неравнозначны. В частности, при жестких требованиях к точности воспроизведения заданной траектории движения и неточной информации о параметрах системы (массах, моментах инерции звеньев, силах сопротивления, диссипации энергии) предпочтительным является первый подход. Неточность этой информации скажется в конечном итоге на нагружении элементов конструкции, что естественным образом учитывается коэффициентами запаса при конструировании.

Во втором случае неминуемы неконтролируемые отклонения от заданной траектории движения. Очевидно, что с точки зрения качества управления движением второй подход дает тот же результат только при полной и однозначной информации о параметрах системы.

2.4. Механические характеристики электромеханических приводов

Устройство, обеспечивающее преобразование электрической энергии в механическую, называют электроприводом. В его состав в зависимости от конкретных условий помимо электродвигателя с системой управления может входить механическая система, обеспечивающая преобразование вращательного движения ротора электродвигателя (одной частоты) во вращательное движение вала исполнительного механизма (другой частоты). Эта механическая система называется передаточным механизмом (см. рис. 1.1), основной функциональной характеристикой которого является постоянное передаточное отношение (передаточная функция). Главный элемент электропривода — электрический двигатель. Он преобразует электрическую энергию, характеристиками которой являются напряжение U , ток I , частота f , в механическую, характеристиками которой служат крутящий момент M и угловая скорость ω .

2.4.1. Типы электродвигателей и их характеристики

Наибольшее распространение получили двигатели переменного (асинхронные и синхронные) и постоянного тока (параллельного или независимого возбуждения), работающие от промышленной сети. В статическом режиме работы механические характеристики этих двигателей близки к механическим характеристикам источника скорости ($v = \text{const}$). Степень неидеальности электрического двигателя как источника скорости можно оценивать коэффициентом жесткости k , который в общем случае представляет собой некоторую функцию и определяется как $k = dF/dv$ или $k = dM/d\omega$.

Для синхронного двигателя в статическом режиме его работы $k = \infty$ (рис. 2.17, кривая a). Для двигателя постоянного тока независимого или параллельного возбуждения (кривая b) и асинхронного двигателя на рабочем участке его механической характеристики (кривая c) $k < 0$ и практически постоянен.

Электрический двигатель может развивать не только движущий момент, но и тормозящий, препятствующий движению.

Существуют три тормозных режима работы: рекуперативное торможение, противовключение и динамическое торможение. Соответствующие этим режимам характеристики асинхронного двигателя приведены на рис. 2.18, a ; характеристики двигателя постоянного тока параллельного или независимого возбуждения — на рис. 2.18, b . Режиму рекуперативного торможения асинхронного двигателя соответствует участок характеристики a при $\omega > \omega_0$ и

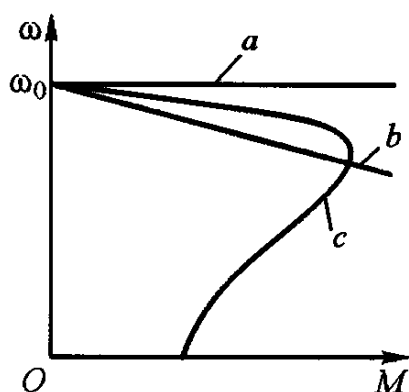


Рис. 2.17

характеристики b при $\omega < -\omega_0$. Режиму противовключения соответствует участок характеристики a при $\omega < 0$ и характеристики b при $\omega > 0$. Для двигателей постоянного тока режиму рекуперативного торможения соответствует участок кривой a при $\omega > \omega_0$ и участок кривой b при $\omega < -\omega_0$. Режиму противовключения соответствует участок характеристики a при $\omega < 0$ и характеристики b при $\omega > 0$. Режиму динамического торможения соответствуют ха-

рактеристики c (см. рис. 2.18, a — асинхронный двигатель; рис. 2.18, b — двигатель постоянного тока).

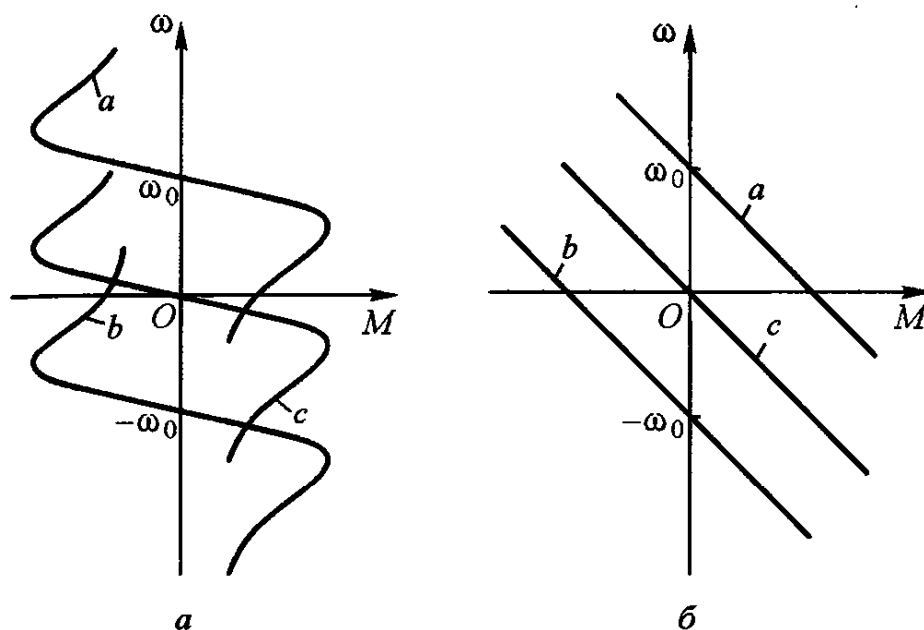


Рис. 2.18

В электроприводе механические характеристики двигателей принято разделять на естественные и искусственные. Естественные характеристики соответствуют номинальным (паспортным) значениям параметров источника питания и отсутствию дополнительных элементов в силовой цепи двигателя. Прочие характеристики создаются в целях регулирования угловой скорости или выходного момента и называются искусственными.

2.4.2. Управление характеристиками электродвигателей

При управлении движением изменяют положение рабочих участков механических характеристик двигателей. Все возможные способы управления можно разделить на две большие группы — параметрические и автоматические.

Параметрическое управление реализуют в разомкнутых структурах управления (в структурах без обратных связей); **автоматическое управление** — в замкнутых с одной или несколькими обратными связями. Параметрические способы управления значительно проще в реализации, но обладают существенно меньшей точностью, поскольку не позволяют компенсировать влияние слу-

чайных или неучтенных факторов на характер движения при определении алгоритма управления. Поэтому их применяют при невысоких требованиях к качеству движения, когда на первый план выступают показатели простоты и надежности. Кроме того, параметрические способы дают более или менее удовлетворительное качество управления скоростью (а не моментом или силой), причем наиболее предпочтительны способы управления, не изменяющие k по отношению к их значениям на естественной характеристике или изменяющие их незначительно. Для двигателей постоянного тока это изменение напряжения на якорной обмотке или на обмотке возбуждения, для асинхронного — изменение частоты питающей сети одновременно с изменением амплитуды питающего напряжения.

Следует отметить, что напряжение на обмотках двигателя не должно превышать номинального значения в течение длительного времени. Поэтому искусственные характеристики, получаемые при уменьшении напряжения на якоре двигателя постоянного тока независимого или параллельного возбуждения, располагаются ниже и параллельно естественной (рис. 2.19, а, кривая a — естественная характеристика). На рис. 2.19, б показаны: a — естественная характеристика; b — искусственная при уменьшении частоты и амплитуды напряжения на статоре; c — искусственная при увеличении частоты выше номинального значения при неизменном номинальном напряжении на статоре.

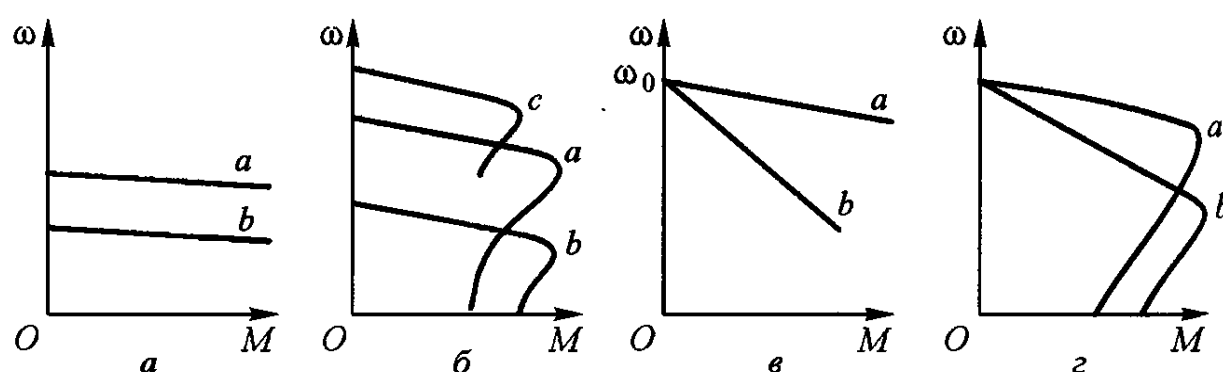


Рис. 2.19

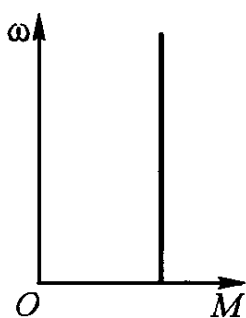
Для практической реализации этих способов управления необходимы специальные преобразователи, обеспечивающие регулирование своих выходных параметров по необходимому закону.

При отсутствии таких преобразователей управление движением возможно за счет изменения сопротивления силовой цепи двигателя: якорной — для двигателя постоянного тока, и роторной — для асинхронного двигателя с фазным ротором. При этом, во-первых, снижается КПД электропривода (электродвигателя, передаточного механизма и системы управления), так как значительная часть потребляемой из сети мощности идет на нагрев этих сопротивлений; во-вторых, уменьшается жесткость (наклон) характеристики k (увеличивается отклонение механической характеристики от характеристики источника скорости в сторону источника момента).

На рис. 2.19, *в* показаны: *a* — естественная характеристика двигателя постоянного тока независимого или параллельного возбуждения; *b* — искусственная характеристика при увеличении сопротивления его якорной цепи. На рис. 2.19, *г* показаны: *a* — естественная характеристика асинхронного двигателя; *b* — искусственная характеристика с дополнительным сопротивлением в его роторной цепи.

При таком управлении технически достижимо некоторое среднее положение механической характеристики между источником скорости и источником момента. Но низкий КПД, малый диапазон регулирования скорости, существенная незащищенность от внешних возмущений делают возможности управления наиболее неблагоприятными. Кроме того, для асинхронных двигателей требуется усложнение конструкции, а именно создание более сложной обмотки на роторе и контактных колец со скользящим контактом (двигатели с фазным ротором). В результате сводится на нет основное достоинство асинхронных двигателей — простота и надежность. Поэтому в настоящее время эти двигатели имеют ограниченное применение.

Благодаря своим характеристикам асинхронные двигатели повышенного скольжения нашли применение в электроприводах, отличающихся преобладанием неустановившихся режимов, т. е. работающих с частыми пусками, реверсами, торможениями, резко переменными и даже ударными нагрузками. За счет значительного уменьшения скорости при нагрузке они позволяют хорошо использовать маховик. В частности, по этим причинам они являются наиболее подходящими для привода кузнечно-штамповочных машин (существует даже наименование «штамповочные или



прессовые двигатели» — punch-press motors). Таким образом, регулирование скорости электродвигателей изменением сопротивления силовой цепи используют в машинах при невысоких требованиях к техническим показателям, когда на первый план выступают простота привода в целом и его невысокая стоимость.

Рис. 2.20 При разомкнутом параметрическом управлении можно получить характеристику, практически приближенную к характеристике источника момента

при питании двигателя постоянного тока от преобразователя со специфическими свойствами источника тока. Такой преобразователь обеспечивает постоянство якорного тока двигателя или его изменение по заданному (необходимому) закону. Статическая механическая характеристика двигателя (рис. 2.20) при этом теоретически соответствует $M = \text{const}$ ($k = 0$), а реально определяется степенью неидеальности преобразователя. На практике такие электроприводы в силу ряда причин получили некоторое распространение в устройствах перемотки материала, например в кабельной или текстильной промышленности.

Особенностью синхронных двигателей является сложность их пуска и управления. Поэтому они находят широкое применение в электроприводах средней и большой мощности, работающих длительно и, как правило, не требующих регулирования скорости.

Необходимо отметить, что сказанное выше о характеристиках электродвигателей относится к статическому режиму работы — работы с постоянной скоростью, когда выполняется условие $F_d + F_c = 0$. В общем случае движение электромеханической системы описывается моделями, в которые входят уравнения, учитывающие динамический характер работы электрической части привода (динамические характеристики). В одних случаях (особенно для тихоходных инерционных систем) этим дополнением можно пренебречь. В других случаях отказ от учета динамических характеристик может существенно исказить картину движения системы.

Поясним сказанное примерами.

Пример 1. Режим работы электрического двигателя постоянного тока независимого возбуждения при заданных параметрах и условиях питания соответствует точке 1 на механической характе-

тике a (рис. 2.21). Скорость ω постоянна и равна C_1 . Двигатель развивает момент M_d , равный по абсолютной величине приведенному моменту сил сопротивления M_c . Необходимо перевести механическую систему в новое состояние, соответствующее точке 2, для которой при том же моменте M_c скорость $\omega_2 = C_2 > C_1$.

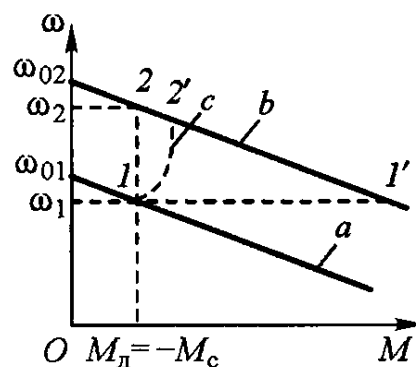


Рис. 2.21

Выбираем способ регулирования скорости с $k = \text{const}$ (изменение напряжения на якоре). Тогда точка 2 принадлежит новой механической характеристике двигателя b . Однако траектория перемещения рабочей точки из состояния 1 в состояние 2 может быть разной.

При скачкообразном увеличении напряжения на якоре и существенном превышении механической инерционности над электрической система мгновенно переходит в точку $1'$ характеристики b , и в дальнейшем изменения скорости и момента двигателя определяются механической характеристикой b . В данном случае динамическая характеристика совпадает со статической и далее в уравнении движения используется уравнение характеристики b . Характерной особенностью такого управления является скачкообразное изменение момента двигателя, что приводит к удару в механической системе.

Другой способ управления состоит в плавном изменении напряжения на якоре двигателя по некоторому закону. Тогда рабочая точка привода в динамическом режиме будет последовательно проходить через семейство статических механических характеристик, параллельных исходной. Траектория ее перемещения уже не принадлежит какой-то одной статической характеристике, а зависит от закона изменения напряжения и может в принципе быть выбрана в некотором смысле оптимальной. В частности, один из таких законов показан на рис. 2.21 (кривая c). Таким образом, в первом случае с момента времени t момент двигателя в уравнении движения изменяется от закона $M_1 = (\omega_{01} - \omega)k$ к закону $M_2 = (\omega_{02} - \omega)k$, где ω_{01} и ω_{02} — дискретные значения скорости идеального холостого хода для характеристик a и b ($M = 0$).

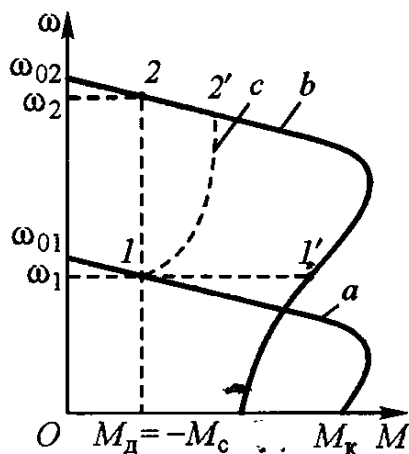


Рис. 2.22

Для второго случая скорость идеального холостого хода двигателя переменна и задается соответствующим законом изменения напряжения на якоре:

$$\omega_0 = f(t); \quad M = (\omega_0 - \omega)k. \quad (2.9)$$

Пример 2. Рассмотрим ту же задачу для асинхронного двигателя. Выберем способ регулирования скорости изменением частоты и амплитуды напряжения на статоре.

При скачкообразном увеличении частоты и амплитуды напряжения на статоре двигателя до значений, соответствующих скорости ω_2 на рис. 2.22, система мгновенно переходит из точки 1 характеристики *a* в точку 1' характеристики *b*. Эти характеристики нелинейны и не имеют точного аналитического описания. С некоторыми допущениями они могут быть представлены уравнением

$$M = \frac{2M_k}{S/S_k + S_k/S}, \quad (2.10)$$

где M_k — критический или максимальный момент двигателя, задается в соответствующих справочниках; S_k, S — критическое и текущее значения скольжения, причем

$$S_k = S_{\text{ном}} \left(M_k / M_{\text{ном}} + \sqrt{(M_k / M_{\text{ном}})^2 - 1} \right); \quad S = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}; \quad (2.11)$$

$M_{\text{ном}}, S_{\text{ном}}$ — номинальные момент и скольжение двигателя; ω_0 — синхронная скорость или скорость идеального холостого хода при $M = 0$.

Отметим, что в зоне наибольшей нелинейности (в окрестности точки 1') это уравнение дает наибольшую погрешность, поскольку не учитывает ряда физических процессов в двигателе.

При плавном увеличении частоты и напряжения, подаваемых на двигатель, рабочая точка, отражающая состояние привода, последовательно проходит через семейство статических

механических характеристик, соответствующих различным значениям частоты и напряжения (см. рис. 2.22), оставаясь все время на практически линейных участках этих характеристик. С высокой степенью точности эти участки могут быть аппроксимированы прямыми, поэтому решение уравнений движения для системы с приводом от асинхронного двигателя будет таким же, как и в случае привода от двигателя постоянного тока при плавном изменении напряжения на якоре. Забавно, что точно такого же вида кривой описывается устойчивость корабля при бортовой качке.

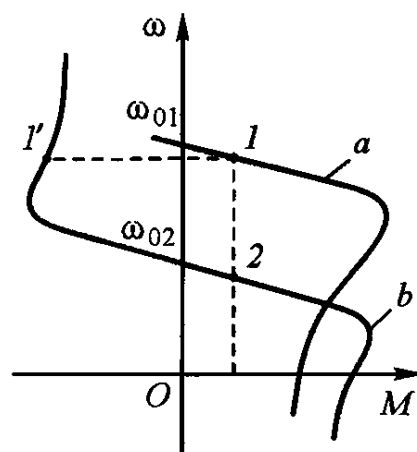


Рис. 2.23

Пример 3. Рассмотрим случаи понижения скорости и торможения. Также возможны два варианта управления движением: скачкообразное и плавное изменение параметров двигателя (синхронного или асинхронного — безразлично). Пусть это будет асинхронный двигатель с частотным управлением. Исходному и конечному состоянию привода соответствуют точки 1 и 2 на характеристиках a и b (рис. 2.23).

При скачкообразном уменьшении частоты и напряжения двигатель переходит в режим рекуперативного торможения на участок $1' - \omega_{02}$ характеристики b . Двигатель развивает тормозящий момент. Время торможения определяется суммарным моментом двигателя и нагрузки. На участке $\omega_{02} - 2$ двигатель развивает движущий момент, меньший момента сил сопротивления.

Время торможения определяется разностью (суммой) моментов сил движущих и сопротивления. В уравнение движения подставляют уравнение характеристики b , которое может быть представлено в форме (2.10). Можно принять тормозной момент постоянным, равным его среднему значению на этом участке.

При плавном снижении частоты и напряжения вплоть до нуля решение уравнения движения не отличается от аналогичного, полученного для случая увеличения скорости по закону (2.9).

Если требуется полный останов двигателя, то при скачкообразном изменении его параметров он переводится в один из тормозных режимов: противовключения или динамического тормо-

жения. В уравнение движения подставляют аналитические или табулированные зависимости этих характеристик.

В замкнутых структурах управления возможности получения желательных механических характеристик значительно выше. В принципе можно получить практически любые зависимости $M(\omega)$. Оценка предельных возможностей таких структур управления связана с теориями автоматического регулирования и оптимального управления.

Пример 4. Как уже говорилось, вряд ли можно найти реальную механическую систему, привод которой в действительности работает с постоянной скоростью. В процессе работы привода так или иначе проявляется инерционность всех элементов электромеханической системы (механической, электромагнитной, системы управления и т. д.). В частности, для учета только инерционности разомкнутой механической системы (от ротора электродвигателя до исполнительных звеньев механизма) со степенью подвижности $w = 1$ достаточно уравнения (1.10), которое легко сводится к дифференциальному уравнению 1-го порядка. В таких системах отсутствует резонанс.

При учете инерционности других элементов привода к этому уравнению добавляются уравнения, описывающие динамические процессы в этих элементах и повышающие порядок теперь уже системы дифференциальных уравнений. Это значит, что при определенных условиях система может входить в резонанс.

При учете электромагнитной инерционности двигателя на уровне элементарной модели к исходному уравнению (1.9) добавляют уравнение связи между статической и динамической характеристиками [12]:

$$\tau_3 \frac{dM_d}{dt} + M_d = M_{ст}, \quad (2.12)$$

где τ_3 — электромагнитная постоянная времени двигателя; M_d — движущий момент; $M_{ст} = a - k\omega$ — линеаризованная статическая характеристика движущего момента.

Назовем $\tau_m = J/k$ механической постоянной времени машины и для упрощения выкладок примем $J = \text{const}$. Тогда движение динамической модели описывается системой из двух уравнений:

$$J\ddot{\epsilon} = J\ddot{\phi} = M_d + M_c(\phi);$$

$$\tau_3 \dot{M}_d + M_d = M_{ст}.$$

Их можно свести к одному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$\ddot{M}_d + \frac{1}{\tau_3} \dot{M}_d + \frac{1}{\tau_3 \tau_m} M_d = -\frac{1}{\tau_3 \tau_m} M_c(\phi). \quad (2.13)$$

Для него частота основного резонанса

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\tau_3 J}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_3 \tau_m}}. \quad (2.14)$$

Мы рассматриваем начальную стадию проектирования, а учет электромагнитной и механической постоянной времени двигателя и машины требует достаточно глубокой проработки конструкции. Поэтому на начальных этапах проектирования учет динамических свойств немеханических элементов привода вряд ли целесообразен.

Все предыдущие рассуждения данного параграфа касались только свойств электродвигателей. Однако в состав привода, как это было сказано, входит еще и передаточный механизм. Часто в его составе есть ременная или клиноременная передача. Ее шкив ставят непосредственно на вал электродвигателя, а ее колесо передает вращение или на входной вал зубчатой передачи, или непосредственно на входной вал исполнительного механизма. Такое расположение позволяет существенно сгладить возмущения от нагрузок обрабатываемой среды на электродвигатель. В пределах наших моделей характеристикой ременной передачи по аналогии с электродвигателем также может служить скольжение:

$$S_{р.п} = 1 - \frac{\omega_{вых}}{\omega_{вх}}. \quad (2.15)$$

При передаче движения от ротора электродвигателя на выходной вал ременной передачи с передаточным отношением $U_{р.п}$ получаем $\omega_{эд} = \omega_{вх}$. Тогда

$$\omega_{вых} = \omega_{эд} \frac{1 - S_{р.п}}{U_{р.п}} = \omega_0 \frac{(1 - S_{эд})(1 - S_{р.п})}{U_{р.п}}.$$

Так как $S_{р.п}$ и $S_{эд} \ll 1$, то на выходе ременной передачи

$$\omega_{р.п} \approx \omega_0 \frac{1 - (S_{эд} + S_{р.п})}{U_{р.п}}. \quad (2.16)$$

Таким образом, наличие (клино)ременной передачи в составе привода позволяет уменьшить жесткость (коэффициент k) статической характеристики выходного вала передаточного механизма. При заданном перепаде угловой скорости выходного вала это позволяет уменьшить отклонения момента относительно его среднего значения или при заданном отклонении момента увеличить допустимый перепад угловой скорости, что, в свою очередь, сказывается на значении момента инерции маховых масс (см. главы 3, 4).

2.5. Выходные механические характеристики гидромеханических приводов

2.5.1. Типы гидроприводов и их характеристики

Взаимосвязанную совокупность гидромашин, гидроаппаратуры, трубопроводов, предназначенную для передачи энергии посредством жидкости, называют гидроприводом (рис. 2.24). Он включает в себя гидропередачу и систему обеспечения работы гидропередачи, в том числе систему управления. В состав гидропередачи входят: источник питания гидропривода, потребитель энергии — гидродвигатель (гидроцилиндр или гидромотор), система передачи энергии от источника к потребителю.

Гидропередача является силовой частью гидропривода, через которую протекает основной поток энергии. По принципу действия различают объемную и гидродинамическую передачу. В дальнейшем мы будем рассматривать гидропривод с объемной гидропередачей — объемный гидропривод, в котором жидкость под давлением изменяет объем камер двигателя, вызывая тем самым перемещение выходного звена. Возможности гидропривода в значительной мере определяются его механической характеристикой, представляющей зависимость между силой, развиваемой выходным звеном привода (для механизма, соединенного с выходным звеном гидропривода, это движущая сила), и его скоростью.

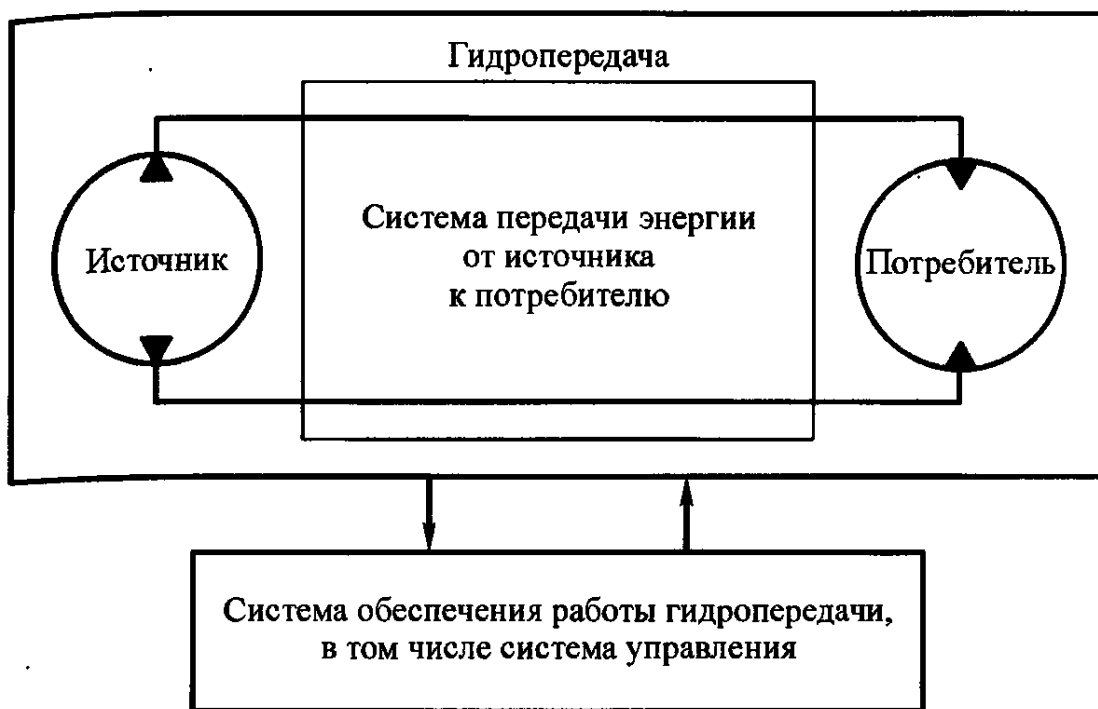


Рис. 2.24

По виду источника энергии объемные гидроприводы разделяют на *насосные, аккумуляторные и магистральные*.

В **насосном** гидроприводе рабочая жидкость подается в гидродвигатель объемным насосом, входящим в состав этого гидропривода. Он применяется наиболее широко. В зависимости от приводного двигателя насосный гидропривод подразделяют на электрогидропривод, турбогидропривод, мотогидропривод и т. п. Идеализированная схема такого гидропривода представлена на рис. 2.15, а: при отсутствии соответствующей системы управления скорость движения выходного звена определяется подачей насоса, а давление в гидросистеме — внешней нагрузкой.

В **аккумуляторном** и **магистральном** приводах движение системы обеспечивается разностью силы, развиваемой гидродвигателем (движущей силой в понимании ТММ), и силой сопротивления, приложенной к выходному звену гидродвигателя со стороны механической системы.

В **аккумуляторном** гидроприводе рабочая жидкость подается в гидродвигатель от предварительно заряженного гидроаккумулятора. В процессе работы аккумулятор разряжается до минимально допустимого объема и давления, после чего заряжается вновь до заданных значений объема и давления [13]. Таким образом, аккумуля-

мулятор является источником энергии ограниченной мощности. Этот привод используется в системах с кратковременным рабочим циклом и ограниченным числом циклов. Идеализированная схема такого гидропривода приведена на рис. 2.14, в: при отсутствии соответствующей системы управления давление в гидросистеме определяется исходным давлением в аккумуляторе и зависит от соотношения объемов жидкости и газа, а скорость движения выходного звена зависит от внешней нагрузки и закона изменения давления в аккумуляторе.

В **магистральном** гидроприводе используется централизованная система питания, например от больших аккумуляторных станций. Этот тип привода существует обычно на крупных предприятиях. В нашем изложении этот тип гидропривода соответствует приводу от аккумулятора бесконечного объема (см. рис. 2.14, а). Фактически магистральный гидропривод является источником неограниченной мощности. При отсутствии соответствующей системы управления давление в гидросистеме является практически постоянным, а скорость движения выходного звена при заданном давлении в магистрали зависит только от внешней нагрузки.

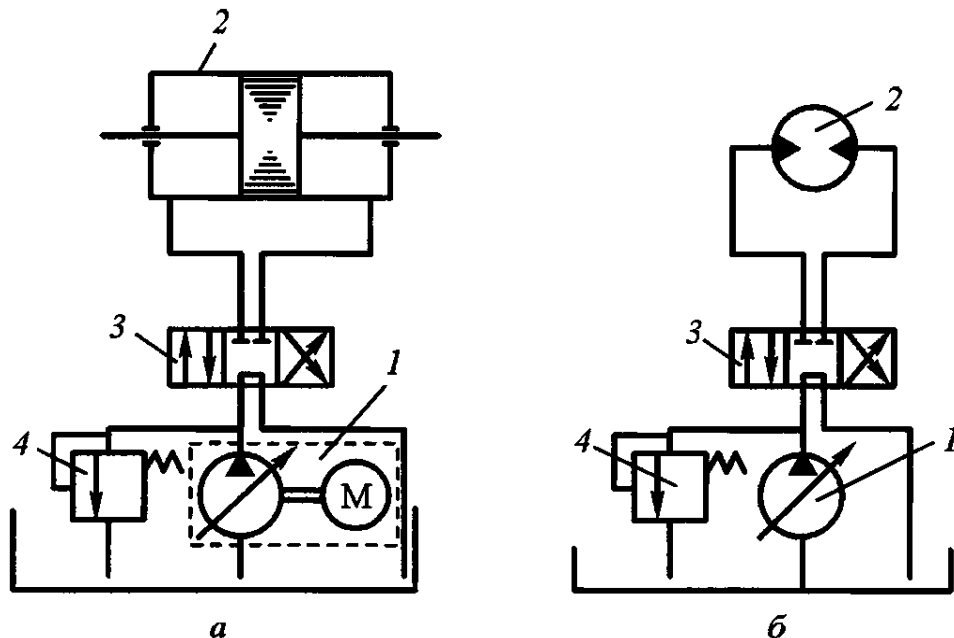


Рис. 2.25

По характеру движения выходного звена гидроприводы подразделяют на приводы поступательного (рис. 2.25, а) и вращательного типов (рис. 2.25, б). В состав привода входят: источник пита-

ния гидропривода 1 (насос, аккумулятор, магистраль), гидродвигатель 2 (гидроцилиндр или реверсивный гидромотор), гидрораспределитель 3. Объектами регулирования гидропривода являются: направление движения гидродвигателя 2; скорость его движения и, в зависимости от типа привода, давление в рабочей полости гидродвигателя. Чтобы предохранить привод от перегрузок, максимальное давление ограничивают с помощью предохранительного клапана 4.

2.5.2. Управление характеристиками гидроприводов

Регулируемые гидроприводы используют в качестве приводов металлорежущих станков, прокатных станов, прессов и литейного оборудования, дорожных и строительных машин, транспортных и сельскохозяйственных машин. Регулирование может быть ручным, автоматическим, программным.

Принципы управления движущей силой в гидродвигателе при наличии аккумуляторного привода очевидны из рис. 2.14.

Объектом регулирования насосного привода является скорость гидродвигателя. Возможны два способа ее регулирования: непосредственным изменением скорости движения жидкости в источнике или в гидродвигателе; изменением потока жидкости в магистрали, соединяющей источник и потребитель (насос и гидроцилиндр). Первый способ (объемное регулирование) осуществляется изменением рабочего объема насоса и (или) гидродвигателя (см. рис. 2.25). Второй способ (дрессельное регулирование) осуществляется локальным изменением сечения трубопровода с помощью так называемого дрессельного клапана 5 (рис. 2.26, а, б; остальные позиции аналогичны показанным на рис. 2.25, а).

Радость от возможности регулировать движение гидродвигателя несколько омрачается тем, что КПД системы определяется теперь не только потерями в насосе и гидродвигателе, но и потерями в системе регулирования и (или) управления, причем эти потери могут быть весьма существенными.

Потери в элементах привода, как в любой иной энергетической системе, определяют КПД. Соответственно, КПД гидропривода включает КПД его элементов: насоса, гидродвигателя, системы управления:

КПД насоса

$$\eta_n = \frac{p_n Q_n}{M_n \omega_n}; \quad (2.17a)$$

КПД гидродвигателя

$$\eta_m = \frac{M_m \omega_m}{p_m Q_m}; \quad (2.17б)$$

КПД процесса управления

$$\eta_{п.у} = \frac{p_m Q_m}{p_n Q_n}. \quad (2.17в)$$

Последний оценивает потери мощности на регулирование скорости выходного звена гидропривода.

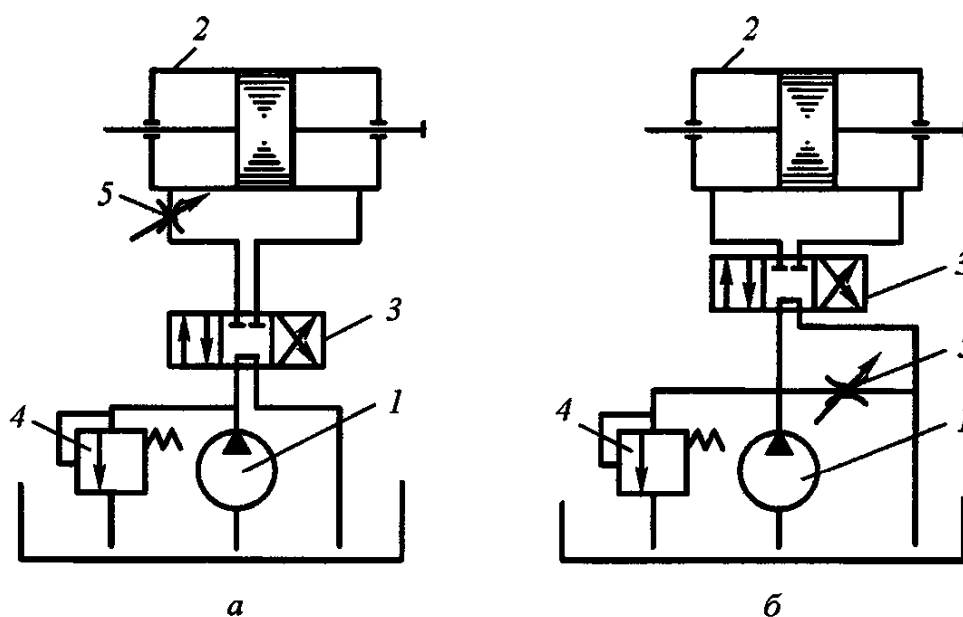


Рис. 2.26

Общий КПД привода выражается соотношением

$$\eta = \eta_n \eta_m \eta_{п.у}. \quad (2.17г)$$

Здесь η , η_n , η_m , $\eta_{п.у}$ — КПД привода, насоса, гидродвигателя (мотора или цилиндра), процесса управления; p_m , p_n — перепады давлений на гидромоторе и насосе; Q_m , Q_n — расход жидкости через

гидромотор и подача насоса; M_m, M_n — моменты на валу гидромотора и гидронасоса (см. рис. 2.26); ω_m, ω_n — угловые скорости гидромотора и гидронасоса.

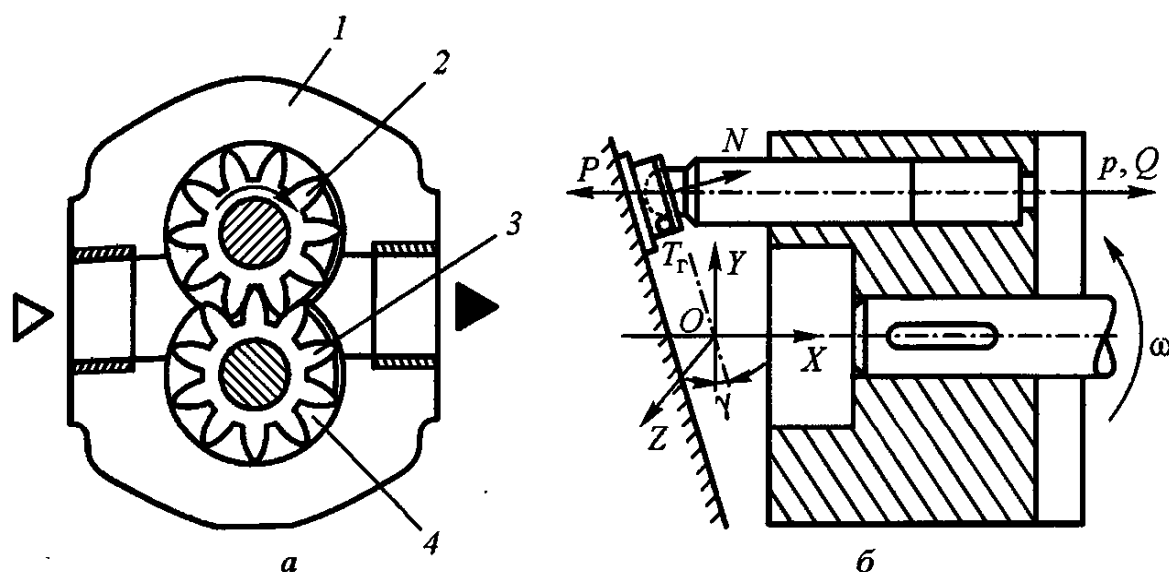


Рис. 2.27

Объемное регулирование изменением рабочего объема насоса реализуется не для всех типов насосов. Например, шестеренные насосы (рис. 2.27, а) характеризуются постоянным рабочим объемом, а аксиально-поршневые насосы (рис. 2.27, б) могут иметь переменный рабочий объем W_n , который может изменяться от нуля до $W_{n.0}$ [13]. При закрытом предохранительном клапане скорость выходного звена гидропривода помимо типоразмера машины определяется их объемным КПД и параметром регулирования насоса e_n . Параметр регулирования — отношение рабочего объема к его максимальному значению — определяется углом наклона диска, где $e_n = f(\gamma)$ (см. рис. 2.27, б). Отметим, что непрерывное регулирование изменением рабочего объема гидродвигателя возможно лишь в гидродвигателе вращательного движения. В гидродвигателе поступательного движения, кроме частных случаев, возможно только дискретное регулирование.

Для гидропривода поступательного движения (см. рис. 2.25, а)

$$v_n = e_n \frac{W_{n.0}}{S_n} \frac{\omega_n}{2\pi} \eta_o. \quad (2.18a)$$

Для гидропривода вращательного движения (см. рис. 2.25, б)

$$\omega_M = \omega_H \frac{e_H}{e_M} \eta_o \frac{W_{H.O.}}{W_{M.O.}}. \quad (2.186)$$

Здесь v_n , S_n — скорость и площадь поршня; $W_{H.O.}$, $W_{M.O.}$ — максимальный рабочий объем насоса и гидроцилиндра; η_o — объемный КПД гидropередачи; e_M — параметр регулирования гидромотора.

Мощность $P_{гп}$, развиваемая гидроприводом при постоянном давлении, возрастает при увеличении рабочего объема насоса; скорость выходного звена возрастает, а сила на штоке или момент на валу гидродвигателя (цилиндр или гидромотор) остаются постоянными (рис. 2.28, а).

Если насос работает при постоянных частоте вращения и давлении, то регулирование гидропривода осуществляется при постоянной мощности насоса. При уменьшении рабочего объема гидромотора частота вращения его вала будет увеличиваться. Крутящий момент на валу гидромотора будет убывать приблизительно обратно пропорционально частоте его вращения, т. е. по гиперболическому закону (рис. 2.28, б).

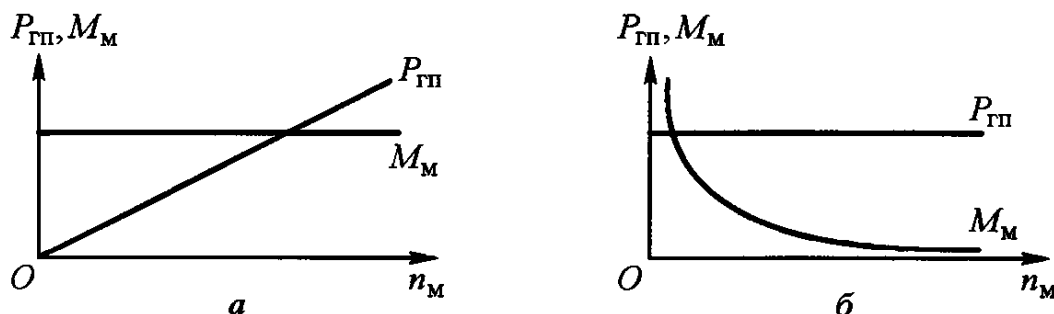


Рис. 2.28

Цикл работы механизмов машин-автоматов состоит, как правило, из частных циклов работы отдельных устройств и обеспечивается гидropередачей и унифицированной аппаратурой. Уменьшение числа элементов в схеме управления повышает надежность системы.

При **дрессельном регулировании** возможны два принципиально разных способа включения регулирующего дресселя: последовательно с гидродвигателем (см. рис. 2.26, а) и параллельно гидродвигателю (см. рис. 2.26, б).

При *последовательном* включении дросселя между насосом и распределителем возникает максимально допустимое предохранительным клапаном давление, а избыток жидкости, подаваемой насосом, стекает через предохранительный клапан в емкость (бак). Скорость гидродвигателя определяется следующим образом:

$$v_{\pi} = \frac{Q_{\text{др}}}{S_{\pi}}; \quad Q_{\text{м}} = Q_{\text{др}} = \mu_{\text{др}} S_{\text{др}} \sqrt{\frac{2\Delta p_{\text{др}}}{\rho}},$$

откуда

$$v_{\pi} = \frac{\mu_{\text{др}} S_{\text{др}}}{S_{\pi}} \sqrt{\frac{2 \left(p_{\text{н}} - \frac{F}{S_{\pi}} \right)}{\rho}}. \quad (2.19)$$

Здесь $Q_{\text{др}}$ — расход жидкости через дроссель; $\mu_{\text{др}}$ — коэффициент расхода дросселя (определяется из справочных данных); $\Delta p_{\text{др}}$ — падение давления на дросселе; S_{π} — площадь поршня; $S_{\text{др}}$ — площадь сечения дросселя; ρ — плотность жидкости; F — сила на штоке гидродвигателя.

Механические характеристики гидропривода при последовательном включении дросселя представляют семейство «падающих» парабол, каждая из которых соответствует своей степени открытия дросселя $\bar{S} = S_{\text{др}} / S_{\text{др max}}$ (рис. 2.29).

В соответствии с (2.17в)

$$\eta_{\text{п.у}} = \frac{F v_{\pi}}{F_{\text{max}} v_{\pi \text{ max}}}; \quad v_{\pi \text{ max}} = \mu_{\text{др}} \frac{S_{\text{др max}}}{S_{\pi}} \sqrt{\frac{2 p_{\text{н}}}{\rho}}.$$

Полагая

$$\mu_{\text{др}} = \text{const}; \quad \bar{v}_{\pi} = \frac{v_{\pi}}{v_{\pi \text{ max}}}; \quad \bar{S} = \frac{S_{\text{др}}}{S_{\text{др max}}},$$

получаем

$$\bar{v}_{\pi} = \bar{S} \sqrt{1 - \bar{F}} = \bar{S} \sqrt{1 - \bar{p}_{\text{м}}}, \quad (2.20)$$

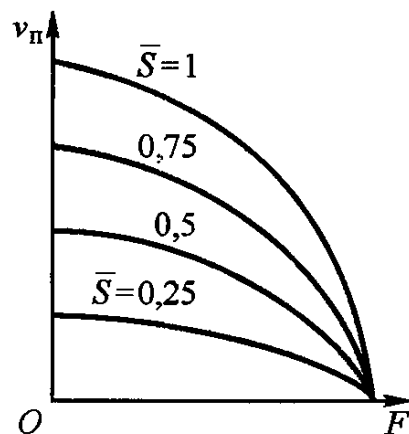


Рис. 2.29

откуда

$$\eta_{п.у} = \bar{S} \bar{p}_м \sqrt{1 - \bar{p}_м} = \bar{v}_п \left(1 - \frac{\bar{v}_п^2}{\bar{S}^2} \right). \quad (2.21)$$

Здесь $\bar{F} = F/F_{\max}$; F — сила, приложенная к штоку гидроцилиндра; $F_{\max}$ — значение этой силы, вызывающее остановку движения штока; $\bar{p} = p/p_{\max}$; $\bar{p}_м = p_м/p_{м\max}$. Графики этих зависимостей представлены на рис. 2.30, а, б.

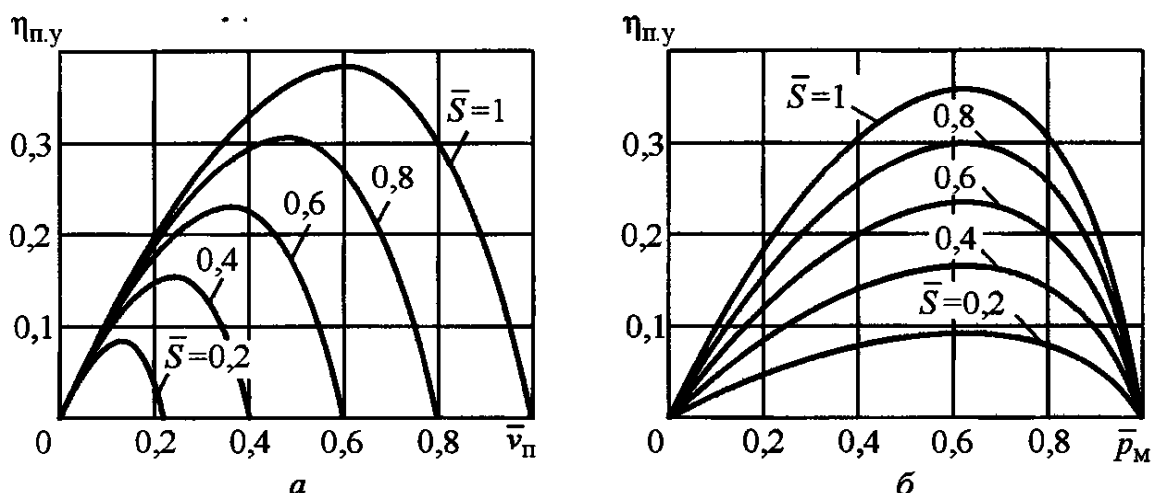


Рис. 2.30

После исследования на максимум при $\bar{S} = 1$ получаем значения оптимальных КПД системы управления и безразмерной скорости выходного звена (штока):

$$\eta_{п.у}^{\text{опт}} = 0,385; \quad \bar{v}_п^{\text{опт}} = \bar{Q}_м^{\text{опт}} = 0,58; \quad \bar{p}^{\text{опт}} = 2/3.$$

При **параллельном включении** дросселя (см. рис. 2.26, б) скорость выходного звена — штока гидроцилиндра — регулируется изменением степени открытия дросселя. При полном закрытии дросселя скорость поршня наибольшая. Связь между расходами и давлениями в приводе определяется из зависимостей

$$Q_н = Q_ц + Q_{др}; \quad p_н = p_ц = p_{др} = \frac{F}{S_п};$$

$$Q_{др} = \mu_{др} S_{др} \sqrt{\frac{2p_{др}}{\rho}} = \mu_{др} S_{др} \sqrt{\frac{2F}{S_п \rho}}.$$

После подстановки получаем

$$v_{\pi} = \frac{\left(Q_{\pi} - \mu_{\text{др}} S_{\text{др}} \sqrt{\frac{2F}{S_{\pi} \rho}} \right)}{S_{\pi}}. \quad (2.22a)$$

Эту зависимость можно представить в безразмерном виде. Обозначим $Q_{\text{др max}}$ — расход через открытый дроссель при затор-
моженном штоке; $\bar{Q} = Q_{\text{др max}}/Q_{\pi}$ — постоянная для данного
конструктивного исполнения дросселя; p_k — давление настрой-
ки предохранительного клапана; $\bar{v}_{\pi} = v_{\pi} / v_{\pi \text{ max}}$; $v_{\pi \text{ max}} = Q_{\pi} / S_{\pi}$;
 $Q_{\text{др max}} = \mu_{\text{др}} S_{\text{др}} \sqrt{2 p_k / \rho}$. Тогда (2.22a) преобразуется к виду

$$\bar{v}_{\pi} = 1 - \bar{S} \bar{Q} \sqrt{F}. \quad (2.22b)$$

Механические характеристики привода при параллельном
включении дросселя ($Q_{\text{др}} = 1$) для ряда его фиксированных поло-
жений отличаются от механических характеристик при последова-
тельном включении и имеют обратную кривизну (рис. 2.31). При
параллельном включении дросселя исключается возможность ре-
гулирования при совпадении направления силы сопротивления,
приложенной к поршню, и его скорости.

При допущении $\eta_{\pi} = \eta_{\text{м}} = 1$ получаем $\eta = \eta_{\pi, \text{у}}$. Тогда

$$\eta_{\pi, \text{у}} = \bar{F} \bar{v}_{\pi} = \frac{p_{\text{м}} Q_{\text{м}}}{p_{\pi} Q_{\pi}} = 1 - \frac{Q_{\text{др}}}{Q_{\pi}} = 1 - \bar{S}. \quad (2.23)$$

Таким образом, можно говорить о
двух принципах управления движением
выходного звена гидропривода.

1. Применение гидромашин с изме-
няемым рабочим объемом, регулируемых
гидромашин. В зависимости от конкрет-
ного применения данной гидропередачи
возможны следующие сочетания: регули-
руемый насос и нерегулируемый гидро-
двигатель; нерегулируемый насос и регу-
лируемый гидродвигатель; регулируемый

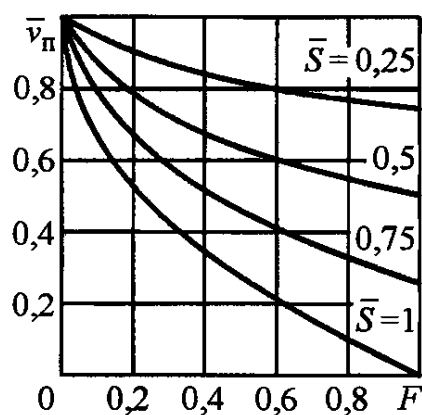


Рис. 2.31

насос и регулируемый гидродвигатель. Реализация этого способа позволяет получить широкий диапазон изменения скорости выходного звена при высоком значении КПД гидропередачи (до 80 %). Для магистрального или аккумуляторного гидропривода возможно применение регулируемого гидродвигателя. Конкретный выбор типоразмера и характеристик гидромашин делает проектировщик, учитывая весь перечень конкретных требований к гидроприводу и, конечно, его назначение (привод постоянной мощности, привод постоянной частоты вращения и т. п.).

2. Дросселирование рабочей жидкости (сознательное превращение механической энергии рабочей жидкости в теплоту). Дроссель может быть установлен либо последовательно с гидродвигателем, либо параллельно. Такой способ управления движением применяется при небольших передаваемых мощностях (до 10 кВт). Место установки дросселя зависит от назначения привода и характера нагрузки. При относительно малых нагрузках и высоких скоростях выходного звена дроссель следует установить параллельно гидродвигателю, а при больших нагрузках и низких скоростях выходного звена — последовательно с гидродвигателем.

Сравнивая первый (применение регулируемых гидромашин) и второй (дросселирование) способы, следует отметить, что первый значительно дороже (из-за стоимости регулируемых гидромашин) и требует более сложной системы управления. Поэтому при выборе той или иной схемы следует учитывать не только назначение гидромеханической системы и требуемые от нее характеристики, но и коммерческую и экономическую целесообразность технического решения.

Регулирование параметров движения гидропередач с аккумуляторным и магистральным приводами в принципе осуществляется теми же средствами, что и в системах с насосным приводом. Объектом измерения и контроля является скорость или перемещение исполнительного звена. Управление этим параметром осуществляется теми же средствами, что и в насосном приводе. Чаще всего применяют или последовательно включенный регулируемый дроссель, или регулируемый гидродвигатель. Совместное регулирование движущей силы и скорости может достигаться конструктивными мерами. Один из таких подходов будет рассмотрен в главах 3 и 4.

3. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА)

Энергетическая форма уравнения движения: геометрическая интерпретация решения; влияние параметров m , F_d , v_H на закон движения системы; влияние положения s_p графика $F_c(s)$ на $(F_d)_{\text{нм}}$ и закон движения; влияние протяженности нагружения на закон движения механизма. Дифференциальная форма уравнения движения: метод последовательных приближений Пикара; сходимость позиционной задачи; влияние скоростной характеристики на движение системы; сходимость автономной задачи; сходимость при вычислении ускорений; о пользе v_H . Некоторые принципы регулирования движения механизмов.

Самой простой задачей динамики является анализ движения динамической модели с заданными приведенными массами (моментами инерции) и силами (моментами) при известных начальных условиях — начальная задача. Наиболее простая форма описания движения — энергетическая, приведенная в уравнениях (1.4)–(1.6). На этой основе можно решать задачи, в которых силы и массы (моменты и моменты инерции) являются функциями только положения точки (звена) приведения. Для общего случая задания сил и масс требуется решать уравнения движения в дифференциальной форме (см. формулы (1.1)–(1.3), (1.9), (1.10)). Использовать энергетическую форму уравнений движения удастся, применяя итерационные методы решения.

Естественно, рассмотрение задач динамического анализа начнем с уравнений движения в энергетической форме.

3.1. Энергетическая форма уравнения движения

Для определенности в качестве динамической модели принимаем точку массой $m = \text{const}$, перемещающуюся по прямой из

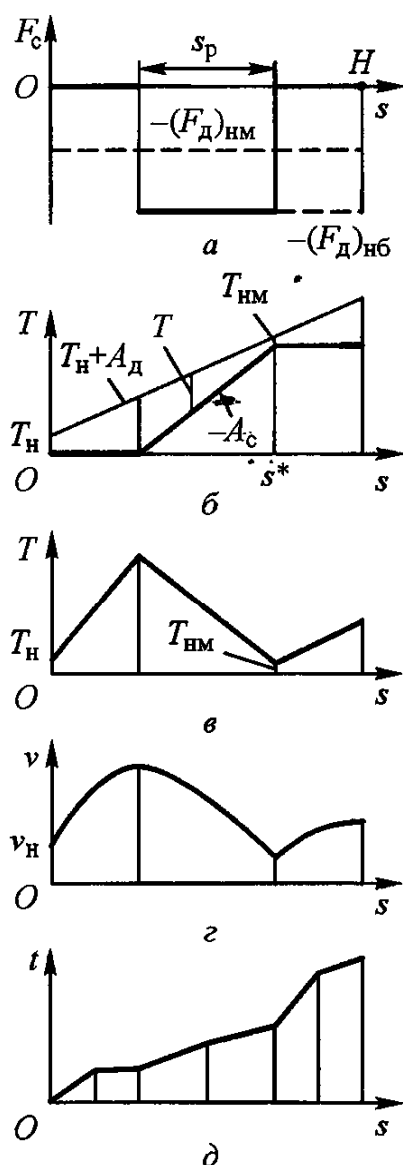


Рис. 3.1

рис. 3.1, д — закон движения $t(s)$, полученный в результате интегрирования уравнения (1.11). Его удобно интегрировать, когда $v_H \neq 0$. Здесь же уместно отметить очевидное: чем меньше скорость (в точках T_H и T_{HM}), тем больше времени занимает перемещение в окрестности данного положения, тем круче график $t(s)$.

На основе формулы (2.5) и ее геометрической интерпретации можно сделать целый ряд выводов и прогнозов поведения механической системы при варьировании ее параметров. Предлагаемые выводы кажутся очевидными. Однако опыт говорит, что они, эти выводы, относятся к категории понятий, называемых **pons asinorum** (лат.) — «мост ослов». Так называют понятия, которые

начального в конечное положение на расстоянии H (см. рис. 1.4, б). Это движение описывается уравнением (2.5).

Геометрическая интерпретация решения. Решением уравнения движения (2.5) является формула (2.6) при естественном ограничении (2.7). Принимаем $F_c = \text{const}$ на участке s_p ; вне его $F_c = 0$ (рис. 3.1, а). В точке s^* $|A_c(s^*)| = |A_c|_{\text{нб}}$.

Движение осуществляется (рис. 3.1, б), если выполняется неравенство (2.7), которое мы перепишем в форме

$$T_{HM} = T_H + A_d(s^*) + A_c(s^*) > 0. \quad (3.1)$$

Очевидно, что движущая сила F_d определена в интервале

$$(F_d)_{\text{нм}} = \frac{-A_c(s^*)}{s^*}; \quad (F_d)_{\text{нб}} = -(F_c)_{\text{нб}}, \quad (3.2)$$

причем

$$T_H = (T_H)_{\min} \quad \text{при} \quad T_{HM} = 0$$

$$\text{и} \quad T_H \geq (T_H)_{\min} = A_d(s^*) + A_c(s^*).$$

На рис. 3.1, в приведен график полной кинетической энергии системы; на рис. 3.1, г показана зависимость $v(s)$; на

при всей видимой простоте и очевидности трудны для восприятия. В ТММ к таким понятиям относятся также аналоги скорости и ускорения (1-я и 2-я передаточные функции).

Влияние параметров m , F_d , v_n на закон движения. На рис. 3.2 показано влияние каждого из трех указанных параметров (m , F_d , v_n) при фиксированных двух других. Для однозначной трактовки исходные зависимости нарисованы толстыми линиями; тонкими показаны законы движения, соответствующие увеличению значений параметров ($m \uparrow$, $F_d \uparrow$, $v_n \uparrow$).

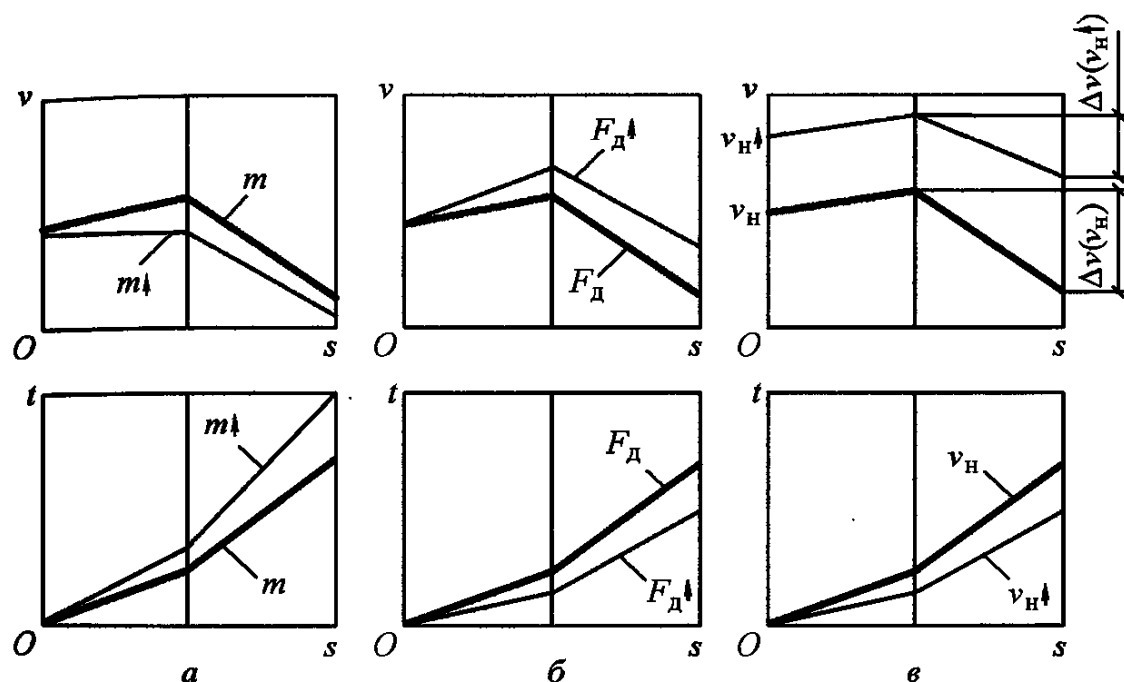


Рис. 3.2

В случае увеличения массы m (рис. 3.2, а) при заданных начальной скорости и системе сил скорость уменьшается, а время движения увеличивается. В случае увеличения движущей силы F_d (рис. 3.2, б) при заданных начальной скорости и массе модели скорость движения увеличивается, а время движения уменьшается. Увеличение начальной скорости v_n (рис. 3.2, в) приводит в целом к увеличению скорости модели и одновременно к уменьшению перепада между наибольшей и наименьшей скоростью (к уменьшению неравномерности движения); время движения уменьшается.

Влияние положения s_p графика $F_c(s)$ на $(F_d)_{\text{нм}}$ и закон движения. Рассматриваются два случая: нагружение в начале (рис. 3.3, а)

и конце (рис. 3.3, б) перемещения точки приведения силой сопротивления $F_c(s_p) = \text{const}$ при $T_{\text{нм}} = 0$. Ясно, что в обоих случаях $(F_{\text{д}})_{\text{нб}} = -F_c$. Однако при определении значения $(F_{\text{д}})_{\text{нм}}$ положение s_p внутри интервала $H = [s]$ и соотношение s_p/H играют существенную роль. При $s_p \in [s)$ движущая сила $(F_{\text{д}})_{\text{нм}}$ больше, чем при $s_p \in (s]$, причем в первом случае чем меньше s_p , тем больше сила $(F_{\text{д}})_{\text{нм}}$. В пределе при $T_{\text{н}} = 0$ имеем $(F_{\text{д}})_{\text{нм}} = (F_{\text{д}})_{\text{нб}}$.

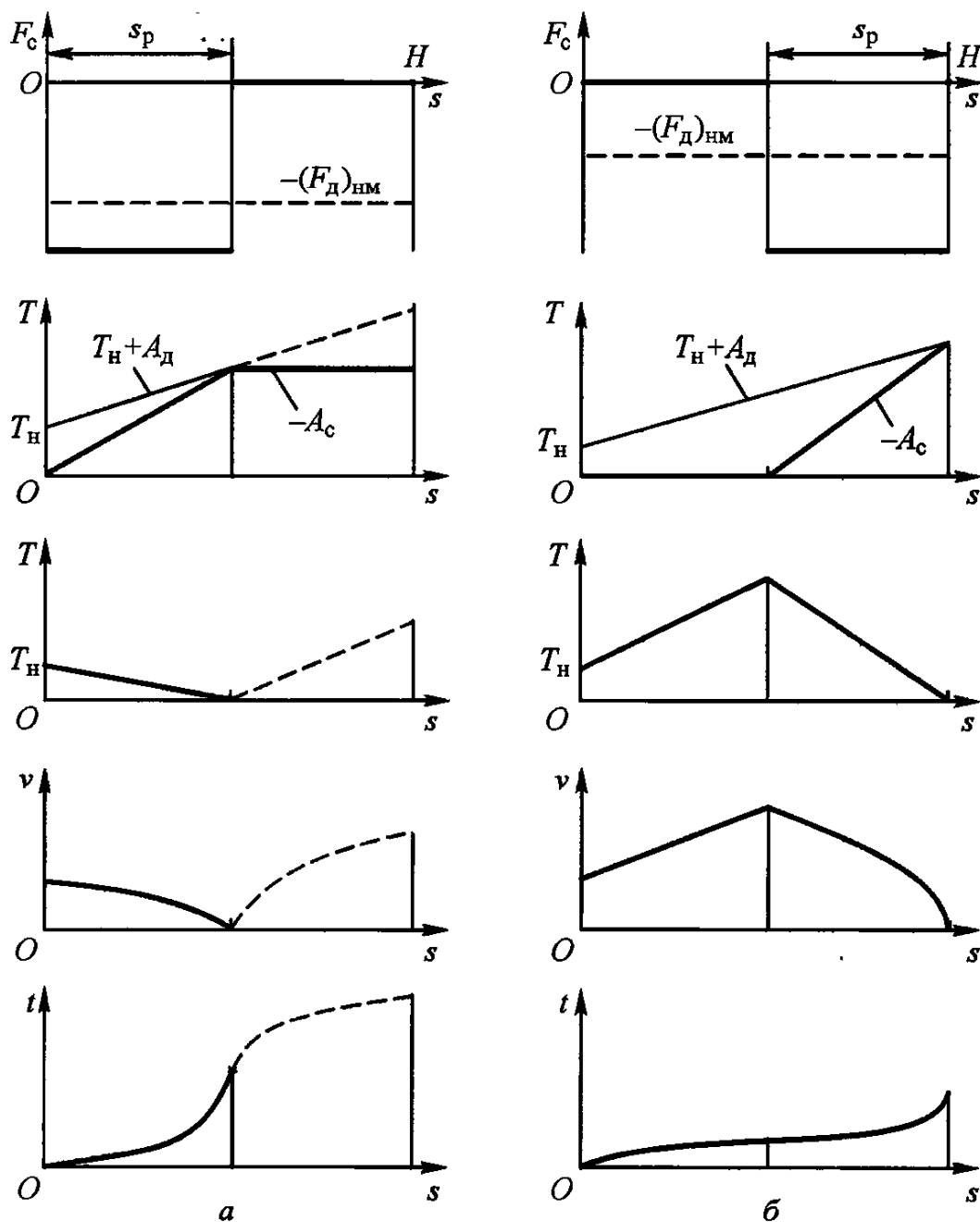


Рис. 3.3

При $T_{\text{нм}} = 0$ возникает неопределенность при установлении закона движения в случае, когда правая граница s_p не совпадает с правой границей отрезка H , т. е. расположена внутри него. В этом случае возможно как прекращение, так и продолжение движения (на рис. 3.3, а эта неопределенность помечена пунктиром).

Сравнение законов движения этих двух случаев показывает, что первый случай «медленнее» второго.

Влияние протяженности нагружения на закон движения механизма. Что лучше — простой или сложный механизм? Ранее [3] было показано, что простейший (четырёхзвенный) рычажный механизм обладает минимальными функциональными возможностями. Усложнение схемы позволяет получить механизм со специальными метрическими (кинематическими) свойствами. В кривошипных механизмах усложнение схемы при заданном нагружении исполнительного звена изменяет динамические свойства системы за счет изменения протяженности нагружения кривошипа. Это хорошо иллюстрируется амплитудным спектром для единичной нагрузки при ее разложении в ряд Фурье (рис. 3.4).

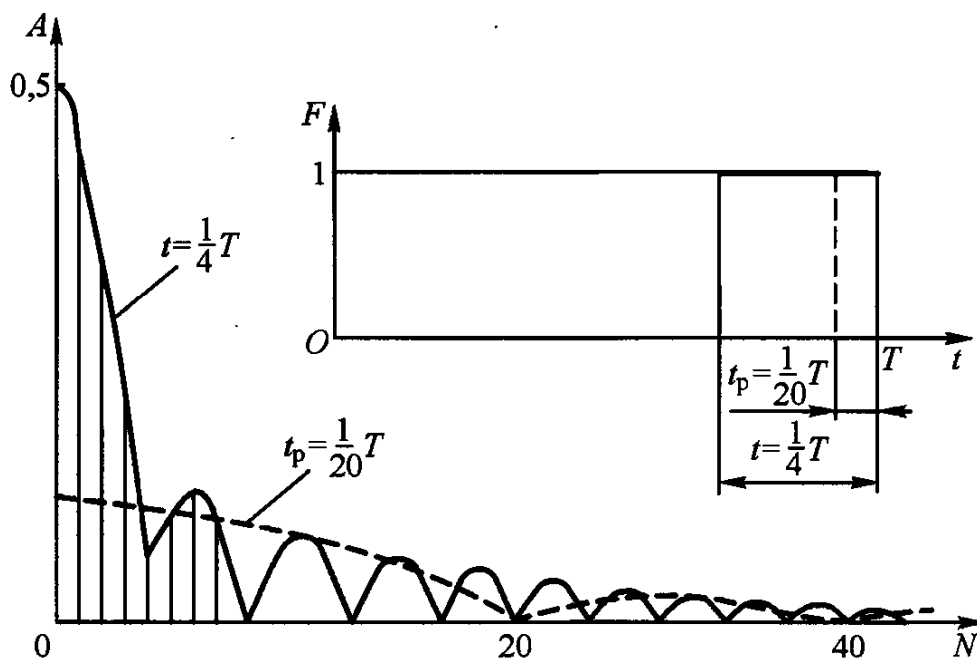


Рис. 3.4

При заданной работе сил сопротивления $A_c(H)$, условия $F_d = \text{const}$ ($M_d = \text{const}$) и увеличении протяженности нагружения (s_p)

приведенная сила (момент) сопротивления уменьшается. Увеличению s_p соответствует увеличение времени нагружения t_p . Этот очевидный факт иллюстрируется рис. 3.5.

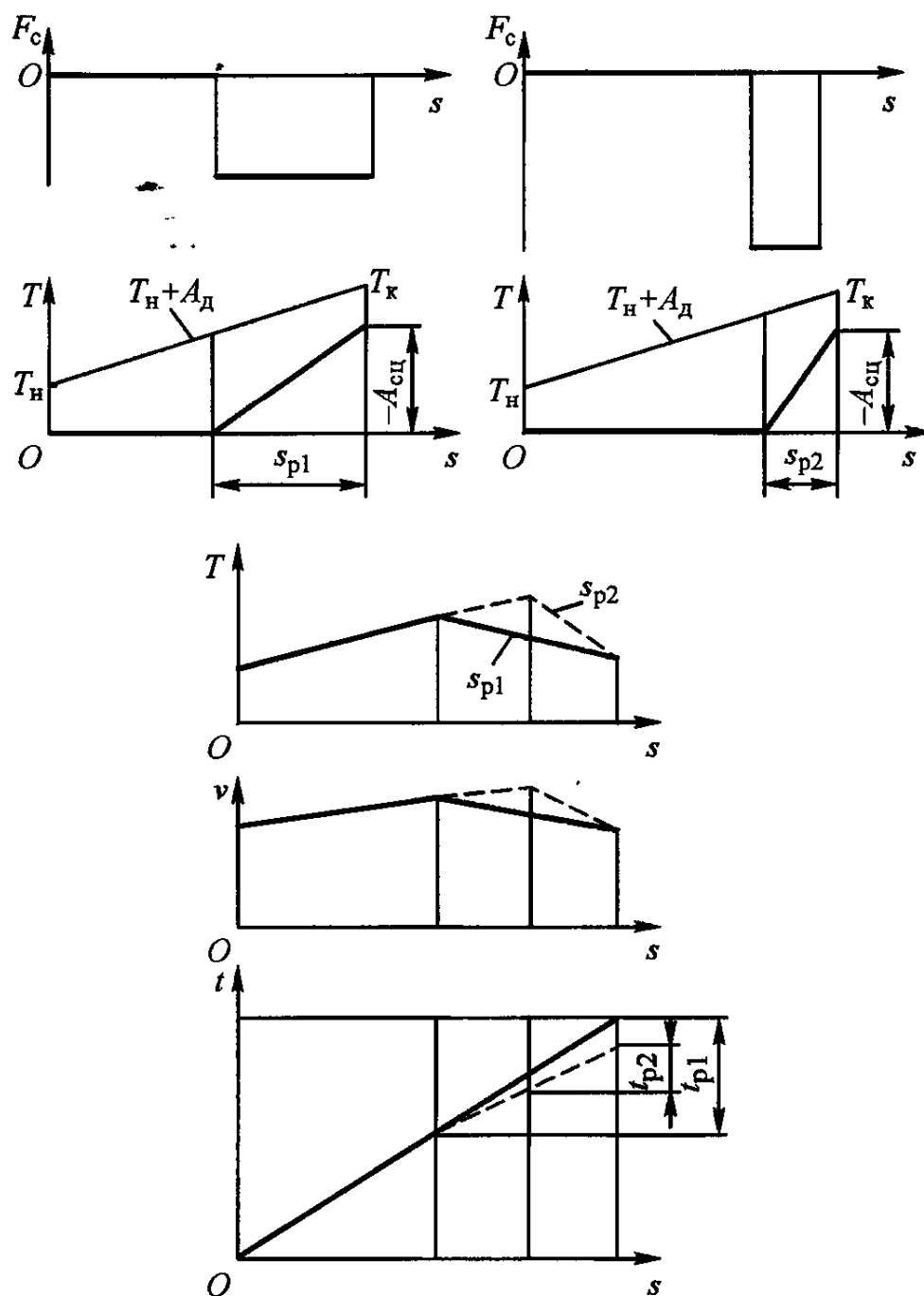


Рис. 3.5

Хорошо это или плохо? Все зависит от конкретной задачи. Например, при горячей штамповке увеличение времени соприкосновения заготовки с инструментом снижает его стойкость, что

очень плохо, а увеличение времени вырубki при заданной производительности снижает динамичность машины, что, безусловно, хорошо.

3.2. Дифференциальная форма уравнения движения

Для разнообразия рассмотрим движение звена (а не точки) приведения относительно неподвижной оси вращения. Динамическая модель такого движения изображена на рис. 1.4, а, а математическая описывается уравнением (1.1). С учетом (1.8) ее можно представить в форме (1.9). Учитывая, что

$$\varepsilon = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}, \quad (3.3)$$

уравнение (1.9) преобразуем к виду

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{M_{\varphi} + M_{\omega}}{J\omega} - \frac{1}{2}\omega \frac{d \ln(J/J_H)}{d\varphi}. \quad (3.4)$$

Метод последовательных приближений Пикара. Если принять $\omega = y$, $\varphi = x$, то (3.4) имеет вид

$$y' = f(x; y) \quad (3.5)$$

с начальными условиями x_H, y_H .

Известно, что для дифференциального уравнения первого порядка при заданных начальных условиях (задача Коши) можно построить сходящийся итерационный процесс, именуемый методом Пикара:

$$y^{(n+1)} = y_H + \int_{x_H}^x f(x; y^{(n)}(x)) dx, \quad (3.6)$$

где n — номер приближения.

Теперь решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\omega^{(n+1)} = \omega_H + \int_{\varphi_H}^{\varphi} \frac{M(\varphi) + M(\omega^{(n)}(\varphi))}{J\omega^{(n)}} d\varphi - 0,5 \int_{\varphi_H}^{\varphi} \omega^{(n)}(\varphi) \frac{d \ln(J/J_H)}{d\varphi} d\varphi. \quad (3.7)$$

Результатом решения является зависимость $\omega^{(n+1)} = \omega^{(n+1)}(\varphi)$. Сходимость оценивается по допустимой разнице двух последовательных приближений:

$$\max |\omega^{(n+1)} - \omega^{(n)}| < \delta_{\omega}.$$

Тогда при заданном нулевом приближении $\varphi = \varphi_n$; $\omega = \omega_n$; $M_{\omega_n} = M(\omega_n)$ получаем

$$\omega^{(1)} = \omega_n + \int_{\varphi_n}^{\varphi} \frac{M(\varphi) + M_{\omega_n}}{J\omega_n} d\varphi - 0,5\omega_n \ln(J/J_n); \quad (3.8)$$

$$\omega^{(2)} = \omega_n + \int_{\varphi_n}^{\varphi} \frac{M(\varphi) + M(\omega^{(1)}(\varphi))}{J\omega^{(1)}} d\varphi - 0,5 \int_{\varphi_n}^{\varphi} \omega^{(1)} \frac{d \ln(J/J_n)}{d\varphi} d\varphi. \quad (3.9)$$

Сразу заметим, что существуют итерационные процедуры, обладающие более высокой сходимостью. Кроме того, при интегрировании уравнения (3.7) необходимо на каждой итерации гарантировать $\omega^{(n)} \neq 0$. К принципиальным достоинствам метода можно отнести то, что подынтегральная функция не обязательно аналитична, т. е. может иметь конечные скачки.

Однако выбор данного метода решения продиктован не этими достоинствами и недостатками, а возможностью дать при достаточной общности постановки задач наглядную и содержательную (графическую и аналитическую) интерпретацию полученных результатов. В первую очередь при интерпретации этих уравнений нас интересуют два аспекта: сходимость решения и влияние скоростной характеристики на динамику системы. В этом случае можно упростить задачу, назначив постоянным момент инерции $J = J_c$, а скоростную характеристику задать линейной функцией $M_{\omega} = a - k\omega$.

Сходимость позиционной задачи ($M = M_{\varphi} + M_{\omega_n}$). В этом случае уравнение (3.7) преобразуется к виду

$$\omega^{(n+1)} = \omega_n + \int_{\varphi_n}^{\varphi} \frac{M}{J\omega^{(n)}} d\varphi, \quad (3.10)$$

где $M = M_\varphi + M_{\omega_H}$; $J = J_c$; $\int_{\varphi_H}^{\varphi} M d\varphi = A$.

1-е приближение:

$$\frac{\omega^{(1)} - \omega_H}{\omega_H} = \frac{A}{J\omega_H^2}. \quad (3.10a)$$

Нетрудно увидеть, что эта формула соответствует приближенному решению уравнения (1.4) при $\Delta\omega = \omega - \omega_H \ll \omega$. Тогда, принимая $(\omega_{H6} + \omega_{HМ})/2 \approx \omega_H$, получаем

$$A = 0,5J(\omega^2 - \omega_H^2) \approx J\Delta\omega\omega_H.$$

2-е приближение:

$$\frac{\omega^{(2)} - \omega_H}{\omega_H} = \ln \left[1 + \frac{A}{J\omega_H^2} \right]. \quad (3.10б)$$

3-е приближение:

$$\frac{\omega^{(3)} - \omega_H}{\omega_H} = \frac{1}{e} [E_1(x) - E_1(1)], \quad (3.10в)$$

где $E_1(x)$ — интегральная показательная функция [14];

$$E_1(x) = \int \frac{e^x}{x} dx, \quad x = 1 + \ln \left[1 + \frac{A}{J\omega_H^2} \right].$$

Дальнейшие приближения не удастся представить в аналитической форме.

На рис. 3.6 дано сравнение полученных приближений в координатах $\left(\frac{A}{J\omega_H^2}; \frac{\omega - \omega_H}{\omega_H} \right)$. Видно, что 2-е приближение описывает

закон движения с достаточной точностью на значительном интервале изменения аргумента $(-0,3; +0,5)$. На интервале $(-0,15; +0,2)$ хорошую точность дает даже 1-е приближение. Очень важным, хотя и достаточно очевидным, является то, что в зависимостях угловой скорости и работы приведенного момента от положения звена приведения экстремумы совпадают.

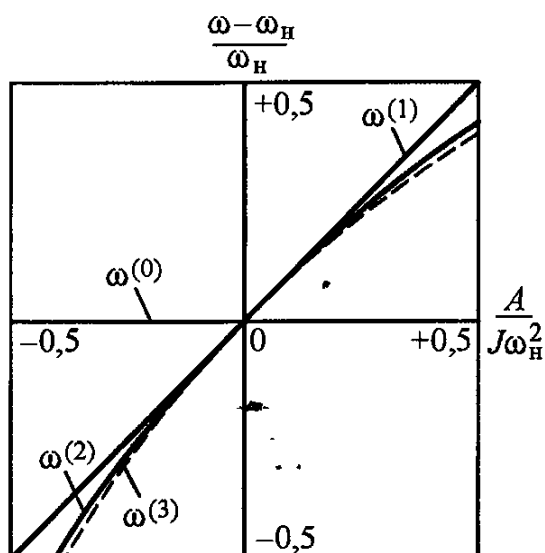


Рис. 3.6

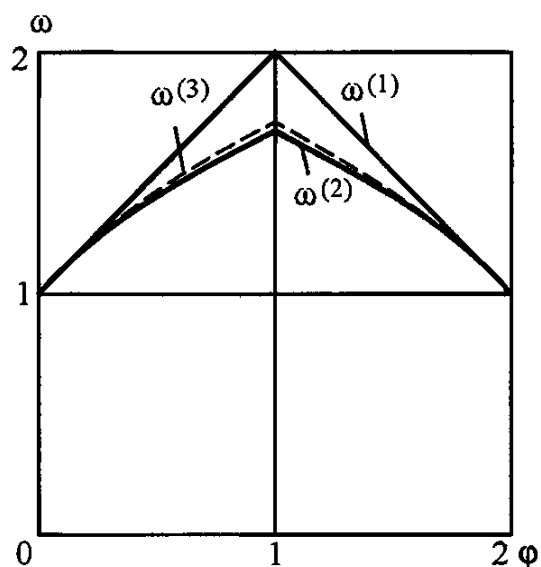


Рис. 3.7

На рис. 3.7 показаны три приближения для следующего примера: $M_\varphi = 0$; $\varphi = (0; 1)$; $M_\varphi = -2$; $\varphi = (1; 2)$; $M_{\omega_H} = 1$; $\omega_H = 1$; $J = 1$. Здесь $\frac{A}{J\omega_H^2} = 1$. Это позволяет утверждать, что сходимость решения

в этом случае будет медленнее, чем на интервале, рассмотренном на рис. 3.6. Однако даже для такого тяжелого примера можно говорить о том, что 2-е приближение уже дает результат, близкий к точному.

Влияние скоростной характеристики на движение системы. Сходимость автономной задачи ($M = M_\varphi + M_\omega$). В рассматриваемом случае уравнение (3.7) преобразуется к виду

$$\omega^{(n+1)} = \omega_H + \int_{\varphi_H}^{\varphi} \frac{M(\varphi) + M(\omega^{(n)})}{J\omega^{(n)}} d\varphi = \omega_H + \int_{\varphi_H}^{\varphi} \frac{M_\varphi + M_\omega(\omega^{(n)}(\varphi))}{J\omega^{(n)}} d\varphi. \quad (3.11)$$

Пусть скоростная характеристика имеет вид

$$M_\omega = a - k\omega. \quad (3.12)$$

Для $\omega = \omega_H$, $M_\omega = M_{\omega_H}$

$$\omega - \omega_H = \Delta\omega \quad \text{и} \quad M_\omega = M_{\omega_H} - k\Delta\omega. \quad (3.12a)$$

Тогда первые приближения этой и предыдущей задачи формально совпадают:

$$\frac{\omega^{(1)} - \omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{н}}} = \frac{A^{(0)}}{J\omega_{\text{н}}^2}, \quad (3.11a)$$

причем $A = A^{(0)}$. Однако между величинами A и $A^{(0)}$ имеется принципиальная разница. В первом случае вычисляется работа внешних сил позиционной системы, которая соответствует нулевому приближению работы внешних сил автономной системы, а работа внешних сил автономной системы может быть определена только после того, как будет с заданной точностью определена зависимость $M_{\omega}(\varphi)$.

2-е приближение имеет вид

$$\omega^{(2)} = \omega_{\text{н}} + \int_{\varphi} \frac{M_{\varphi} + M_{\omega}^{(1)}}{J\omega^{(1)}} d\varphi = \omega_{\text{н}} + \int_{\varphi} \frac{M_{\varphi}(\varphi) + M_{\omega_{\text{н}}} - k\Delta\omega^{(1)}}{J\omega^{(1)}} d\varphi.$$

Чтобы не запутаться в дальнейших вычислениях и сравнениях, присвоим нижний индекс φ позиционным системам и ω — автономным. Тогда 2-е приближение с учетом (3.12a) примет вид

$$\omega^{(2)} - \omega_{\text{н}} = \omega_{\text{н}} \ln[1 + A/(J\omega_{\text{н}}^2)] - \frac{k}{J} \int_{\varphi} \frac{A/(J\omega_{\text{н}}^2)}{1 + A/(J\omega_{\text{н}}^2)} d\varphi. \quad (3.11b)$$

Вот теперь и придется применить индексы φ и ω , чтобы понять разницу между движением позиционной и автономной систем:

$$\omega_{\omega}^{(2)} = \omega_{\varphi}^{(2)} - \frac{k}{J} \int_{\varphi} \frac{A/(J\omega_{\text{н}}^2)}{1 + A/(J\omega_{\text{н}}^2)} d\varphi. \quad (3.13)$$

Эта формула позволяет оценить влияние скоростной характеристики на движение системы. Во-первых, можно ожидать сглаживания экстремумов функции, поскольку именно в области, где ω достигает наибольших значений, возрастание второго слагаемого идет более интенсивно (все-таки интеграл). Во-вторых, можно ожидать большего сглаживания экстремумов с увеличением наклона характеристики.

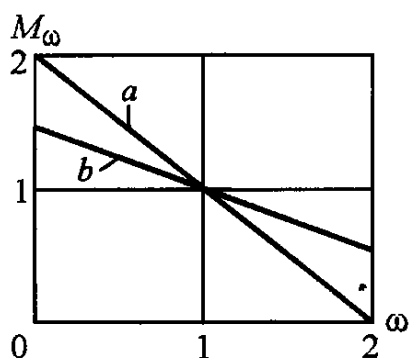


Рис. 3.8

Интерес представляет следующее: сходимость решения для зависимостей $\omega(\varphi)$ и $M_\omega(\varphi)$; сравнение вторых приближений закона движения позиционной и автономной систем; влияние наклона характеристики на зависимости $\omega(\varphi)$ и $M_\omega(\varphi)$.

Оценку сходимости проведем для случая $M_\omega(\omega) = 2 - \omega$ (рис. 3.8, прямая a). На рис. 3.9, a приведены четыре приближения зависимости $\omega(\varphi)$.

Преобразование зависимостей $\omega(\varphi)$ и $M_\omega(\omega)$ в $M_\omega(\varphi)$ допускает графическую интерпретацию, что и отражено на рис. 3.9, b . Очевидно, что наблюдается существенное расхождение между 1-м и 2-м приближениями. На 4-й итерации можно считать приближение близким к точному решению. Естественно, что эти рассуждения относятся к конкретному примеру. Таким образом, допустимо эффекты, связанные с формой скоростной характеристики, исследовать по 2-му приближению.

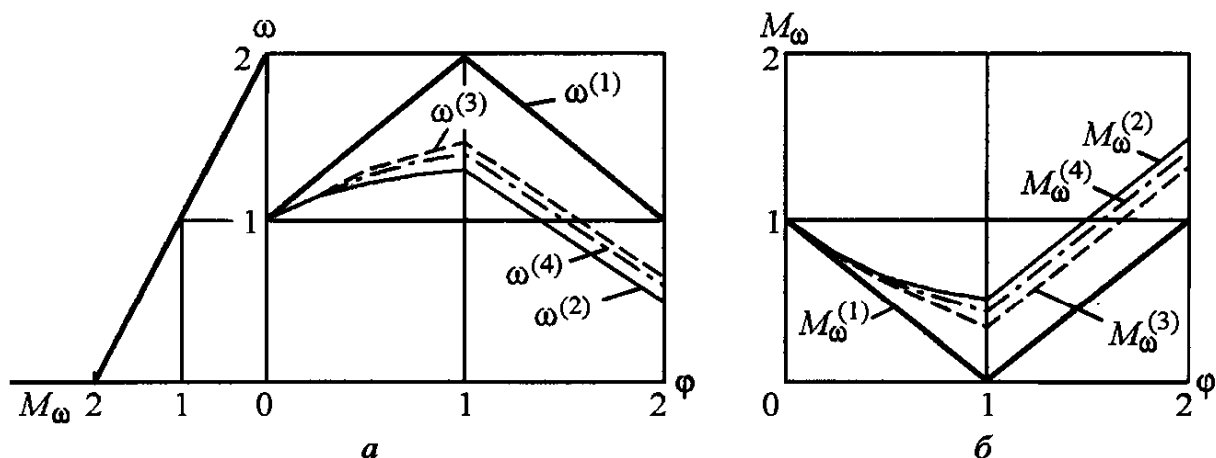


Рис. 3.9

Влияние наклона скоростной характеристики рассмотрим при сравнении результатов для характеристик $M_\omega(\omega) = 2 - \omega$ (см. рис. 3.8, прямая a) и $M_\omega(\omega) = 0,5(3 - \omega)$ (см. рис. 3.8, прямая b). В первом случае $k = 1$, во втором — $k = 0,5$. На рис. 3.10, a приведены вторые приближения законов движения для позиционной системы (кривая ω_φ), автономной системы при $k = 1$ (кривая ω_{01}), автономной системы при $k = 0,5$ (кривая ω_{02}). На рис. 3.10, b

приведены зависимости: $M_\omega(\varphi)$: $M_{\omega 1}$ для $k = 1$; $M_{\omega 2}$ для $k = 0,5$. Нетрудно увидеть, что чем меньше наклон характеристики (в случае позиционной системы можно считать $k = 0$), тем меньше сказывается ее влияние.

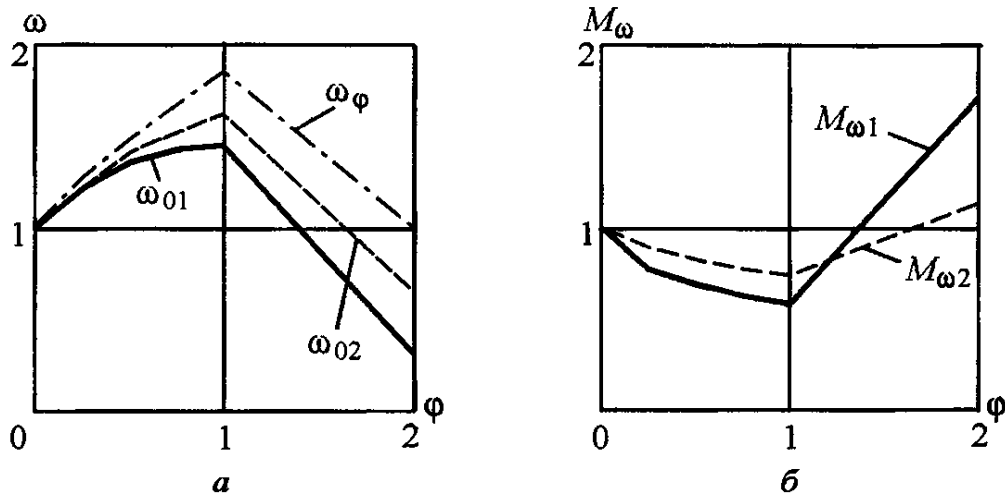


Рис. 3.10

Сходимость при вычислении ускорений. Приведенные ниже выкладки очень хорошо иллюстрируют опасности, связанные с методами последовательных приближений при использовании результатов для дальнейших вычислений.

Законы движения модели в форме $\omega = \omega^{(n)}(\varphi)$ уже при 1-м приближении могут дать приемлемые численные результаты (при $\omega \gg \Delta\omega$). Даже если численный результат требует уточнения (при большом изменении скорости на заданном интервале перемещения), качественная картина вполне отражает движение модели. Однако использование 1-го приближения для вычисления ускорения по очень удобной формуле (3.3) может оказаться, мягко говоря, неоправданным. Покажем это на рассматриваемом примере на интервале $\varphi = (0; 1)$.

Рассмотрим сходимость позиционной системы по ε .

Точное решение:

$$\varepsilon^T = M/J = 1.$$

1-е приближение:

$$\omega^{(1)} = \omega_n [1 + M\varphi / (J\omega^2)] = 1 + \varphi; \quad d\omega^{(1)} / d\varphi = 1; \quad \varepsilon^{(1)} = 1 + \varphi.$$

2-е приближение:

$$\omega^{(2)} = \omega_n \{1 + \ln[1 + M\varphi / (J\omega_n^2)]\} = 1 + \ln(1 + \varphi);$$

$$d\omega^{(2)} / d\varphi = [M / (J\omega_n^2)] / [1 + M\varphi / (J\omega_n^2)] = 1 / (1 + \varphi);$$

$$\varepsilon^{(2)} = [1 + \ln(1 + \varphi)] / (1 + \varphi).$$

На рис. 3.11 приведены результаты точного решения и вычислений по данным 1-го и 2-го приближений зависимостей $\omega(\varphi)$. Видно, что вычисления ε по данным 1-го приближения ω в принципе искажают качественные и количественные результаты. Однако уже 2-е приближение закона движения дает вполне подходящие результаты. Таким образом, если нас вполне удовлетворяет точность 1-го приближения закона движения в форме $\omega(\varphi)$ при малых перепадах скорости на заданном интервале перемещения, то при больших перепадах скорости нужно сделать хотя бы еще одну итерацию. Для определения ускорения нужно сделать по крайней мере на одну итерацию больше.

Рассмотрим сходимость по ε автономной системы. Исходным является уравнение

$$\varepsilon = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{M_\varphi + M_\omega}{J} = \frac{M_\varphi + (2 - \omega)}{J} = 2 - \omega.$$

Получить в явном виде зависимости $\omega(\varphi)$ и $\varepsilon(\varphi)$ из этого уравнения не удастся. Очевидным является только то, что при $t \rightarrow \infty$ $\omega \rightarrow 2$. Поэтому, учитывая гарантированную сходимость последовательных приближений, воспользуемся этим методом (вообще два первых приближения элементарно находятся в рассматриваемом примере аналитически). Тогда

$$\varepsilon^{(n+1)} = \omega^{(n+1)} D\omega^{(n+1)};$$

$$D\omega^{(n+1)} = d\omega^{(n+1)} / d\varphi = (M_\varphi + M_\omega^{(n)}) / (J_{\omega^{(n)}});$$

$$\omega^{(n+1)} = \omega_n + \int D\omega^{(n+1)} d\varphi.$$

Первые приближения зависимостей $\omega(\varphi)$ позиционной и автономной систем совпадают.

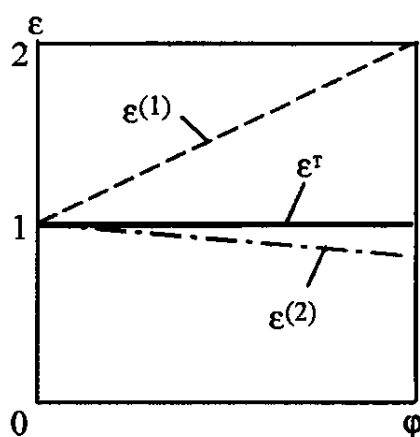


Рис. 3.11

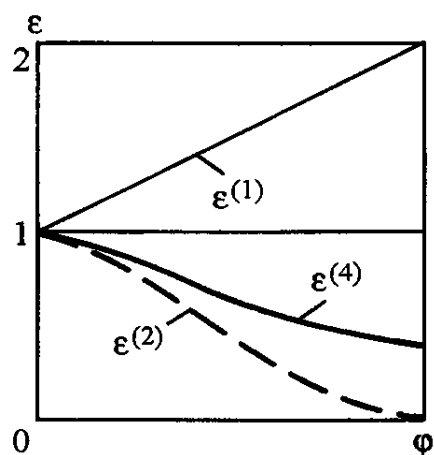


Рис. 3.12

На рис. 3.12 приведены результаты вычислений ε по данным 1–4-го приближений зависимостей $\omega(\varphi)$. Как и для позиционной системы, 1-е приближение дает искаженную качественную и количественную картину, 2-е приближение дает приемлемую качественную картину, а 4-е — хорошую количественную.

Безусловно, в случаях очень малых изменений скорости приемлемые результаты может дать и 1-е приближение. Однако думается, что алгоритмизация общей задачи проще алгоритмизации одного приближения.

Для иллюстрации изложенных методов были подобраны примеры, удобные для графической интерпретации и численной проверки. Подбор количественных соотношений исходных данных имел целью затруднить сходимость приближенных методов. Поэтому полученные результаты позволяют предполагать, что в других, менее тяжелых, случаях сходимость итерационной процедуры для $\omega(\varphi)$ и $\varepsilon(\varphi)$ гарантирована.

О пользе v_n . В главе 4 нам придется подробно разбирать задачи циклового и нециклового движения. Однако уже по результатам анализа можно сказать об одном полезном свойстве цикловых механизмов. Это свойство вытекает из наличия начальной скорости v_n , а значит, и T_n . На рис. 3.13 приведен пример, позволяющий сравнить движение нециклового механизма с $T_n = 0$ или небольшим значением T_n и движение циклового механизма с достаточным значением T_n . Можно утверждать, что начальный запас кинетической энергии позволяет динамической системе избежать попадания в потенциальную яму внутри интервала перемещения.

3.3. Некоторые принципы регулирования движения механизмов

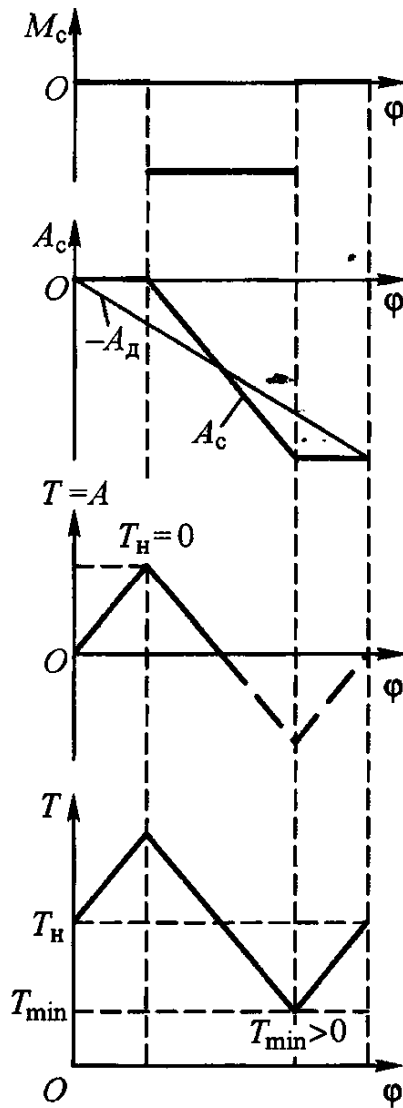


Рис. 3.13

На основании проведенного в § 3.1, 3.2 анализа можно не только судить о поведении нерегулируемой механической системы, но и сделать ряд выводов о возможных подходах к регулированию движения (управлению движением). Полученные результаты объединены в табл. 3.1.

Регулирование движения или управление движением динамической модели может осуществляться следующим образом:

- а) движущей силой;
- б) регулированием скорости;
- в) протяженностью участка нагружения;
- г) расположением участка нагружения внутри полного хода точки (звена) приведения;
- д) начальным уровнем энергии системы;
- е) допустимым перепадом скорости (энергии).

Рассмотрим последовательно все упомянутые варианты, учитывая три аспекта реализации каждого из них — принципиальный (теоретический), технически осуществимый, рациональный. Можно сразу сказать, что в принципе почти всегда, если очень постараться, не пожалеть денег, заодно пренебречь качеством регулирования, любой из перечисленных вариантов осуществим.

А стоит ли такая игра свеч?

Следует подумать о цене того или иного способа регулирования: затратах на техническое осуществление, надежности отработки управления, сложности эксплуатации и т. д., то есть о многом, выходящем за рамки задач классической теории механизмов, но входящем в круг вопросов проектирования машины.

Таблица 3.1

Результат управления	Параметры управления			
	$m \uparrow$	$F_d \uparrow$	$v_H \uparrow$	$(S_p] \rightarrow (H]$
v	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
t	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Δv	Не рассмотрено	Не рассмотрено	$\downarrow$	Не рассмотрено
$(F_d)_{\text{нм}}$	—	—	—	$\downarrow$

Управление движением силой $F_d(s)$. Для электромеханического привода, по всей видимости, возможно плавное отслеживание зависимости $F_d(s)$. Для гидромеханической системы это вряд ли целесообразно. Здесь более уместным выглядит ступенчатое изменение движущей силы. Анализ движения системы при силе $F_d = \text{const}$ приведен на рис. 3.1.

Возможный вариант приложения движущей силы $F(s)$ к системе с теми же массой m , силой сопротивления $F_c(s)$ и начальным значением кинетической энергии T_H показан на рис. 3.14. Предлагается ступенчатое изменение движущей силы: $\{F_d = F_{d1}; s = (0; \hat{s})\}; \{F_d = F_{d2}; s = (\hat{s}; H)\}$. Этой модели соответствует гидромеханическая система с двумя аккумуляторами большого объема, изображенная на рис. 3.15. Изменение движущей силы осуществляется переключением клапана (в данный момент времени движущая сила создается давлением p_1). Нетрудно увидеть, что возможны различные варианты управления движением по этой схеме. На рис. 3.16 предложены два варианта такого регулирования, объединенные следующими общими свойствами:

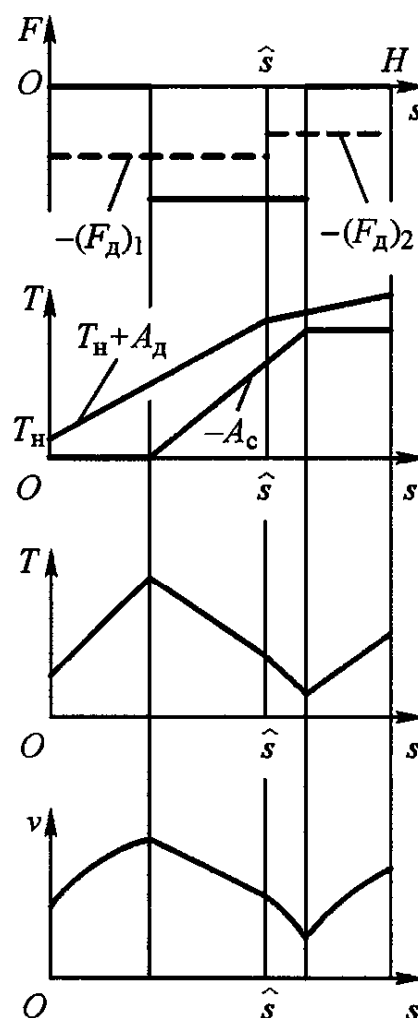


Рис. 3.14

$$T_{н1} = T_{н2}; \quad T_{к1} = T_{к2}; \quad \int_H A_{д1} ds = \int_H A_{д2} ds.$$

Их анализ показывает, что такие показатели, как операционное время и средняя по времени мощность, для обоих вариантов равны, и по этим показателям нельзя отдать предпочтение какому-либо из вариантов. Значит, в данном случае обсуждение вопроса об оптимальном управлении выходит за рамки механики.

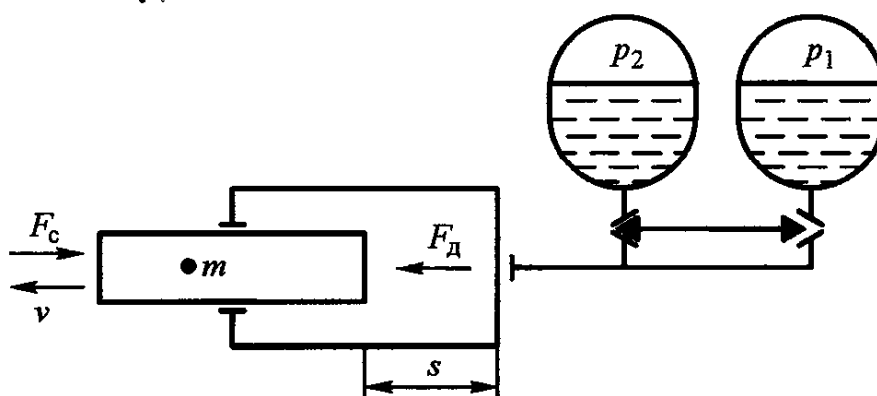


Рис. 3.15

Регулирование плавным изменением давления в гидросистеме сопряжено с огромными техническими трудностями, требует большой культуры изготовления и эксплуатации и в большинстве технических систем не применяется. Ступенчатое регулирование давления технически достаточно легко осуществить как с помощью гидроаппаратуры, так и созданием противодействия в гидроцилиндре. Однако в этом случае технически нецелесообразно назначать большое число переключений давления: здесь отчетливо просматривается задача о назначении рационального числа переключений движущей силы. Можно предположить, что таких переключений не должно быть больше двух-четырех. Назначение, выбор или определение зависимости $F_d(s)$ относятся к задачам динамического синтеза и будут рассмотрены в гл. 4.

Регулирование скорости. Методы регулирования подачи (расхода) Q или скорости $v(s)$ относятся к компетенции соответствующей дисциплины. В этом случае для заданных силы сопротивления $F_c(s)$ и закона движения $v(s)$ из (2.5) ищется движущая сила

$$F_d(s) = ma - F_c(s), \text{ где } a = v \frac{dv(s)}{ds},$$

которая далее может быть преобразована к виду $F_d(v)$ или $p(Q)$.

Электромеханическим аналогом зависимостей $F_d(v)$ или $p(Q)$ являются статические характеристики электродвигателей, в том числе асинхронных.

Протяженность участка нагружения. Увеличение или уменьшение протяженности нагружения возможно только при изменении схемы механизма или технологического процесса (см. § 3.1). Методы, позволяющие это осуществить, относятся к синтезу механизмов и этапу формирования условий проектирования механизмов машины.

Расположение участка нагружения внутри полного хода точки (звена) привода. На этот вопрос достаточно красноречиво отвечает рис. 3.3 (см. § 3.1): если есть возможность сместить $(F_c)_{\text{нб}}$ к концу хода, имеет смысл это сделать. Кроме того, очевидна и другая выгода — большая определенность при назначении управления силой $F(s)$. Это хорошо видно, если сместить силу сопротивления на рис. 3.14 вправо — к концу хода.

Начальный уровень энергии системы. В случае аккумуляторного привода начальный уровень энергии характеризуется потенциальной энергией аккумулятора

$$T_{\text{пот}}^{\text{н}} = (p_{\text{ак}})_{\text{н}} (W_{\text{ак}})_{\text{н}},$$

где $W_{\text{ак}}$ — объем сжатого газа в аккумуляторе.

В случае маховичного привода начальный уровень энергии характеризуется кинетической энергией вращающихся масс

$$T_{\text{н}} = J\omega_{\text{н}}^2 / 2,$$

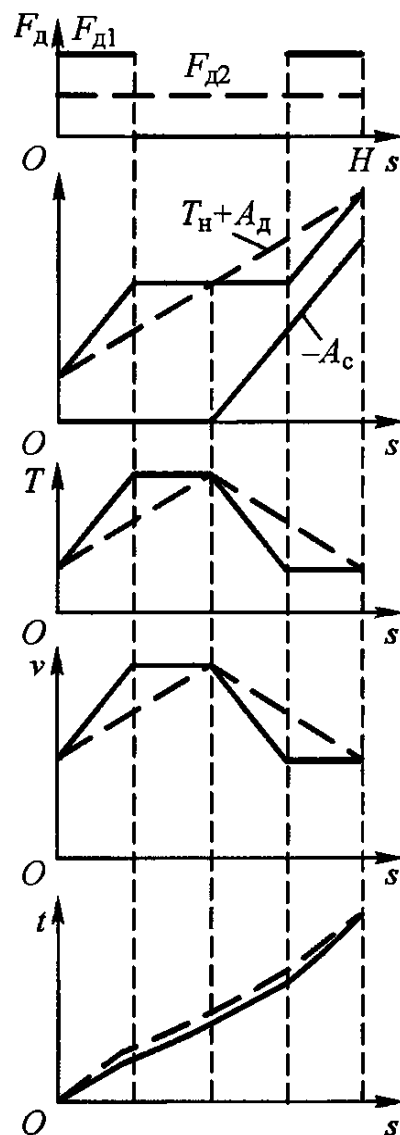


Рис. 3.16

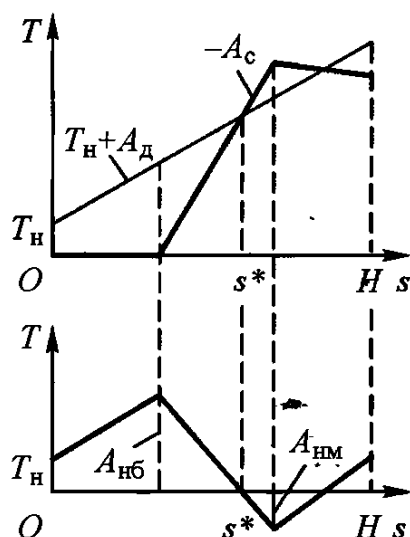


Рис. 3.17

причем в состав момента инерции вращающихся масс значительной долей входит момент инерции большой вращающейся массы — маховика.

Начальный уровень энергии характеризует также начальная скорость системы v_H (см. рис. 3.2, в, табл. 3.1), причем чем выше скорость (энергия), тем меньше перепад между наименьшей и наибольшей скоростью системы.

Из рис. 3.1, 3.3, 3.5, 3.14 ясно видно, что чем выше начальное значение энергии, тем меньше движущая сила.

Из приведенных рассуждений следует, что имеется прямая аналогия между гидравлическим аккумулятором и вращающейся массой: в обоих случаях мы имеем дело с аккумуляторами механической энергии, а в более общем случае — с аккумуляторами энергии. В случае пневмопривода роль аккумулятора выполняет баллон со сжатым газом (ресивер). Очень важную роль начальный уровень энергии играет в случаях, когда участок нагружения расположен внутри полного хода точки (звена) приведения (рис. 3.17). Формально работа движущих сил обеспечивает на заданном перемещении преодоление работы сил сопротивления. Однако если не будет обеспечен начальный уровень энергии $T_H > A_{нм}$, движение прекратится в точке s^* . Возможно, этим объясняется конкурентоспособность кривошипных прессов по сравнению со значительно более дешевыми гидравлическими прессами, особенно для таких операций, как вытяжка и разделительные операции, у которых максимум силы смещен относительно крайнего положения.

Допустимый перепад скорости $\Delta v_{нб}$. Этот показатель определяется возможностями тех или иных типов приводов и входит в круг рассматриваемых нами вопросов в форме справочных данных. Однако и здесь можно отметить два свойства: во-первых, чем выше начальная скорость, тем меньше ее полный перепад за ход или цикл; во-вторых, на величину $\Delta v_{нб}$ оказывает существенное влияние масса (момент инерции) системы: чем больше $m(J)$, тем меньше $\Delta v_{нб}$ ($\Delta \omega_{нб}$).

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ

О режимах работы машины: *цикловое и нецикловое движение; две краевые задачи циклового движения; об обеспечении сходимости решения. Нецикловое движение. Перемещение на заданное расстояние без ограничения на время операции (задача со свободным конечным временем): задачи с $t = \text{const}$; влияние $v_n \neq 0$ и $v_k \neq 0$; учет $m = m(s)$. Перемещение на заданное расстояние за заданное время (обеспечение заданного быстродействия механизма). О достоверности результатов. Цикловое движение. Общие положения итерационных методов решения краевых задач циклового движения. Численное решение на основе энергетической формы уравнения движения: *позиционная система; особенности расчета автономной системы. Влияние скоростной характеристики на движение механизма: движение позиционной и автономной систем при $J = J_c$.**

В этой главе рассмотрены четыре задачи динамического синтеза — управления движением — краевые задачи динамики системы с одной степенью свободы. Это достаточно важные, но далеко не единственные задачи синтеза. В литературе и практике можно найти массу иных задач. При желании можно стать автором какой-либо новой. Для этого достаточно взять известную задачу и добавить в исходные данные какое-либо условие, критерий или ограничение. Однако изложенные здесь задачи и подходы к решению позволят решить любую иную задачу этого класса.

Изложение ведется на двух уровнях. Первый уровень — постановка задач для численного решения. На этом уровне возможно решение любой задачи с заданной точностью.

Чрезвычайно опасным является прямое переложение графоаналитических, всегда приближенных методов на язык ЭВМ. Помните, что переложение графоаналитических приближен-

ных методов расчета в численные связано с вопросами сходимости. Именно тогда всплывают все нечетко обоснованные допущения. Результат — отсутствие сходимости решения.

Второй уровень — аналитические и графоаналитические методы. Их цель не в том, чтобы обязательно дать какое-либо решение в виде графиков или чисел, а в том, чтобы показать возможные эффекты, сопровождающие движение динамической модели. Соответственно, к постановке задачи и допущениям, принимаемым в ходе решения, предъявляют менее жесткие требования. Учитывая, что сложные задачи практически не поддаются аналитическим методам, рассматривают упрощенные задачи.

Здесь из принципиальных соображений не приведены оптимизационные задачи динамического синтеза, хотя по крайней мере в двух задачах из четырех они так и рвутся на страницы книги. Однако читатель может их поставить и решить самостоятельно на основе изложенного материала.

4.1. О режимах работы машины

По всей видимости, задачи, в которых требуется точное (программное) отслеживание закона движения, встречаются чрезвычайно редко. Обычно нужно выполнить в процессе движения ряд условий, часть которых входит в граничные (краевые). Чтобы сформулировать спектр типовых задач управления движением, рассмотрим обобщенный закон движения некоторого машинного агрегата (рис. 4.1, *а*): разгон, цикловое (частный случай — установившееся) движение, торможение или выбег.

Для удобства под *цикловым движением* будем подразумевать вращательное периодическое движение звена (точки) приведения с заданным временем цикла T . В принципе, к вращательному движению динамической модели можно привести движение любого механизма. Это еще один пример *pons asinorum* в теории механизмов — обычно (и это, как правило, удобно) движение динамической модели отождествляют с движением одного из звеньев механизма. Тем не менее надо помнить, что отождествлять движение динамической модели и движение какого-либо звена механизма нельзя: эти понятия относятся к различным категориям. Например, в механизме, изображенном на рис. 4.2, *а*, нет ни одного звена, со-

вершающего вращательное движение, но есть положения, в которых скорости звеньев 1 и 3 равны нулю. Здесь удобно в качестве звена приведения рассматривать вращательное звено (рис. 4.2, б): в этом случае возможная угловая скорость $\omega_n \neq 0$. Соответственно, передаточные функции точек и звеньев этого механизма всегда имеют только конечные значения и нигде не достигают **бесконечности** (нет деления на нуль), что очень удобно в любых вычислениях.

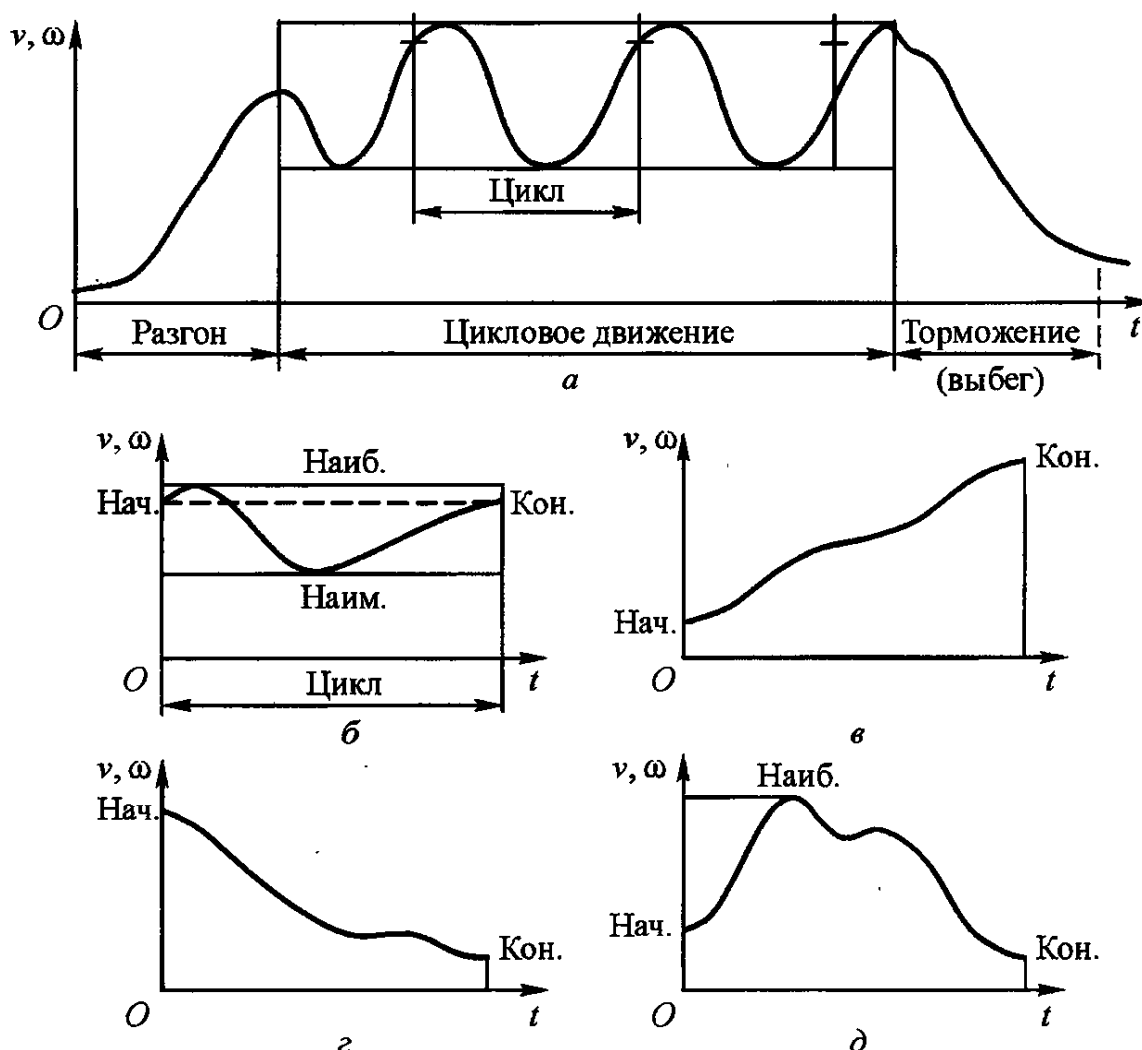


Рис. 4.1

Привычная, представленная во всех учебниках динамическая модель с вращательным звеном приведения может оказаться неудобной. Например, для привода-гидроцилиндра более удобной может быть динамическая модель в виде, приведенном на рис. 1.4, б, в: материальная точка, движущаяся по криволинейной или прямолинейной

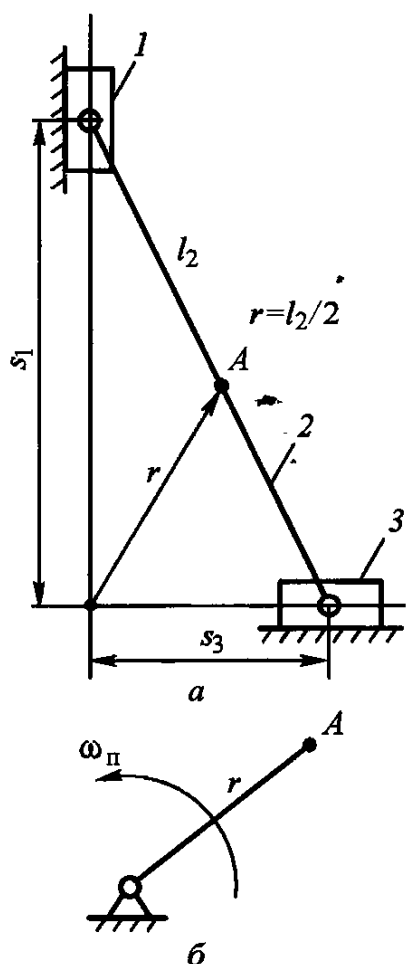


Рис. 4.2

траектории. Отметим, что для механизма, не имеющего в своем составе вращательных звеньев, может оказаться удобной динамическая модель с вращательным звеном. Таким образом, думать надо, выбирая динамическую модель.

В общем случае (см. рис. 4.1, а) выполнение всех возможных требований ко всем режимам работы одновременно, по всей видимости, невозможно, а иногда нерационально. Поэтому при проектировании выделяют режимы, которые можно назвать определяющими. Требования к ним должны быть обязательно выполнены. Для остальных режимов ищут компромиссные решения (на уровне управления движением, времени прохождения опасной зоны режима, каких-либо вспомогательных конструктивных решений и т. п.).

Например, пресс-автомат работает в режиме непрерывных ходов (установившийся режим работы — рис. 4.1, б) часами. Этот режим можно назвать опреде-

ляющим. Разгон и выбег длятся секунды. Увеличение времени разгона и выбега практически не сказывается на производительности автомата, но может улучшить динамические характеристики на этих этапах работы. Однако для судна определяющими могут оказаться именно режимы разгона и торможения (отваливание от причала и причаливание — рис. 4.1, в, г) как наиболее энергоемкие.

Задачи нециклового движения: разгон (см. рис. 4.1, в), торможение (см. рис. 4.1, г), общий случай (рис. 4.1, д). В частном случае разгон относится к начальным задачам: известны начальные условия (положение и скорость в начальный момент времени) при заданных нагрузках и массе (моменте инерции). Если на условия проведения разгона наложены ограничения (например, на наибольшее значение ускорения), задача переходит в разряд краевых (см. § 1.3). Задача о торможении (кроме задачи о выбеге) относится к краевым. Выбег — типичная начальная задача, ее

целью является определение времени движения, за которое точка (звено) приведения достигнет с заданной точностью скорости, равной нулю. Общий случай неустановившегося движения, естественно, относится к категории краевых задач.

В случае циклового движения (см. рис. 4.1, б) мы имеем дело фактически с двумя краевыми задачами.

Первая краевая задача — обеспечение периодичности движения. Это выполняется, если $\omega_n = \omega_k$, т. е. сумма работ движущих сил и сил сопротивления за цикл равны нулю. Если один из моментов зависит от положения, а другой — от скорости, то удобно в качестве нулевого приближения взять среднее по циклу значение последнего (рис. 4.3, а):

$$M_{\omega_{\text{ср}}} = \frac{A_{\omega_{\text{ц}}}}{\varphi_{\text{ц}}} = -\frac{A_{\varphi_{\text{ц}}}}{\varphi_{\text{ц}}} = \frac{\int M_{\omega}[\omega(\varphi)]d\varphi}{\varphi_{\text{ц}}}. \quad (4.1)$$

Движение звена приведения может быть связано с ограничениями на верхнее и нижнее значение скорости, которые определяются особенностями работы привода или иными причинами, например предельным значением центробежного ускорения обода маховика. С выполнением этих ограничений связана **вторая краевая задача**. Она сводится к определению параметра уравнения движения, обеспечивающего выполнение этих условий. Этим параметром является J_c (рис. 4.3, б).

Следует указать на еще одну особенность, связанную с периодичностью циклового движения: заданы период T , верхний и нижний пределы колебаний скорости $\omega_{\text{нб}}$ и $\omega_{\text{нм}}$, но не определены начальные условия (начальные положение φ_n и скорость ω_n)!!! Соответственно, неизвестно и конечное значение скорости. Таким образом, краевые условия недоопределены. Поэтому, а также исходя из ус-

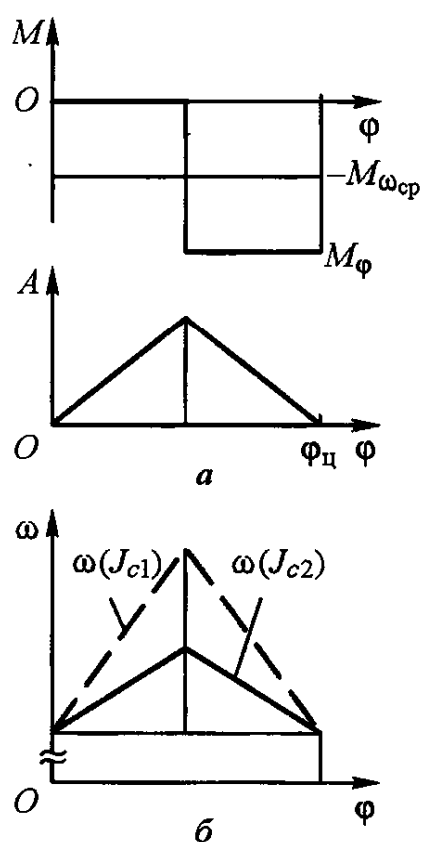


Рис. 4.3

ловия периодичности, можно, приступая к решению задачи, произвольно выбирать начальную точку отсчета. Однако далее мы жестко «привязываемся» к этой точке и любые отступления или недопустимы, или должны очень четко обосновываться.

Здесь следует отметить, что, с одной стороны, значению $M_{\omega_{\text{ср}}}$ соответствует известное значение средней угловой скорости звена приведения

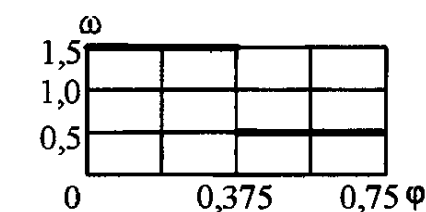
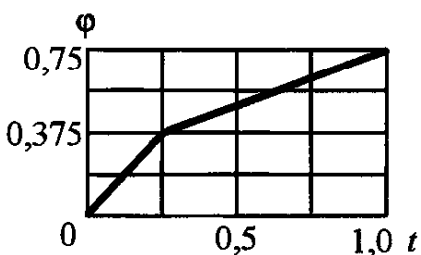
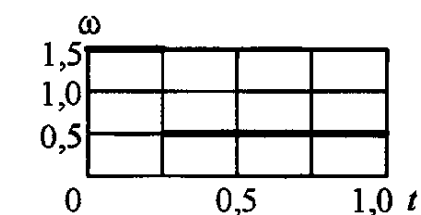
$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\varphi_{\text{ц}}}{T}.$$

С другой стороны,

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\int \omega(t) dt}{T}, \quad (4.2)$$

причем сам закон движения $\omega(t)$ является искомым.

На различную механическую природу $M_{\omega_{\text{ср}}}$ и $\omega_{\text{ср}}$ следует обратить особое внимание, поскольку именно это может приводить к вычислительным казусам. Одной из ошибок является осреднение угловой скорости по длине цикла $\varphi_{\text{ц}}$:



$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\int \omega(\varphi) d\varphi}{\varphi_{\text{ц}}} \quad ??!! \quad = \quad \frac{\omega_{\text{нб}} + \omega_{\text{нм}}}{2}. \quad (4.3)$$

Опасность такого осреднения иллюстрируется примером, приведенным на рис. 4.4. По формуле (4.3) мы получаем два различных результата: среднее интегральное $\omega_{\text{ср}} = 0,75$, а среднее арифметическое $\omega_{\text{ср}} = 1$.

Для циклового движения причиной отсутствия сходимости является замена $\omega_{\text{н}}$ на $\omega_{\text{ср}}$ и определение $\omega_{\text{ср}}$ по формуле (4.3) вместо (4.2).

Работа с формулами (4.3) оправдана в случаях малых колебаний скорости и M_{ω} при решении задачи графоаналитическими методами:

Рис. 4.4

$$\begin{aligned}\omega_{\text{нб}} - \omega_{\text{нм}} &= \Delta\omega_{\text{нб}}; \Delta\omega \ll \omega_{\text{ср}}; \\ M_{\omega}[\omega(\varphi)] &= M_{\omega_{\text{ср}}} + \Delta M; \Delta M_{\text{нб}} \ll M_{\omega_{\text{ср}}}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

При решении задач численными методами выполнения условий (4.4) достаточно только для 1-го приближения. Именно этот частный случай циклового движения в литературе называется установившимся режимом работы.

Учитывая, что применение численных методов позволяет нам обходиться без указанных допущений, в дальнейшем будем пользоваться только термином **цикловое** движение.

4.2. Нецикловое движение

Типичный закон нециклового движения показан на рис. 4.1, *д*, его варианты — на рис. 4.1, *в*, *з*. Попробуем представить возможные задачи синтеза нециклового движения и сформулировать свои представления о **хорошем** характере изменения внешних сил и скорости перемещения движущегося объекта — точки или звена приведения. Сразу же можно предложить по крайней мере две задачи. Первая — перемещение точки на заданное расстояние с минимальной затратой мощности, вторая — перемещение точки на заданное расстояние за заданное время. По всей видимости, на этой основе можно любую более сложную задачу нециклового движения представить как совокупность рассмотренных задач со своими начальными и краевыми условиями, дополненных условиями связи между ними*. В качестве условий связи могут быть приняты, например, условия непрерывности производных закона движения на границах между отрезками перемещений.

Можно говорить о двух типах управляющих воздействий — непрерывном (кусочно-непрерывном) и дискретном. Их выбор определяется конкретной постановкой технической задачи.

* Это вполне в духе 13-го правила Декарта («Правила для руководства ума»): «Освободите вопрос от всех излишних представлений и сведите его к простейшим элементам». Или («Рассуждение о методе»): «Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей, на сколько сможете и на сколько это потребуется вам, чтобы их легко было решить».

Примером непрерывного управления является регулирование скорости объекта управления, например регулирование подачи (расхода) гидропривода. Примером дискретного управления является ступенчатое изменение движущей силы в аккумуляторном приводе.

Какие минимальные требования хотелось бы предъявить к системе управления? Сразу оговорим, что здесь не рассматривается динамика колебательных систем. Поэтому из поля зрения выпадают такие задачи, как задача о трогании с места большой массы или системы упругосвязанных масс, т. е. те задачи, которые наилучшим образом решаются именно при применении осциллятора в качестве источника возмущающей силы.

Будем считать, что критерием качества управления является способность динамической системы реагировать на изменение условий движения (например, силы сопротивления) минимальным числом управляющих воздействий. В частности, предпочтение будем отдавать разумно минимальному числу переключений движущей силы или регулированию скорости по «хорошим» законам — с минимальным числом изменений знаков производных закона движения. Смягчение этих требований, безусловно, возможно, но определяется не нами, а заказчиком, обладающим всем объемом технической, экономической и коммерческой информации о проектируемом объекте. Другой причиной смягчения этих требований является возможность предоставить заказчику спектр конкурирующих решений для их последующей оценки и выбора наиболее подходящего.

Самым сложным для читателя, по-видимому, является то, что здесь предлагается некоторая канва — **минимальный перечень правил** для формулирования требований к системе управления движением. Соответственно, в предлагаемых задачах требуется на этой основе **самому принимать решения** при выборе типа и меры управляющих воздействий. При этом ожидается, что данный выбор будет близок к оптимальному. Думается, что это особенно полезно перед освоением теории (оптимального) управления. Во всяком случае, при математизации и алгоритмизации задачи уже невозможно будет обращаться к ЭВМ с требованием «сделай то, не знаю что, но получше».

4.2.1. Перемещение на заданное расстояние без ограничения на время операции (задача со свободным конечным временем)

Это, по всей видимости, самая простая из предлагаемых к рассмотрению задач. К типовым задачам такого рода можно отнести погрузочно-разгрузочные работы, движение траверсы гидропресса и тому подобные операции, в которых требуется преодолеть значительные силы сопротивления с минимальными затратами мощности. Время операции здесь роли не играет. В пределе оно равно бесконечности. Однако если начальное и (или) конечное значение скорости не равно нулю, время операции уже будет конечным. Задача может считаться решенной, если удастся найти зависимости $T(s)$ или, что то же самое, $v(s)$.

Фактически задача сводится к определению области существования $T(s) > 0$ при некоторых наложенных на нее ограничениях. Мы имеем дело с вариационной задачей (задачей оптимального управления) **со свободным конечным временем** [14]. Это достигается минимизацией скорости перемещения материальной точки или, что то же самое, достижением наибольшего операционного времени t_0 . Тогда (1.11) можно переписать в форме

$$t_0 = t(H) = \max_H \int \frac{ds}{v(s)}, \quad (4.5)$$

где $\frac{1}{v(s)} \rightarrow \min$ — варьируемый закон движения (фазовая характеристика точки).

В этом случае необходимо минимизировать функционал

$$U(s) = \int_s A ds = \int_s (A_d + A_c) ds, \quad (4.6)$$

а фактически — отыскать зависимость $\delta(s) > 0$, минимизирующую отклонение $A_d(s)$ от $-A_c(s)$.

Форма $\delta(s)$ зависит от конкретной технической задачи. Например, для гидромеханических систем она зависит от типа гидропривода (насосный или аккумуляторный), возможностей регулирования его параметров (подачи и давления), возможностей системы

управления (число и скорость переключений за операцию), конструктивных особенностей системы и т. д.

Задачи с $m = \text{const}$. Чтобы не отягощать выкладки второстепенными деталями, рассмотрим прямолинейное движение материальной точки с постоянной приведенной массой. Заданная сила сопротивления и искомая движущая являются функциями положения точки. Известны начальная и конечная скорости. Можно считать заданной движущую силу в начальный момент времени — при переходе системы (точки) из покоя в движение и в конечный момент движения. Тогда исходными являются уравнения

$$\frac{dT}{ds} = ma = mv(s) \frac{dv}{ds} = F_d + F_c \quad (4.7)$$

или

$$T = T_n + \int_s (F_d + F_c) ds = T_n + A_d + A_c \geq 0. \quad (4.8)$$

Итак, известны полное перемещение точки H , зависимости

$$F_c(s); \quad A_c = \int F_c ds; \quad F_{d,n} = -F_{c,n} + \Delta F$$

и граничные условия: $v = v_n$ при $s = 0$ и $v = v_k$ при $s = H$ (т. е. T_n и T_k).

С помощью уравнений (4.7) и (4.8) дополним указанные граничные условия:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{ds} \right)_n &= (F_d + F_c)_n = \Delta F; \\ \left(\frac{dA_c}{ds} \right)_n &= F_{c,n}; \quad \left(\frac{dA_d}{ds} \right)_n = F_{d,n}; \\ \left(\frac{dv}{ds} \right)_n &= \frac{(F_d + F_c)_n}{mv_n} = \frac{\Delta F}{mv_n}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Еще немного упростим себе жизнь: рассмотрим случай $v_n = v_k = 0$. Общий случай проанализируем позже. Тогда $\left(\frac{dv}{ds} \right)_n = \infty$.

Кроме того, так как $v_k = 0$, получаем $\left(\frac{dv}{ds} \right)_k = \infty$.

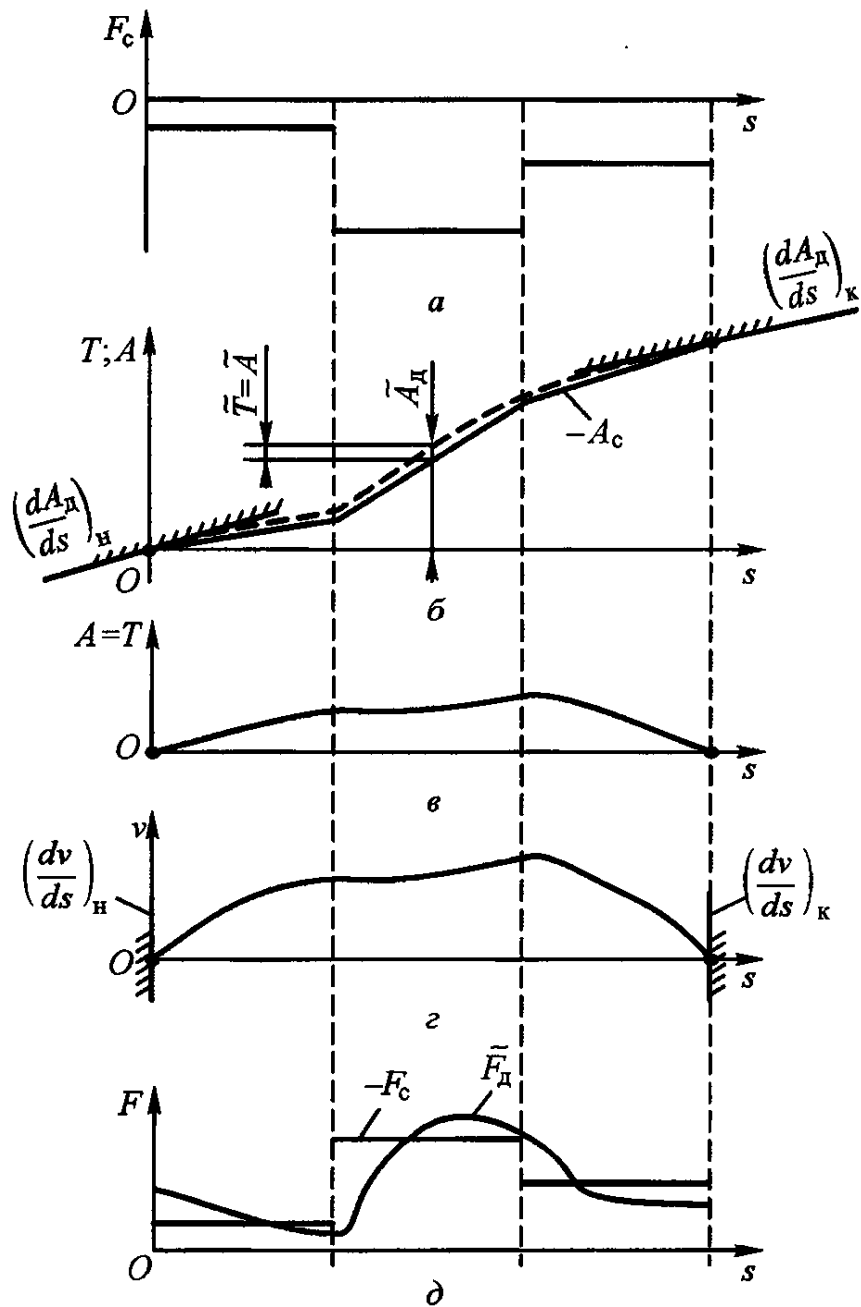


Рис. 4.5

Первые шаги решения строго формализованы. Сначала по зависимости $F_c(s)$ строим $A_c(s)$ и проводим через начало координат линию $\left(\frac{dA_d}{ds}\right)_H$ (рис. 4.5, а, б). Но уже следующий шаг — проведение границы $\left(\frac{dA_d}{ds}\right)_K$ — связан с конкретными техническими условиями решения задачи. Поэтому единственным определенным

условием является $A_d > |A_c|$ (это становится необязательным при v_n и $v_k > 0$ на всем интервале s , кроме $s = 0$ и $s = H$). Далее по тем или иным соображениям может быть предложена зависимость $A_d(s)$, затем вычислена функция $T = A(s)$ и первые приближения возможных управляющих воздействий $v(s)$ и $\tilde{F}_d(s)$ (рис. 4.5, в, з, д).

Теперь приложим полученные результаты к конкретным техническим примерам.

Пример 1. Перемещение плунжера гидроцилиндра обеспечивается за счет регулировки подачи жидкости, например насосом с регулируемой подачей (рис. 4.6).

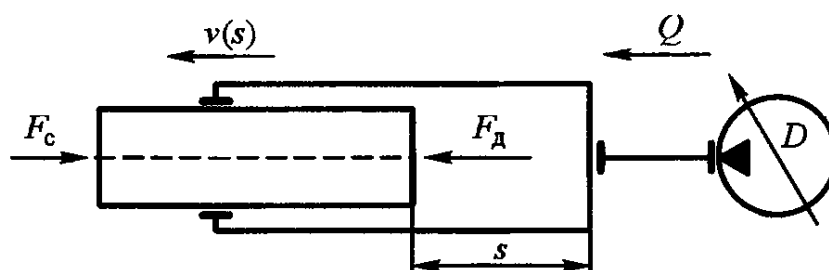


Рис. 4.6

В этом случае управление движением осуществляется регулировкой подачи насоса, а движущая сила является откликом на силы сопротивления и инерции. Полученные результаты согласовываются с возможностями гидропривода и соответствующим образом корректируются.

Пример 2. Перемещение плунжера гидроцилиндра обеспечивается от трех аккумуляторов, развивающих в гидроцилиндре силы F_{d1} , F_{d2} , F_{d3} , которые и предстоит определить в процессе решения (рис. 4.7, а).

Теперь управление движением осуществляется этими силами, а подача жидкости в цилиндр является откликом на силы сопротивления и инерции. В этом случае полученная зависимость $\tilde{F}_d(s)$ аппроксимируется силами $\hat{F}_{d1}$, $\hat{F}_{d2}$, $\hat{F}_{d3}$ (рис. 4.7, б) согласно условию

$$\int_H \tilde{F}_d(s) ds = \int_H \hat{F}_d(s) ds. \quad (4.10)$$

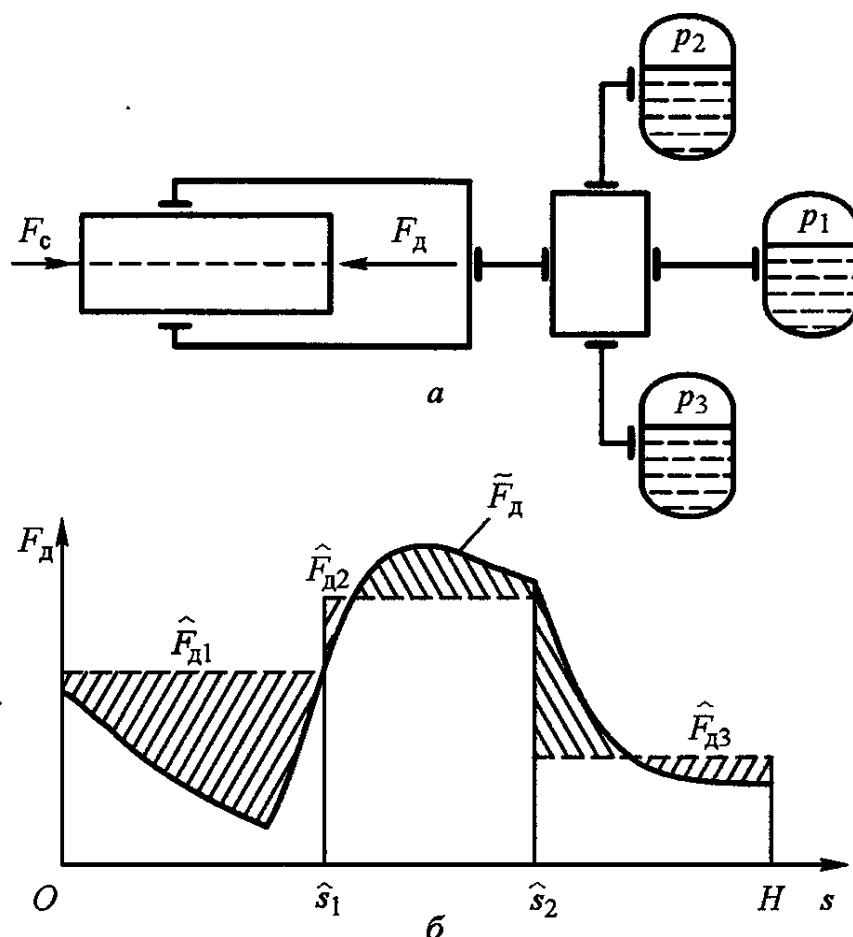


Рис. 4.7

*Пример 3**. Подвижная траверса гидропресса перемещается тремя плунжерами гидроцилиндров, в которые в некоторой последовательности подается жидкость высокого давления от гидроаккумулятора (рис. 4.8, а).

Крайние плунжеры имеют равные площади и соответственно развивают одинаковые движущие силы. График сил сопротивления представлен на рис. 4.8, б. Требуется определить соотношение движущих сил и последовательность соединения цилиндров с источником давления.

Ход решения аналогичен предыдущей задаче. Отличие в принципах создания движущей силы обусловлено иным конструкторским решением. Естественно, наибольшая сила развивается всеми тремя цилиндрами, наименьшая — одним центральным или двумя

* Задачи оптимального управления процессами решались задолго до создания теории оптимального управления. В частности, данная задача в полном объеме была решена М.В. Сторожевым в 1932 г. для расчета гидравлических прессов.

крайними. Обычно цилиндры подключают к аккумулятору в следующем порядке: $F_{д1} - 2F_{д2} - (F_{д1} + 2F_{д2})$.

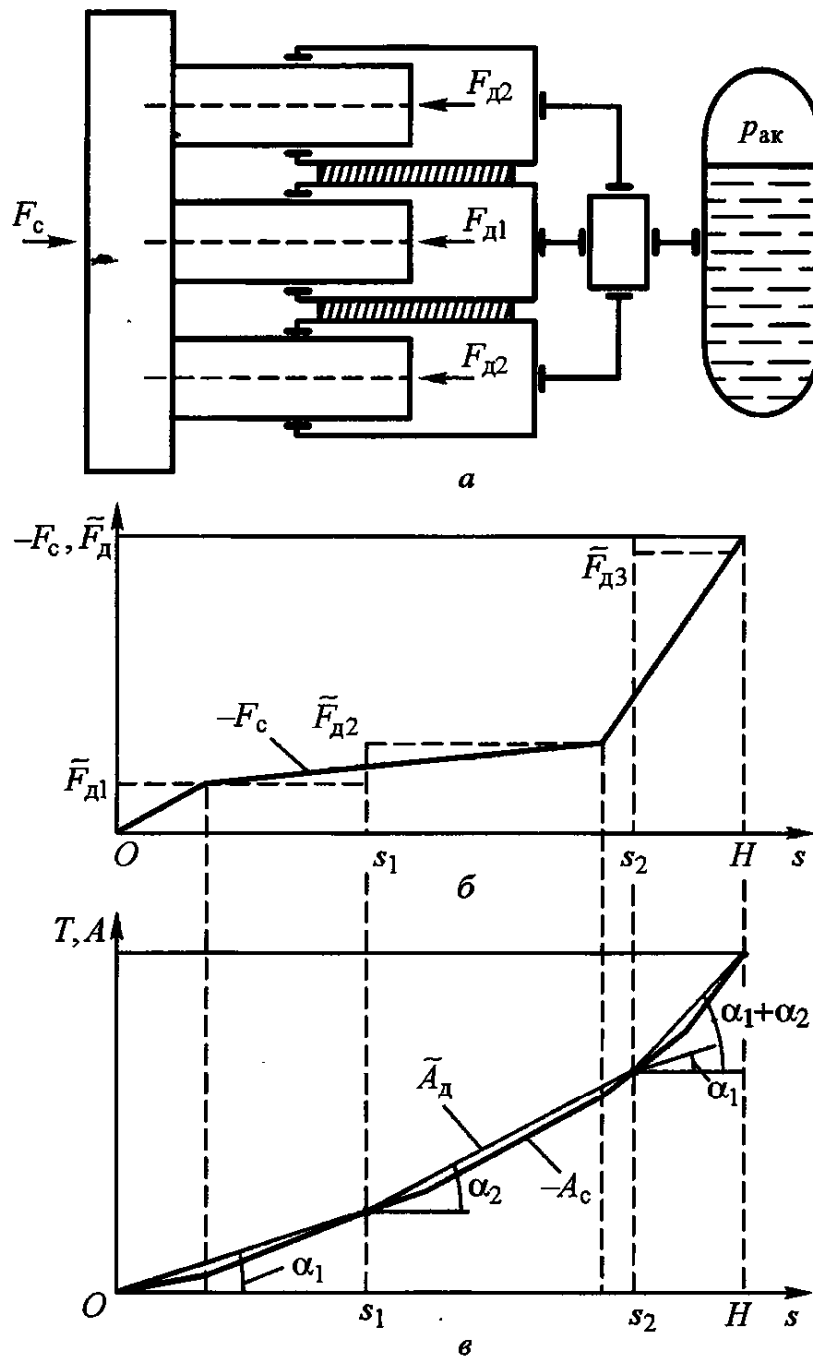


Рис. 4.8

Таким образом, график работы сил сопротивления ограничивается тремя ломаными (рис. 4.8, в), причем наклоны правого и левого отрезков задаются: $F_{д1}$; $(F_{д1} + 2F_{д2})$. Это позволяет найти положения точек $\hat{s}_1$ и $\hat{s}_2$ и, далее, наклон промежуточного отрезка $F_{д2}$.

Влияние $v_H \neq 0$ и $v_K \neq 0$. Самым приятным следствием этого является то, что $\left(\frac{dv}{ds}\right)_H \neq 0$ и $\left(\frac{dv}{ds}\right)_K \neq 0$. Граничные условия (4.9) сохраняются. Также известны T_H и T_K . Единственным требованием является выполнение условия (4.8):

$$T_H + A_d + A_c \geq 0.$$

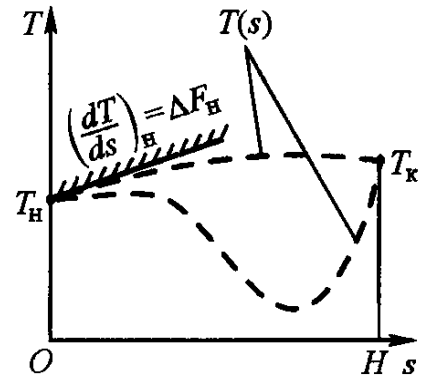


Рис. 4.9

Возможные варианты зависимости $T(s)$ приведены на рис. 4.9 (штриховые линии).

Учет $m = m(s)$. В случае $m = m(s)$ все сводится к уточнению последнего из граничных условий (4.9):

$$\left(\frac{dv}{ds}\right)_H = \frac{(F_d + F_c)_H - \frac{v_H^2}{2} \frac{dm_H}{ds}}{m_H v_H}. \quad (4.9a)$$

Значения $\left(\frac{dT}{ds}\right)_H$, $\left(\frac{dA_c}{ds}\right)_H$ и $\left(\frac{dA_d}{ds}\right)_H$ вычисляют по-прежнему по формулам (4.9).

4.2.2. Перемещение на заданное расстояние за заданное время (обеспечение заданного быстродействия механизма)

Заданными являются операционное время t_0 , полное перемещение $H = s_K - s_H$ и соответственно $A_c(s)$, а также $m(s)$.

Исходным считаем уравнение движения в дифференциальной или энергетической форме (4.7) — (4.8). В качестве краевых условий, помимо определенных из формул (4.9), принимаем следующие:

$$t = 0; s = s_H; v = v_H; a = a_H = v_H (dv/ds)_H;$$

$$t = t_K; s = s_K; v = v_K.$$

В принципе, возможны и иные формулировки краевых условий. Однако в данном случае постановка задачи диктует именно этот набор краевых условий.

Поскольку именно зависимость $s(t)$ или $v(t)$ является искомой, предположим, что $s(t)$ аппроксимируется полиномом, степень которого зависит от числа краевых условий. В данном случае

$$\tilde{s} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4. \quad (4.11a)$$

Соответственно, возможная скорость

$$\tilde{v} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3. \quad (4.11b)$$

При $t = 0$ $s = s_n = 0$ и $v = v_n$, откуда $a_0 = 0$; $a_1 = v_n$; $a_2 = a_n/2$, тогда

$$\tilde{s} = v_i t + 0,5a_i t^2 + at^3 + a_4 t^4;$$

$$\tilde{v} = v_i + a_i t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3.$$

Коэффициенты a_3 и a_4 находим из условий $t = t_0$; $s = s_k = H$; $v = v_k$:

$$H - v_n t_{ш} - 0,5a_n t_0^2 = a_3 t_0^3 + a_4 t_0^4;$$

$$v_k - v_n - a_n t_0 = 3a_3 t_0^2 + 4a_4 t_0^3.$$

Проводим параметрическое преобразование зависимостей $\tilde{s}(t)$ и $\tilde{v}(t)$ в фазовую характеристику $\tilde{v}(s)$ и определяем возможную кинетическую энергию системы

$$\tilde{T} = \frac{m\tilde{v}^2}{2}$$

и, далее, из (4.8) — возможную работу движущих сил

$$\tilde{A}_д = \tilde{T} - T_n - A_c,$$

после чего находим силу $\tilde{F}_д = \frac{d\tilde{A}_д}{ds}$.

Итак, в результате первой итерации по заданному возможному закону движения, удовлетворяющего граничным и начальным условиям, определяют требуемую для его реализации движущую силу $\tilde{F}_д(s)$. Далее в зависимости от типа привода или особенностей конструкции принимают решение об управлении движением.

В случае управления скоростью задача сводится к согласованию системы управления расходом (например, формы и положения заслонки поточного клапана) с положением механической системы (положением плунжера гидроцилиндра), т. е. совершается переход от возможного закона движения $\tilde{v}(s)$ к управляющему воздействию $\hat{v}(s)$. Далее решается стандартная задача динамического анализа по определению t_0 .

В случае управления движущей силой зависимость $\tilde{F}_d(s)$ заменяют системой управляющих сил $\hat{F}_{d1}, \hat{F}_{d2}, \hat{F}_{d3}$ (см. рис. 4.7) на основании равенства (4.10) при выполнении силовых граничных условий. После этого проводят динамический анализ по определению t_0 .

В обеих задачах в случае большой невязки между t_0 и $\hat{t}_0$ проводят следующую итерацию по уточненному возможному закону движения.

4.2.3. О достоверности результатов

О достоверности результатов можно говорить с двух точек зрения: правдоподобность количественного или качественного описания явления и точности методов решения математической задачи. В первом случае мы говорим о соответствии (адекватности) явления и модели, во втором — о соответствии задачи и метода ее решения.

Уровень наших исходных представлений о проектируемой машине позволяет довольствоваться только простыми моделями*. Соответственно, ждать от решения каких-либо точных количественных отображений свойств предмета не приходится. Полученные результаты являются скорее оценками. Однако качественные характеристики описываемых явлений выглядят весьма правдоподобными, и ими можно пользоваться как прогнозами состояния объекта. Поскольку принятые динамические и математические модели и предлагаемые приближенные методы решения задач на базе этих моделей не противоречат основным теоремам механики, можно считать, что получаемые в ходе решения результаты вполне точно описывают поведение моделей.

* *Asini exiquo pabulo vivunt* (лат.) — ослы питаются скудным кормом.

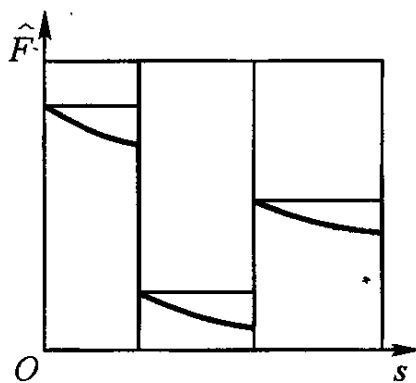


Рис. 4.10

Однако даже на этом уровне мы (правда, вполне сознательно) отказались от рассмотрения целого ряда эффектов, связанных с динамикой нециклового движения. Часть из них можно без всякого труда ввести в расчет. Попытка усложнить модель, вводя описание других эффектов, может ввергнуть нас в «болото переусложнения». Тогда точность, информативность и, главное, достоверность полученных результатов будут явно не соответствовать затраченным усилиям.

Итак, какие же явления выпали из нашего рассмотрения?

1. Для аккумуляторного привода, особенно малого объема, имеет место падение давления по мере понижения уровня жидкости в аккумуляторе (рис. 4.10, тонкая линия графика соответствует условию $p = \text{const}$, жирная — условию $pV = RT$). Этот эффект нетрудно учесть при расчете.

2. Изменение вида динамической модели. Переход от покоя к движению (рис. 4.11). Известны масса объекта, сила, требуемая для перехода от покоя к движению, и время, за которое происходит возрастание этой силы до заданного значения. В гидравлических системах это может быть время набора необходимого давления с момента начала открытия клапана системы управления.

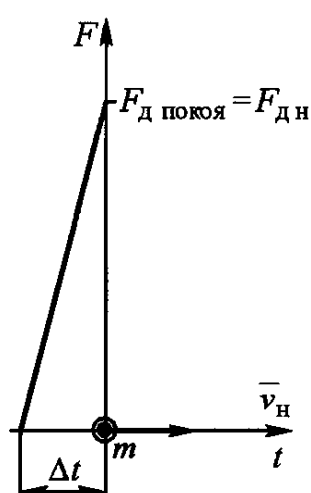


Рис. 4.11

Поскольку это отдельная и весьма трудная задача, можно считать, что время набора давления Δt равно времени срабатывания клапана, указанному в его паспорте. Искомой является начальная скорость движения объекта v_n , которая определяется на основании закона сохранения импульса в форме

$$m_n v_n = F_{д.н} \Delta t. \quad (4.12)$$

В случае перехода из одного состояния системы к другому, например, при включении муфты, можно воспользоваться законом сохранения количества движения в форме

$$\sum m_i v_i = \text{const} , \quad (4.13)$$

или для рис. 4.12

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_3 .$$

Этот процесс также может быть описан на уровне представленных здесь моделей. Однако в этом случае имеет смысл подумать о месте проведения подобного расчета. Скорее всего, его следует провести несколько позднее — после этапа конструирования.

3. Любое дискретное переключение системы управления связано с переходными процессами. Именно их наличие может превратить процесс, описанный проведенными расчетами, в фикцию. Однако учесть переходные процессы в этих расчетах представляется весьма затруднительным, а ожидаемые результаты при небрежном отношении к моделированию могут оказаться подозрительными.

Чтобы понять, какие неприятности нас ожидают при недооценке переходных процессов, рассмотрим два рисунка.

На рис. 4.13 проведено сравнение действительного и расчетного управляющих воздействий, а также помечены интервалы перемещений, на которых протекают переходные процессы. Естественно, это сказывается и на операционном времени, причем в сторону его увеличения (рис. 4.14). На рисунках тонкими линиями показаны действительные характеристики, жирными — расчетные, области переходных процессов обозначены $\Delta s_1, \dots, \Delta s_4$, соответствующее этим интервалам время переходных процессов — $\Delta \hat{t}_1, \dots, \Delta \hat{t}_4$.

Таким образом, можно доверять расчетам при малом числе дискретных управляющих воздействий. В этом случае можно надеяться, что искажения, вносимые ими и порождающие переходные процессы, не изменят до неузнаваемости результаты наших расчетов. И именно здесь, на начальных этапах, при принятии тех или иных допущений сказывается класс и опыт расчетчика, ибо никакие чужие советы и рекомендации доброхотов и справочников не заменят собственного житейского, инженерного и расчетного опыта.

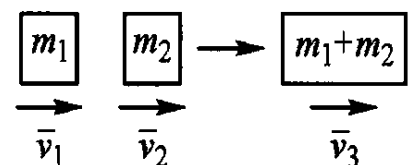


Рис. 4.12

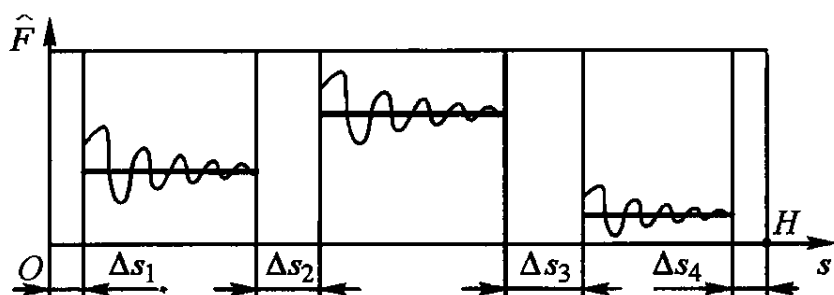


Рис. 4.13

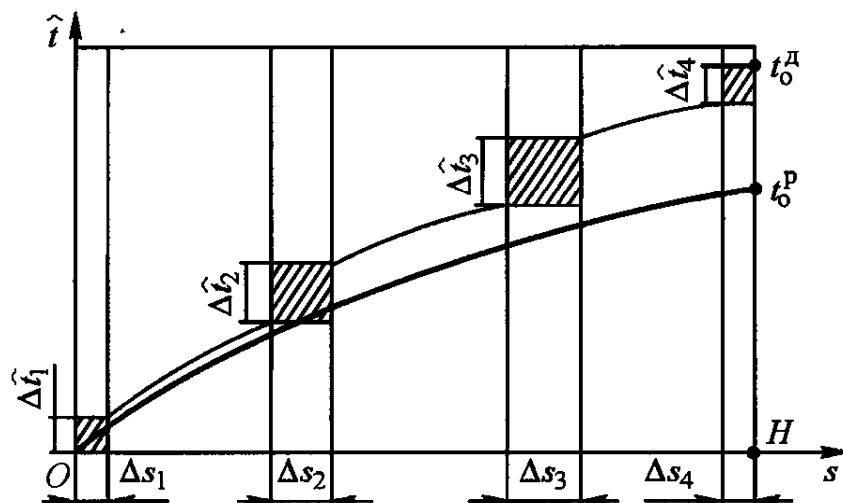


Рис. 4.14

4.3. Цикловое движение

4.3.1. Общие положения итерационных методов решения краевых задач циклового движения

Следует отметить, что рассматриваемые здесь задачи относятся к наиболее простым задачам динамики. Именно поэтому для их решения удобно привлекать уравнения движения в энергетической форме или сводить к ним в случае задания сил или масс, зависящих от положения, скорости и времени. Тогда, как показано в методе Пикара, интегрирование функции двух переменных сводится к многократному интегрированию функции одного переменного.

Учитывая трудности, связанные с поисками аналитического решения, рассмотрим два подхода к решению задач этого класса.

Первый — динамический синтез численными методами с целью получения точного в пределах постановки решения. Второй — упрощенный аналитический подход с целью исследования особенностей поведения заданной динамической системы.

В главе 3 рассмотрены начальные задачи динамики. Рассматриваемые здесь задачи относятся к краевым, значительно более сложным. Поэтому целесообразно воспользоваться методами и результатами 3-й главы и свести краевые задачи к начальным с итерационным уточнением начальных условий.

Рассмотрим две **краевые задачи** циклового движения.

Первая задача — определить условия, обеспечивающие выполнение циклового движения, т. е. $\omega_n = \omega_k$. Для этого необходимо, чтобы

$$A_{\text{ц}} = A_{\text{д.ц}} + A_{\text{с.ц}} = 0. \quad (4.14)$$

Одна из внешних нагрузок (на входе или выходе) задана и является функцией положения, другая — функцией скорости. Требуется определить вторую нагрузку как функцию положения.

Вторая задача — определить параметр J_c уравнения движения, обеспечивающий выполнение ограничений на наибольшее и наименьшее значение скорости.

Общая последовательность решения может выглядеть следующим образом.

В основе лежит решение задачи для позиционной системы.

Переход от автономной к позиционной системе осуществляется с помощью параметрического преобразования.

Первая итерация осуществляется при найденных или заданных некоторым образом начальных условиях и параметре уравнения движения.

Проверяется выполнение краевых условий и ограничений полученного решения, проводится уточнение начальных условий и параметра уравнения движения.

Так как **движение периодическое, выбор состояния** объекта для начала итерационного процесса (φ_n ; ω_n) **произволен**. Но с этого момента для всех последующих итераций **начальное положение фиксировано**.

Блок-схема этого подхода приведена на рис. 4.15.



Рис. 4.15

4.3.2. Численное решение на основе энергетической формы уравнения движения

Позиционная система. Условию периодичности движения $\omega_n = \omega_k$ соответствует условие (4.14). Его выполнение связано с определением зависимости $M(\varphi)$. Принимаем, что $M = M_\varphi + M_{\omega n}$, где $M_{\omega n} = \text{const}$ (такое обозначение принято для удобства дальнейшего сравнения позиционной и автономной систем). Заданной является зависимость M_φ . Соответственно, выполнение условия (4.14) обеспечивается вычислением константы $M_{\omega n}$ из уравнения

$$\int_{\varphi_n} M_\varphi d\varphi + M_{\omega n} \varphi_n = 0. \quad (4.15)$$

Учитывая, что $J = J_c + J_v(\varphi)$, перепишем уравнение движения (1.4) в виде

$$\frac{(J_c + J_v)\omega^2}{2} - \frac{(J_c + J_{vH})\omega_H^2}{2} = A(\varphi). \quad (4.16)$$

В случае, когда $J_v = 0$, положения экстремумов закона движения и работы совпадают. Если $J_v \neq 0$, имеет место рассогласование положений экстремумов этих функций и $J_v(\varphi)$, но при этом они жестко связаны с выбранным начальным положением объекта (рис. 4.16).

Зафиксируем положения ω_{H6} и ω_{HM} при выбранном φ_H :

$$\varphi_1 = \varphi(\omega_{H6}); \quad \varphi_2 = \varphi(\omega_{HM}).$$

Соответственно,

$$A(\varphi_1) = A_1; \quad A(\varphi_2) = A_2; \quad J_v(\varphi_1) = J_{v1}; \quad J_v(\varphi_2) = J_{v2}.$$

Тогда итерационная процедура определения закона движения распадается на следующие шаги: вычисление начального значения скорости, вычисление постоянной составляющей момента инерции (параметра уравнения движения), определение закона движения. Этот алгоритм приведен на рис. 4.17. Чтобы не загромождать рисунок, в блоках « n -я итерация» и «Уточнение начального условия» верхний индекс в символах, обозначающий номер итерации (n), опущен.

Итак, на входе n -й итерации имеем $\varphi_1^{(n)}$ и $\varphi_2^{(n)}$, откуда находим

$$\tilde{A}_1^{(n)}, \tilde{A}_2^{(n)}, \tilde{J}_{v1}^{(n)}, \tilde{J}_{v2}^{(n)}.$$

Это позволяет получить параметр уравнения движения

$$J_c^{(n)} = \frac{2(A_1^{(n)} - A_2^{(n)}) - (J_{v1}^{(n)}\omega_{H6}^2 - J_{v2}^{(n)}\omega_{HM}^2)}{\omega_{H6}^2 - \omega_{HM}^2}. \quad (4.17)$$

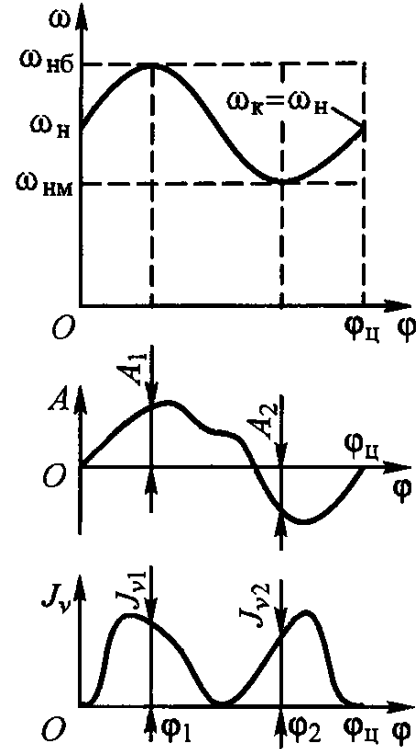


Рис. 4.16

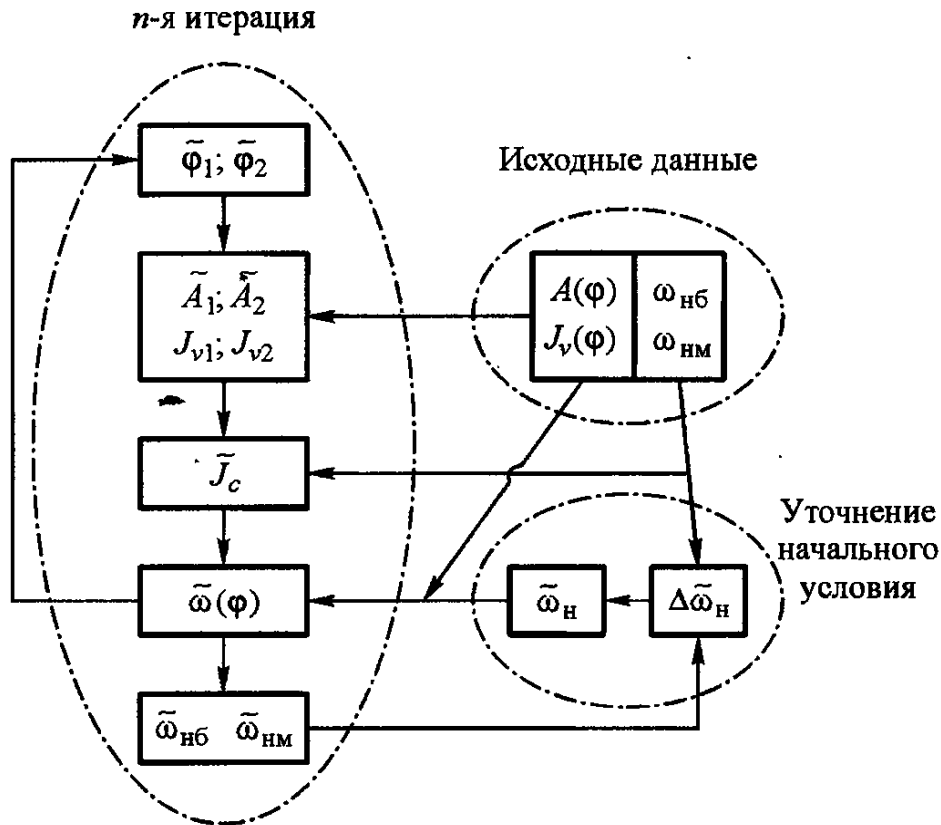


Рис. 4.17

На входе итерации также известно значение $\omega_n^{(n)}$. Это позволяет найти закон движения:

$$\omega^{(n+1)} = \sqrt{\frac{(J_c^{(n)} + J_{vH})\omega_H^2 + 2A}{J_c^{(n)} + J_v}}. \quad (4.18)$$

Таким образом, получаем $\omega_{H6}^{(n+1)}$, $\omega_{HM}^{(n+1)}$. Наибольшие и наименьшие значения скорости в (4.18) могут не совпадать с заданными ω_{H6} и ω_{HM} . Рассогласование этих результатов позволяет привести функцию (4.18) в заданные границы и уточнить начальное значение закона движения $\omega_H^{(n+1)}$:

$$\omega^{(n+1)} = \omega_{HM} + \frac{\Delta\omega_{H6}}{\Delta\omega_{H6}^{(n+1)}} \Delta\omega^{(n+1)}, \quad (4.19)$$

где $\Delta\omega = \omega^{(n+1)} - \omega_{HM}^{(n+1)}$. Геометрическая интерпретация этой процедуры приведена на рис. 4.18.

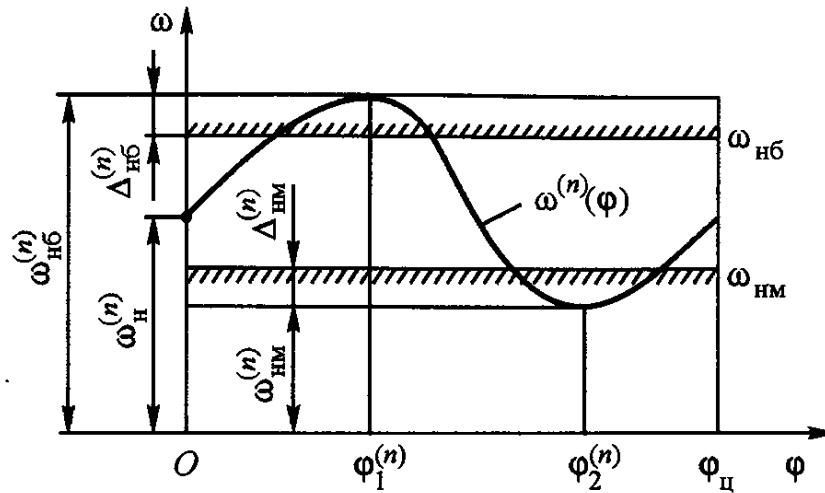


Рис. 4.18

Зависимость $\omega^{(n+1)}(\varphi)$ позволяет перейти к подготовке новой итерации.

Итерационное уточнение начального условия может проводиться любым другим известным методом, особенно после 2-й или 3-й итерации, когда возникает возможность применить методы, ускоряющие сходимость процесса.

Сходимость оценивается, как и в методе Пикара, по допустимой разнице двух последовательных приближений.

Первое приближение этих формул, как и выведенных далее аналитических зависимостей, легко перекладывается в графический метод, известный под названием «метод Н.И. Мерцалова»^{*}.

Особенности расчета автономной системы. Первое отличие автономной и позиционной систем можно было отметить уже в главе 3 при рассмотрении начальной задачи. В примере, рассмотренном на рис. 3.9, средний момент скоростной характеристики был равен постоянной составляющей момента позиционной системы,

^{*} Цикловое движение, для которого $\Delta\omega \ll \omega_{\text{ср}}$, называется установившимся. Для него формулы (4.16) и (4.18) легко преобразуются к виду

$$J_c = \frac{\left(A - \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{2} J_v \right)_{\text{нб}}}{\Delta\omega_{\text{нб}} \omega_{\text{ср}}}; \quad \Delta\omega(\varphi) = \frac{A - \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{2} J_v}{\omega_{\text{ср}} J_c}; \quad \text{для } J_v = 0 \quad \Delta\omega(\varphi) = \frac{A}{\omega_{\text{ср}} J_c}$$

(см. с. 81).

вычисленной из условия циклового движения (см. рис. 3.7): на заданном интервале перемещения изменение кинетической энергии равно нулю. Результат получился различным. Для позиционной системы это условие автоматически выполнялось от итерации к итерации. Для автономной системы оно было выполнено только на 1-й итерации. Далее это условие уже не выполнялось.

Соответственно, первые итерации решения автономной и позиционной систем в цикловом движении также совпадают. Однако выполнение краевых условий на 2-й и последующих итерациях обеспечивается уже иной процедурой. Так же, как и в позиционной системе, после 1-й итерации получаем закон движения $\omega^{(1)}(\varphi)$. Выполнение ограничений $\omega_{\text{нб}}$ и $\omega_{\text{нм}}$ обеспечивается пересчетом по формулам (4.19).

Теперь рассмотрим особенности проведения последующих итераций. Их графическая интерпретация приведена на рис. 4.19.

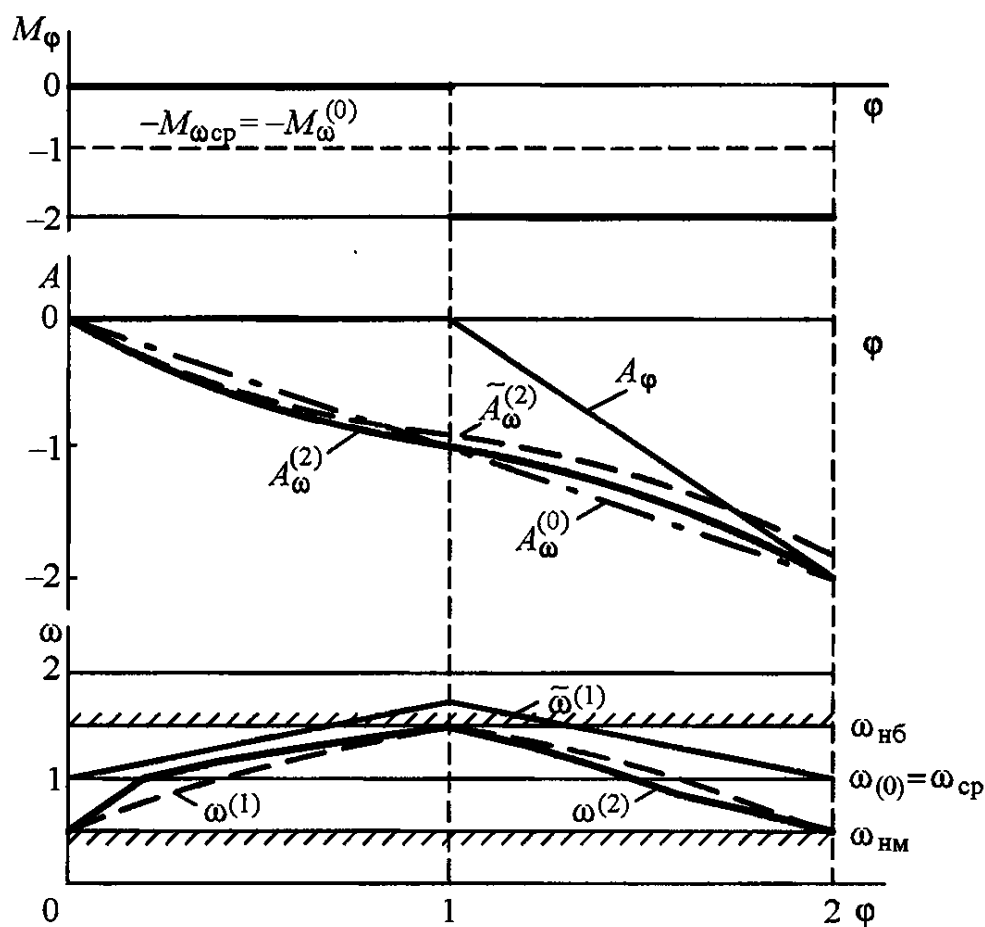


Рис. 4.19

Итак, получена зависимость $\omega^{(n)}(\varphi)$. Параметрическое преобразование ее и скоростной характеристики $M(\omega)$ позволяет перейти к зависимости $M_{\omega}^{(n)}(\varphi)$. Далее получаем

$$\tilde{A}_{\omega}^{(n)} = M_{\omega}^{(n)} d\varphi,$$

причем $\tilde{A}_{\omega_{ц}}^{(n)} \neq A_{\varphi_{ц}}$. Исходя из условия $A_{ц} = 0$, по аналогии с (4.19) приводим $A_{\omega}^{(n)}$ к виду

$$A_{\omega}^{(n)} = \frac{A_{\omega_{ц}}}{A_{\omega_{ц}}^{(n)}} A_{\omega}^{(n)} \quad (4.20)$$

и находим $A^{(n)}$. Теперь задача сведена к позиционной, рассмотренной буквально на одну страницу раньше*.

Здесь следует отметить, что во всех примерах рассмотрена линейная зависимость $M(\omega)$. Однако предложенный метод позволяет решать задачи при любой форме этой зависимости.

4.3.3. Влияние скоростной характеристики на движение механизма (движение позиционной и автономной систем при $J = J_c$)

Изложенный в подразд. 4.3.2 численный метод позволяет в принципе получить точное решение, но вряд ли удобен для анализа связи между компонентами уравнения движения. Для этой цели воспользуемся приближенным аналитическим методом — методом Пикара, изложенным в главе 3 (§ 3.2).

Поскольку нас интересует качественный анализ системы, выдвинем несколько допущений, позволяющих существенно упростить вывод.

Рассмотрим частный случай **циклового движения** — установившееся движение при $J = J_c$. Тогда $\omega_n = \omega_{cp}$, $\Delta\omega \ll \omega_{cp}$, $A \ll J\omega^2$.

* Эта фраза заставляет вспомнить притчу о разнице между инженером и математиком, рассказанную в книге Беккенбаха «Математика для инженеров». Имеем водопровод, кастрюлю, газовую плиту и спички. Требуется вскипятить кастрюлю воды. Ответ очевиден. Теперь изменим условие — в кастрюлю налита вода. Ответ инженера: зажигаем спичку и т. д. Ответ математика: выливаем из кастрюли воду и тем самым сводим задачу к предыдущей.

Пусть скоростная характеристика имеет вид $M_{\omega} = M_{\omega_{\text{ср}}} - k\Delta\omega$. Соответственно, для $\omega_{\text{ср}} = \omega_{\text{н}}$ и $\omega - \omega_{\text{ср}} = \Delta\omega$ получаем

$$M_{\omega} = M_{\omega_{\text{ср}}} - k\Delta\omega. \quad (4.21)$$

Объектом сравнения **позиционной и автономной систем** является момент инерции и колебания скорости внутри цикла. Для оценки последней используют число δ — коэффициент неравномерности хода машины:

$$\delta = \frac{\Delta\omega_{\text{нб}}}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (4.22)$$

Чтобы различить, к какой системе относятся указанные параметры, воспользуемся индексами, введенными в главе 3 для различения позиционной и автономной систем (ϕ, ω). Тогда позиционной системе соответствуют параметры J_{ϕ}, δ_{ϕ} , автономной системе — $J_{\omega}, \delta_{\omega}$.

Далее следует ввести еще одно принципиальное допущение, оправданное для $J = J_c$: по отношению к позиционной в автономной системе максимум и минимум скорости и суммарной работы не смещаются. Их максимум и минимум приходятся на положения ϕ_1 и ϕ_2 .

Переходим к выводу.

В главе 3 показано, что движение позиционной системы при указанных допущениях достаточно хорошо описывается 1-м приближением:

$$\frac{\omega^{(1)} - \omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{A^{(0)}}{J_{\phi} \omega_{\text{ср}}^2} \approx \frac{\omega^{(2)} - \omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (4.23)$$

Теперь связь между колебаниями скорости ($\Delta\omega_{\text{нб}} = \omega_{\text{нб}} - \omega_{\text{нм}}$) и моментом инерции имеет вид

$$\delta_{\phi} = \frac{A_{\text{нб}}}{J_{\phi} \omega_{\text{ср}}^2}. \quad (4.24)$$

Там же показано, что различие между позиционной и автономной системами обнаруживается только начиная со 2-го приближения, которое описывается формулой (3.13):

$$\frac{\omega_{\omega}^{(2)} - \omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{н}}} = \frac{A^{(0)}}{J_{\omega} \omega_{\text{н}}^2} - \frac{k}{J_{\omega} \omega_{\text{н}}} \int_{\varphi} \frac{\frac{A^{(0)}}{J_{\omega} \omega_{\text{н}}^2}}{1 + \frac{A^{(0)}}{J_{\omega} \omega_{\text{н}}^2}} d\varphi.$$

С учетом допущений она принимает вид

$$\frac{\omega_{\omega}^{(2)} - \omega_{\text{ср}}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{A}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}^2} - \frac{k}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}} \int_{\varphi} \frac{A}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}^2} d\varphi. \quad (4.25)$$

Для $J = \text{const}$ положения наибольшего и наименьшего значений работы и угловой скорости совпадают. Поэтому углам φ_1 и φ_2 соответствуют наибольшие и наименьшие значения угловой скорости и работы ($\varphi_{\text{нб}}$ и A_1 ; $\omega_{\text{нм}}$ и A_2) — см. рис. 4.16. Принимаем $\varphi_p = \varphi_1 - \varphi_2$; $A_{\text{нб}} = A_1 - A_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\text{нб}} - \omega_{\text{нм}}}{\omega_{\text{ср}}} &= \frac{\Delta \omega_{\text{нб}}}{\omega_{\text{ср}}} = \delta_{\omega} = \\ &= \frac{A_{\text{нб}}}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}^2} - \frac{k}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}} \left\{ \int_0^{\varphi_1} \frac{A}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}^2} d\varphi - \int_0^{\varphi_2} \frac{A}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}^2} d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

В общем случае интеграл в формулах (3.13) и (4.25) в явном виде не берется. Поэтому воспользуемся формулой Ньютона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)[f(b) + f(a)]}{2}.$$

Тогда

$$\delta_{\omega} = \frac{1}{J_{\omega} \omega_{\text{ср}}^2} \left[A_{\text{нб}} + \frac{k}{2J_{\omega} \omega_{\text{ср}}} (\varphi_2 A_2 - \varphi_1 A_1) \right]. \quad (4.26a)$$

Поскольку движение цикловое, мы можем выбрать за точку отсчета $\varphi_1 = 0$. Тогда $\varphi_p = \varphi_2$; $A_1 = 0$; $A_2 = -A_{нб}$. Соответственно, из (4.26а) получаем

$$\delta_\omega = \frac{A_{нб}}{J_\omega \omega_{ср}^2} \left(1 - \frac{k\varphi_p}{2J_\omega \omega_{ср}} \right). \quad (4.26б)$$

Сравнение (4.24) и (4.26б) показывает, что

$$\delta_\omega J_\omega = \delta_\varphi J_\varphi \left(1 - \frac{k\varphi_p}{2J_\omega \omega_{ср}} \right). \quad (4.27)$$

Введем безразмерный параметр

$$J = \frac{J_\omega}{J_\varphi}. \quad (4.28)$$

Тогда (4.27) преобразуется к удобному для интерпретации виду:

$$\delta_\omega J^2 - \delta_\varphi J - \frac{k\varphi_p}{2J_\varphi \omega_{ср}} = 0. \quad (4.29)$$

Здесь пришло время сослаться на рис. 2.16, где изображена область существования механических характеристик приводов. Мы не рассматриваем влияние переменной составляющей момента инерции J_v . Поэтому анализ полученных зависимостей носит вероятностный характер и сопровождается словами **может быть, возможно** и т. п.

Гидромеханическим аналогом позиционной системы является аккумуляторный привод большого объема, для которого M_d и F_d постоянны, т. е. $k = 0$. В этом случае $J = 1$ или $J_\omega = J_\varphi$, и момент инерции можно определять по любой из приведенных формул, например (4.24). Согласно этой формуле, $J \sim A_{нб}$. Зависимость $A_{нб}(\varphi_p, \varphi_{ц}, A_{фц})$ можно характеризовать как линейную, вывод которой очевиден из рис. 4.20:

$$J_\varphi = J_\omega \sim A_{нб} = A_{фц} \left(1 - \frac{\varphi_p}{\varphi_{ц}} \right). \quad (4.30)$$

Таким образом, можно говорить о том, что при увеличении угла нагружения φ_p уменьшается момент инерции, что соответствует прогнозам, приведенным в главе 3.

Если источником энергии механической системы является асинхронный двигатель, то мы имеем дело с кривой *a* на рис. 2.16, гидромеханический аналог которой близок к насосному приводу большой мощности. Крутизна k скоростной характеристики (4.21) в пределе равна нулю. В реальности передача движения от двигателя к механизму осуществляется через ременную передачу или упругую муфту, или иной податливый элемент и можно считать, что k существенно отличается от нуля. В этом случае можно рассматривать две задачи: о сравнении неравномерности хода автономной и позиционной систем при заданном моменте инерции $J_\omega = J_\varphi$ и о сравнении моментов инерции этих систем при заданной неравномерности хода $\delta_\omega = \delta_\varphi$.

В первом случае

$$\frac{\delta_\omega}{\delta_\varphi} = 1 - \frac{k\varphi_p}{2J_\varphi\omega_{cp}} = 0. \quad (4.31)$$

Таким образом, чем больше k (жестче характеристика) и φ_p , тем меньше можно ожидать неравномерности хода автономной системы по сравнению с позиционной. Во втором случае получаем

$$J^2 - J + \frac{k\varphi_p}{2J_\varphi\omega_{cp}} = 0. \quad (4.32)$$

Условием существования действительных решений этого уравнения является

$$J_\varphi\omega_{cp} < 2k\varphi_p.$$

Решением уравнения (4.32) является

$$J = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - \frac{k\varphi_p}{2J_\varphi\omega_{cp}}}. \quad (4.33)$$

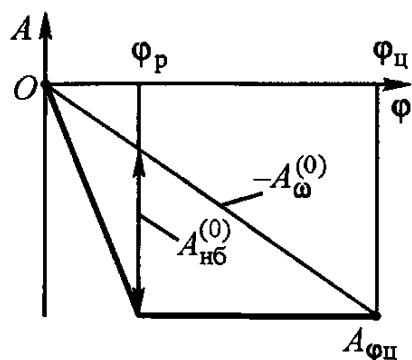


Рис. 4.20

Таким образом, в автономной системе при заданном коэффициенте неравномерности хода машины уменьшению момента инерции способствует увеличение k и φ_r . Последнее говорит о том, что на размеры маховых масс можно влиять не только изменением параметров привода, но и выбором более сложной схемы исполнительного механизма. Кроме того, следует иметь в виду, что нужно достаточно осторожно относиться к таким достижениям, как уменьшение момента инерции. Связь между моментом инерции, размерами (L) и массой (M) маховика выражается как

$$L \sim \sqrt[5]{J}; \quad M \sim L^3. \quad (4.34)$$

Это значит, что уменьшение маховой массы в ДВА (!!!) раза позволит уменьшить размеры всего только на 15 %, а массу — в 1,5 раза. Таким образом, борьба за уменьшение маховой массы целесообразна только в случае существенного ее уменьшения. В остальном приходится довольствоваться улучшением работы привода, т. е. уменьшением неравномерности хода и сглаживанием его нагрузочной характеристики, что является немаловажным.

5. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Общая схема решения. Матричное представление уравнений движения звена механизма. Силовой расчет шарнирного четырехзвенника. Особенности расчета поступательных пар и сдвоенных шарниров. Блочный-модульный метод составления матрицы коэффициентов. Примеры составления матрицы коэффициентов для сложного механизма. Особенности учета сил трения.

5.1. Общая схема решения

В общем цикле проектирования машин (см. рис. 1.2) вычисление действующих сил позволяет получить исходные данные для прочностных расчетов при определении сечений звеньев, размеров кинематических пар, выборе подшипников и т. п., что требуется при конструировании деталей и узлов машины. В свою очередь, результаты конструирования позволяют получить часть сведений для подготовки исходных данных силового расчета (массы и моменты инерции звеньев, размеры кинематических пар, вид пар трения и тип трения в кинематических парах). В сочетании с результатами кинематического анализа они формируют блок подготовки исходных данных, в который входят инерционные составляющие уравнений движения, известные внешние силы и моменты. Физической моделью механизма для проведения силового расчета является система связанных жестких тел с w степенями подвижности, причем в рамках принятых выше предположений отдельные звенья механизма рассматриваются как абсолютно жесткие тела, а кинематические пары считаются выполненными без зазоров.

Плоский рычажный механизм содержит n подвижных звеньев и p_n низших кинематических пар. Это значит, что в прямоугольной системе координат имеется $2p_n$ реакций в кинематических парах

(p_n векторов) и можно составить $3n$ уравнений для описания равновесия (движения) механизма. Но

$$3n - 2p_n = w. \quad (5.1)$$

Таким образом, число уравнений на w больше числа неизвестных составляющих, что позволяет определять w неизвестных внешних воздействий на звенья механизма. Например, при $w = 1$ можно помимо реакций в кинематических парах определить значение движущего момента (силы) при заданной силе сопротивления.

Та же структурная формула (5.1) может быть представлена как

$$w = w_{п.м} + \sum w_{с.г}, \quad (5.2)$$

где $w_{п.м} = w$ — подвижность первичных механизмов; $w_{с.г} = 0$ — подвижность структурных групп, образующих данный механизм. Таким образом, структурная группа образует статически определимую систему, у которой $3n_{с.г} = 2p_n$, т. е. число уравнений движения (равновесия, кинетостатики), равно числу составляющих реакций в кинематических парах. Из теоретической механики известно, что такого рода структура называется фермой, и ее равновесие описывается системой линейных уравнений

$$|A| \cdot |X| = |B|, \quad (5.3)$$

где $|X|$ — вектор неизвестных составляющих реакций в кинематических парах размерностью $3n$; $|A|$ — матрица коэффициентов при неизвестных в уравнениях равновесия размерностью $3n \times 3n$; $|B|$ — вектор правых частей уравнений равновесия размерностью $3n$.

Таким образом, определение реакций в кинематических парах механизма — силовой расчет — сводится к решению системы задач о равновесии статически определимых ферм, условия равновесия которых описываются системой линейных уравнений (5.3). Ее решение легко осуществляется численными методами на ЭВМ.

При допущении того, что направления относительных скоростей звеньев определяются движением начальных звеньев при расчете без учета и с учетом трения в парах, можно расширить подход к силовому расчету без учета трения на случай малого трения в кинематических парах.

Соответственно, нашей задачей — задачей «Теории механизмов» — является формализация подготовки данной системы и обработка результатов расчета.

Под формализацией подготовки системы подразумевается экономичный алгоритм составления матрицы коэффициентов, векторов-столбцов правых частей системы и искомых величин.

5.2. Матричное представление уравнений движения звена механизма

Данный и следующие параграфы написаны на основании [15]. Рассматривается движение механизма и его звеньев в инерциальной системе координат. Ускорения центров масс звеньев абсолютные.

Пронумеруем в некотором порядке подвижные звенья механизма, безразлично какой структуры, от 1 до n . Для удобства изложения ограничимся звеньями, имеющими две концевые пары. Чтобы отличить искомые реакции в кинематических парах от внешних сил, обозначим их буквой $\bar{Q}$.

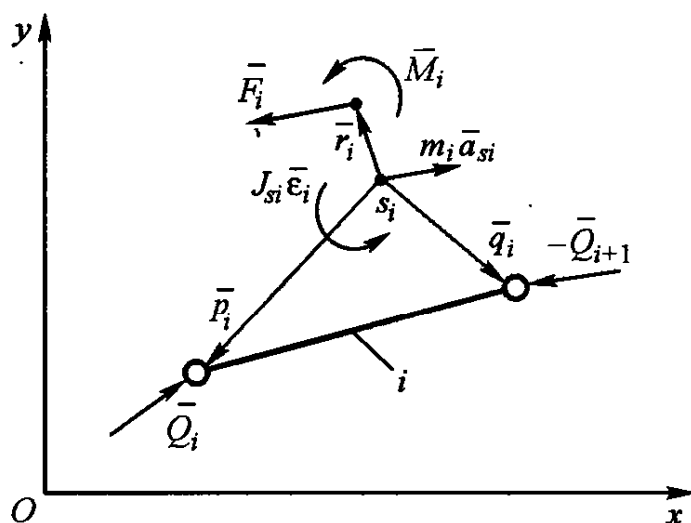


Рис. 5.1

Рассмотрим движение звена механизма под действием приложенных сил и ускорений (рис. 5.1). Звено i с массой m_i и моментом инерции J_{si} относительно центра масс s_i движется с ускорением $\bar{a}_{si}$ и угловым ускорением $\bar{\epsilon}_i$. На него действуют главный вектор $\bar{F}_i$ и главный момент $\bar{M}_i$, а также реакции $\bar{Q}_i$ и $-\bar{Q}_{i+1}$ со стороны

звеньев $(i - 1)$ и $(i + 1)$. Обозначим радиусы-векторы от центра масс звена до осей шарниров и точки приложения главного вектора $\bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$.

Уравнения движения звена в векторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{Q}_i - \bar{Q}_{i+1} + \bar{F}_i &= m_i \bar{a}_{si}; \\ \sum \bar{M}_{si} = \bar{p}_i \times \bar{Q}_i - \bar{q}_i \times \bar{Q}_{i+1} + \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \bar{M}_i &= J_{si} \bar{\varepsilon}_i. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Векторная запись уравнений движения в форме (5.4) удобна при использовании графоаналитических методов расчета. При использовании численных методов система векторных уравнений (5.4) заменяется эквивалентной системой скалярных уравнений.

Учтем, что векторное произведение

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x.$$

Теперь при проецировании реакций $\bar{Q}_i$ и $-\bar{Q}_{i+1}$ на оси координат система (5.4) приобретает вид

$$\begin{aligned} Q_{ix} - Q_{(i+1)x} + F_{ix} &= m_i a_{six}; \\ Q_{iy} - Q_{(i+1)y} + F_{iy} &= m_i a_{siy}; \\ -p_{iy} Q_{ix} + p_{ix} Q_{iy} + q_{iy} Q_{(i+1)x} - q_{ix} Q_{(i+1)y} + \\ + (-r_{iy} F_{ix} + r_{ix} F_{iy}) + M_i &= J_{si} \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В принципе, помимо формы (5.5) возможны еще два варианта записи системы: в форме трех уравнений моментов относительно трех различных точек звена и в форме проекций сил на одну из координатных осей и двух уравнений моментов относительно двух произвольных точек звена.

В матричной форме система (5.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -p_{iy} & p_{ix} & q_{iy} & -q_{ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iy} \\ Q_{(i+1)x} \\ Q_{(i+1)y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_i a_{six} - F_{ix} \\ m_i a_{siy} - F_{iy} \\ J_{si} \varepsilon_i - M_i + r_{iy} F_{ix} - r_{ix} F_{iy} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

5.3. Силовой расчет шарнирного четырехзвенника

Рассмотрим определение реакций в кинематических парах на примере шарнирного четырехзвенника (рис. 5.2). Так как подвижность данного механизма $w = 1$, можно считать неизвестным одно внешнее воздействие, например момент M_1 . Известными считаем главные векторы звеньев 1, 2, 3 и главные моменты звеньев 2, 3, ускорения центров масс и угловые ускорения звеньев, а также их массы, моменты инерции и конфигурацию механизма при заданном положении звена 1.

Рассмотрим движение каждого звена, заменив связи (шарниры) соответствующими реакциями (рис. 5.3). Тогда уравнения движения в векторной форме в соответствии с (5.4) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2 &= m_1 \bar{a}_{s1} - \bar{F}_1; \\ \bar{M}_1 + \bar{p}_1 \times \bar{Q}_1 - \bar{q}_1 \times \bar{Q}_2 &= J_{s1} \bar{\epsilon}_1 - \bar{r}_1 \times \bar{F}_1; \\ \bar{Q}_2 - \bar{Q}_3 &= m_2 \bar{a}_{s2} - \bar{F}_2; \\ \bar{p}_2 \times \bar{Q}_2 - \bar{q}_2 \times \bar{Q}_3 &= J_{s2} \bar{\epsilon}_2 - \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 - \bar{M}_2; \\ \bar{Q}_3 - \bar{Q}_4 &= m_3 \bar{a}_{s3} - \bar{F}_3; \\ \bar{p}_3 \times \bar{Q}_3 - \bar{q}_3 \times \bar{Q}_4 &= J_{s3} \bar{\epsilon}_3 - \bar{r}_3 \times \bar{F}_3 - \bar{M}_3.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Данная система разрешается относительно неизвестных $\bar{M}_1$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$, $\bar{Q}_4$. По результатам полученного решения можно определить воздействие системы подвижных звеньев на основании:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_0 - \bar{Q}_1 + \bar{Q}_4 &= 0; \\ \sum M(\bar{Q}_0; -\bar{Q}_1; \bar{Q}_4) &= 0.\end{aligned}\tag{5.8}$$

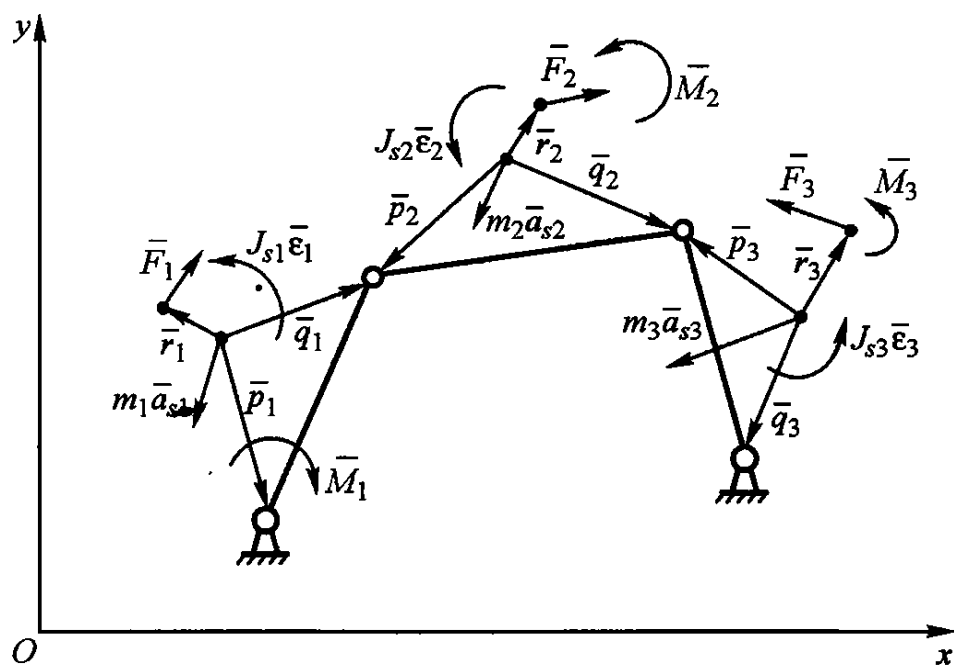


Рис. 5.2

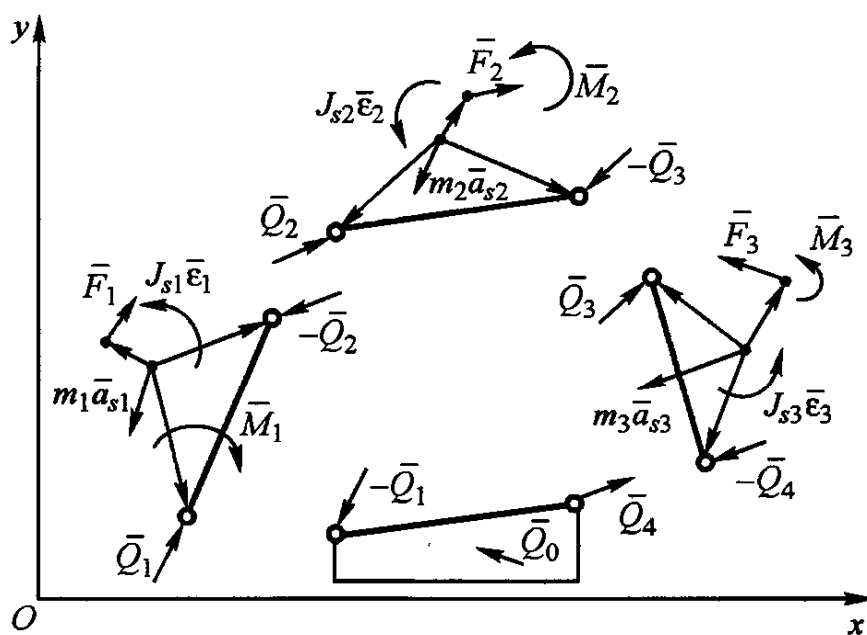


Рис. 5.3

Перепишем систему (5.7) в соответствии с (5.6) в матричной форме*:

* Здесь и далее нулевые элементы матрицы не показаны.

$$\begin{pmatrix}
1 & & & -1 & & & & & \\
& 1 & & & -1 & & & & \\
-1 & -p_{1y} & p_{1x} & q_{1y} & -q_{1x} & & & & \\
& & & 1 & & -1 & & & \\
& & & & 1 & & -1 & & \\
& & & -p_{2y} & p_{2x} & q_{2y} & -q_{2x} & & \\
& & & & & 1 & & -1 & \\
& & & & & & 1 & & -1 \\
& & & & & & & -p_{3y} & p_{3x} & q_{3y} & -q_{3x}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_1 \\
Q_{1x} \\
Q_{1y} \\
Q_{2x} \\
Q_{2y} \\
Q_{3x} \\
Q_{3y} \\
Q_{4x} \\
Q_{4y}
\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
m_1 a_{s1x} - F_{1x} \\
m_1 a_{s1y} - F_{1y} \\
J_{s1} \epsilon_1 - |\bar{r}_1 \times \bar{F}_1| \\
m_2 a_{s2x} - F_{2x} \\
m_2 a_{s2y} - F_{2y} \\
J_{s2} \epsilon_2 - |\bar{r}_2 \times \bar{F}_2| - M_2 \\
m_3 a_{s3x} - F_{3x} \\
m_3 a_{s3y} - F_{3y} \\
J_{s3} \epsilon_3 - |\bar{r}_3 \times \bar{F}_3| - M_3
\end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Для формирования данной системы требуются сведения о геометрии и кинематике механизма для искоемых положений начального звена. Кинематика плоского механизма определяется набором векторов $\bar{a}_{si}$ и скаляров ϵ_i ($i = \overline{1, n}$) для этих положений. Геометрия механизма в рамках данной задачи определяется векторами $\bar{p}_i$, $\bar{q}_i$, $\bar{r}_i$ (см. рис. 5.1). Эти векторы для каждого звена определяются по известным положениям центра масс, точки приложения главного вектора сил и осей шарниров. Таким образом, если в системе координат (Oxy) известны векторы $\bar{a}_i$, $\bar{a}_{(i+1)}$, $\bar{s}_i$, $\bar{f}_i$, фиксирующие положения осей входного и выходного шарнира, центра масс, точки приложения главного вектора (рис. 5.4), то искоемые векторы определяются как

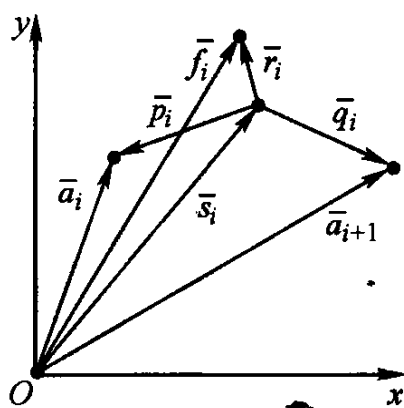


Рис. 5.4

$$\begin{aligned}\bar{p}_i &= \bar{a}_i - \bar{s}_i; \\ \bar{q}_i &= \bar{a}_{i+1} - \bar{s}_i; \\ \bar{r}_i &= \bar{f}_i - \bar{s}_i.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Итак, матричное уравнение для определения реакций в кинематических парах механизма содержит квадратную матрицу коэффициентов при неизвестных реакциях системы линейных уравнений размерностью $3n \times 3n$, вектор неизвестных размерностью $3n$, в который входят составляющие реакций в кинематических парах и w неизвестных внешних воздействий, вектор правых частей системы размерностью $3n$, содержащий инерционные члены и систему заданных главных векторов сил и моментов.

5.4. Особенности расчета поступательных пар и сдвоенных шарниров

Рассмотрим структурную группу, содержащую две вращательные и одну концевую поступательную пару (рис. 5.5). Для упрощения выкладок принимаем, что она перемещается параллельно оси Ox . Инерционные составляющие и внешние воздействия на рисунке не показаны. Можно считать, что на звено с поступательной парой действует только внешняя сила $\bar{F}_i$, приложенная произвольно.

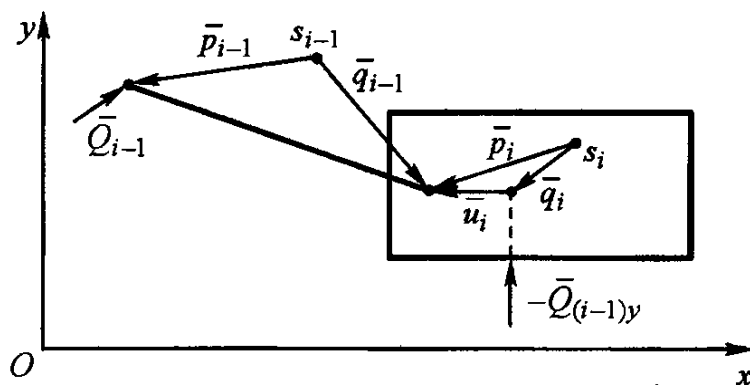


Рис. 5.5

При отсутствии сил трения реакция в поступательной паре направлена по нормали к соприкасающимся поверхностям, т. е. перпендикулярно направляющей. Таким образом, неизвестной является только длина вектора. Кроме того, при произвольно расположенных центре масс звена и точке приложения главного вектора сил неизвестным является также расстояние u_i от точки приложения реакции в паре до оси шарнира (см. рис. 5.5).

Таким образом, получаем пять неизвестных: $Q_{(i-1)x}$, $Q_{(i-1)y}$, Q_{ix} , Q_{iy} , $Q_{(i+1)y}$, вместо шести в предыдущем примере. Система уравнений для этой группы составляется из трех уравнений движения для звена $(i-1)$, содержащего две вращательные пары, и двух уравнений движения в форме проекций сил на оси координат для звена i , содержащего вращательную и поступательную пары. Правая часть системы уравнений для этой структурной группы преобразуется из формы (5.6) к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 & & \\ & 1 & & -1 & \\ -P_{(i-1)y} & P_{(i-1)x} & q_{(i-1)y} & -q_{(i-1)x} & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{(i-1)x} \\ Q_{(i-1)y} \\ Q_{ix} \\ Q_{iy} \\ Q_{(i+1)y} \end{pmatrix}. \quad (5.11a)$$

Точка приложения реакции $Q_{(i+1)y}$ определяется из уравнения моментов, например, относительно центра масс звена i . Линия действия реакции $Q_{(i+1)y}$ проходит на расстоянии u_i от оси шарнира звена i :

$$u_i = p_{ix} - q_{ix}.$$

Соответственно,

$$\sum \bar{M}_{si} = \bar{p}_i \times \bar{Q}_i - \bar{q}_{ix} \times \bar{Q}_{(i+1)y} + \bar{r}_i \times \bar{F}_i = J_{si} \bar{\epsilon}_i,$$

откуда для плоского движения (см. рис. 5.5)

$$q_{ix} = \frac{-J_{si}\epsilon_i + |\bar{p}_i \times \bar{Q}_i| + |\bar{r}_i \times \bar{F}_i|}{Q_{(i+1)y}}. \quad (5.116)$$

Аналогично можно рассмотреть кулисную пару, содержащую два концевых шарнира с промежуточной поступательной парой (рис. 5.6).

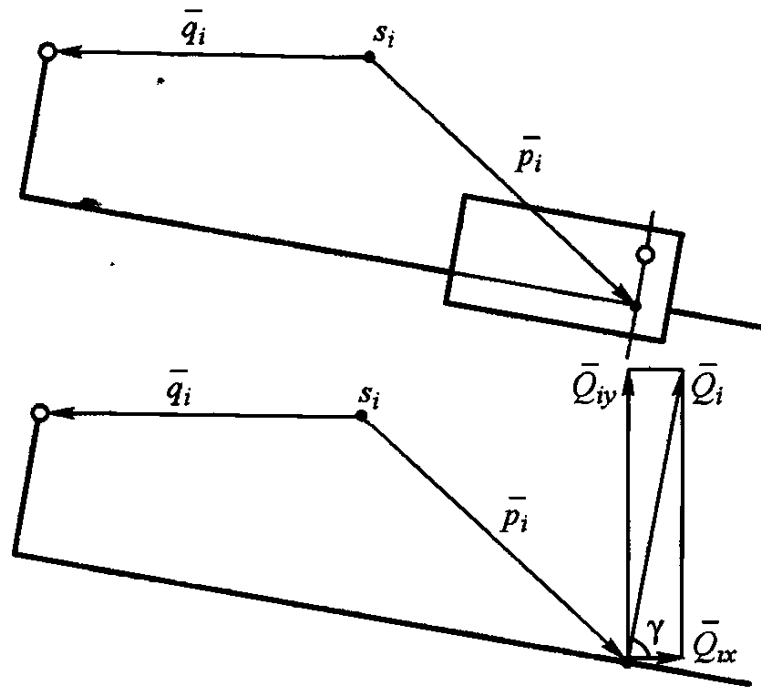


Рис. 5.6

В общем случае точка приложения реакции в поступательной паре звена (направляющей) смещена относительно оси его вращательной пары, причем это обстоятельство не влияет на значение реакции. Так как реакция направлена перпендикулярно образующей поступательной пары,

$$Q_{ix} = Q_i \cos \gamma;$$

$$Q_{iy} = Q_i \sin \gamma.$$

Это позволяет осуществить свертку системы уравнений движения. В соответствии с (5.5)

$$\begin{aligned} \cos \gamma \cdot Q_i - Q_{(i+1)x} &= m_i a_{six} - F_{ix}; \\ \sin \gamma \cdot Q_i - Q_{(i+1)y} &= m_i a_{siy} - F_{iy}; \\ (-p_{iy} \cos \gamma + p_{ix} \sin \gamma) Q_i - |\bar{q}_i \times \bar{Q}_{i+1}| &= J_{si} \epsilon_i - M_i - |\bar{r}_i \times \bar{F}_i|, \end{aligned} \quad (5.12)$$

откуда матрица коэффициентов и вектор неизвестных в соответствии с (5.4) имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma & -1 & Q_i \\ \sin \gamma & 0 & -1 \\ -p_{iy} \cos \gamma + p_{ix} \sin \gamma & q_{iy} & -q_{ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_{(i+1)x} \\ Q_{(i+1)y} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Особенности расчета двойного шарнира (рис. 5.7, а) или шарнира, к оси которого приложена сосредоточенная сила (рис. 5.7, б), определяются конструкцией шарнира. В зависимости от нее распределяются реакции в парах звеньев, составляющих шарнир (рис. 5.7, в).

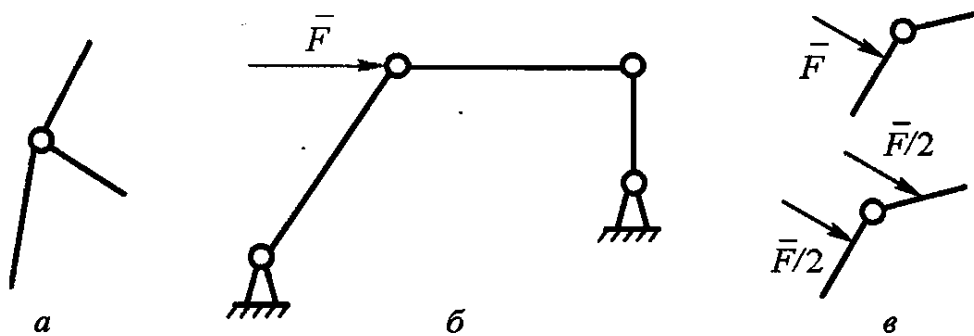


Рис. 5.7

Данный подход распространяется на расчет пространственных механизмов с любым классом кинематических пар и $w > 1$.

5.5. Блочно-модульный метод составления матрицы коэффициентов

Ранее в § 5.1 было сказано, что первой нашей задачей — задачей «Теории механизмов» — является формализация подготовки системы линейных уравнений для проведения силового расчета. Под формализацией подразумевался экономичный алгоритм составления матрицы коэффициентов, векторов-столбцов правых частей системы и искомых величин. Очевидно, что ключевой в этом алгоритме является процедура составления матрицы коэффициентов системы. В свою очередь эта процедура требует упорядочения перечисления элементов механизма — подвижных звеньев и кинематических пар. Для этого рассмотрим фрагмент замкнутой кинематической цепи (рис. 5.8).

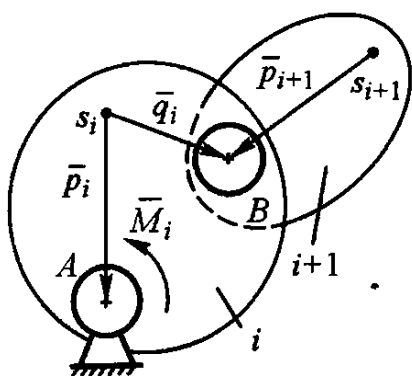


Рис. 5.8

Здесь i — начальное звено, к которому приложен неизвестный внешний момент M_i ; $(i + 1)$ — звено, смежное со звеном i . Назовем пару A_i — входной парой начального звена i ; B_i — выходной парой звена i ; B_{i+1} — входной парой звена $(i + 1)$. Тогда матрица коэффициентов системы линейных уравнений (5.9), описывающих состояние механизма, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -p_{iy} & p_{ix} & q_{iy} & -q_{ix} & & & \\ & & & 1 & 0 & -1 & \dots & \\ & & & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & & & -p_{(i+1)y} & p_{(i+1)x} & q_{(i+1)y} & \dots & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Можно выделить три типовых блочных матрицы коэффициентов:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -p_{iy} & p_{ix} \end{pmatrix}; \quad (5.14a)$$

$$O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ q_{iy} & -q_{ix} \end{pmatrix}; \quad (5.14b)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -p_{(i+1)y} & p_{(i+1)x} \end{pmatrix}. \quad (5.14b)$$

Для удобства описания состояния механизма введем следующие обозначения модулей матрицы коэффициентов. Обозначение состоит из двух букв и верхнего и нижнего индексов. Первая буква обозначения показывает вид кинематической пары: R (revolute pair) — вращательная, P (prismatic pair) — поступательная. Вторая буква показывает тип модуля: S (start) — модуль пары начального звена, E (entrance) — модуль входной пары звена, O (out) — модуль выходной пары звена. Верхний индекс 0 указывает на расчет без учета трения. Отсутствие верхнего индекса указывает на модуль общего вида. Нижний индекс указывает на номера смежных звеньев. Так как реакция выходной пары звена i и входной пары звена $(i + 1)$ составляет векторный нуль: $\bar{Q}_{Bi} + \bar{Q}_{B(i+1)} = 0$, целесообразно реакцию выходной пары звена i рассматривать как $\bar{Q}_{Bi} = -\bar{Q}_{B(i+1)}$.

Для пояснения порядка назначения нижних индексов запишем фрагмент матрицы коэффициентов (5.9) в блочно-модульной форме (5.14а)–(5.14в):

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} S_{i(i-1)} & O_{i(i+1)} & \\ \hline & E_{(i+1)i} & \dots \\ \hline & & \dots \end{array} \right). \quad (5.15)$$

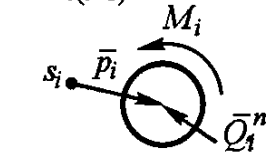
Для шарнирного четырехзвенника (0 — стойка, 1 — кривошип, начальное звено, 2 — шатун, 3 — коромысло) матрица (5.15) принимает вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} RS_{10} & RO_{12} & & \\ \hline & RE_{21} & RO_{23} & \\ \hline & & RE_{32} & RO_{30} \end{array} \right). \quad (5.16)$$

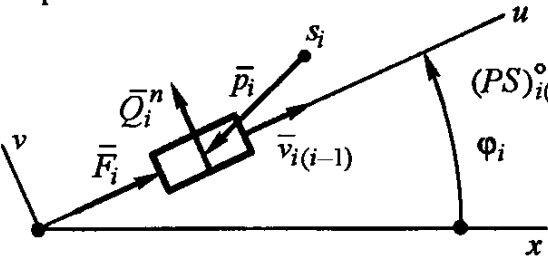
Итак, описание матрицы коэффициентов системы линейных уравнений для проведения силового расчета может быть выполнено на базе шести модулей, каталог которых приведен на рис. 5.9, причем положение поступательной пары определяется углом между осью абсцисс в абсолютной системе координат и направлением относительной скорости пары.

По результатам расчета без учета трения определяются не только реакции в парах, но и точки их приложения, что нужно для проведения следующей итерации — силового расчета с учетом трения.

Входные пары начальных звеньев

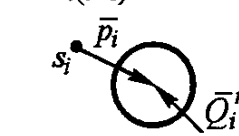
$(RS)_{i(i-1)}^o$


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -p_{iy} & p_{ix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ Q_{ix}^n \\ Q_{iy}^n \end{bmatrix}$$

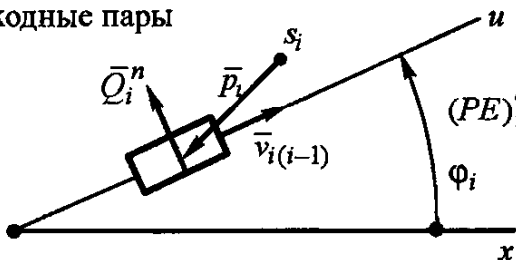


$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \\ -p_{iv} & p_{iu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ Q_i^n \end{bmatrix}$$

Входные пары

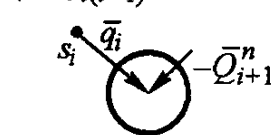
$(RE)_{i(i-1)}^o$


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -p_{iy} & p_{ix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ix}^n \\ Q_{iy}^n \end{bmatrix}$$

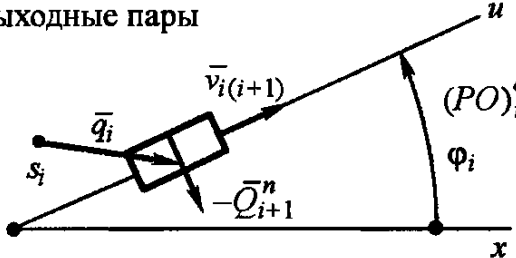


$$\begin{bmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \\ p_{iu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^n \end{bmatrix}$$

Выходные пары

$(RO)_{i(i+1)}^o$


$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ q_{iy} & -q_{ix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{(i+1)x}^n \\ Q_{(i+1)y}^n \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -\sin \varphi_{i+1} \\ \cos \varphi_{i+1} \\ -q_{iu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{i+1}^n \end{bmatrix}$$

Рис. 5.9

Для машин с маховичным приводом правомочно допущение о том, что направления относительных скоростей звеньев плоских рычажных механизмов определяются движением приводных звеньев. Тогда при допущении о наличии сухого трения и малом значении коэффициента трения подход расширяется на случай силового расчета с учетом трения (см. далее § 5.7).

В следующем параграфе целесообразно показать возможности приведенного формализма на примерах сложных механизмов, звенья которых содержат более двух кинематических пар.

5.6. Примеры составления матрицы коэффициентов для сложного механизма

Традиционный подход к силовому расчету основан на рассмотрении движения (равновесия) структурных групп. Он был вынужденным и приемлемым, когда в расчетах царили графоаналитические методы. Силовой расчет механизмов высоких классов был чрезвычайно неприятным, так как требовал создания оригинальных методов расчета каждой модификации структурных групп. Описание силового расчета механизмов высоких классов можно было встретить не в каждом учебнике.

Однако применение методов матричной алгебры в прежнее время вряд ли было оправдано — уже борьба с матрицей (4×4) наводила уныние. С появлением ЭВМ все вычислительные проблемы перешли от человека к машине. Однако теперь переложение графоаналитических методов на язык алгоритмов, особенно для механизмов высоких классов, становилось явно неэффективным. Матричные методы позволили свести задачу силового расчета механизмов любой сложности к формализованному составлению системы линейных уравнений, которую решал уже не расчетчик, а его вычислительная машина.

Рассмотрим два примера составления матрицы коэффициентов для сложных рычажных механизмов. Кинематические пары на рисунках могут быть как вращательными, так и поступательными.

Пример 1 (рис. 5.10). Механизм содержит пять подвижных звеньев и семь низших пар, т. е. $w = 1$. Искомое внешнее воздействие приложено к звену 1 (M_1). В этом случае в состав механизма входит один первичный механизм и структурная группа 4-го класса 2-го порядка.

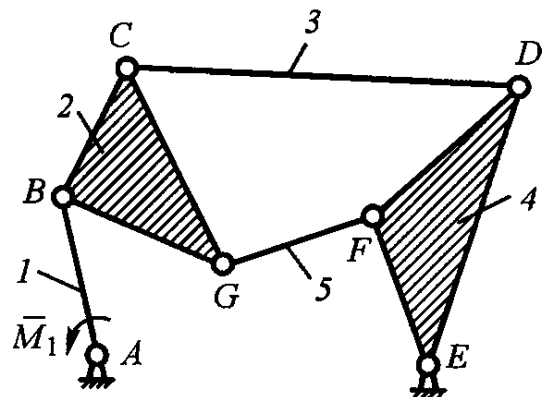


Рис. 5.10

Рассмотрим реакции в кинематических парах каждого подвижного звена (рис. 5.11).

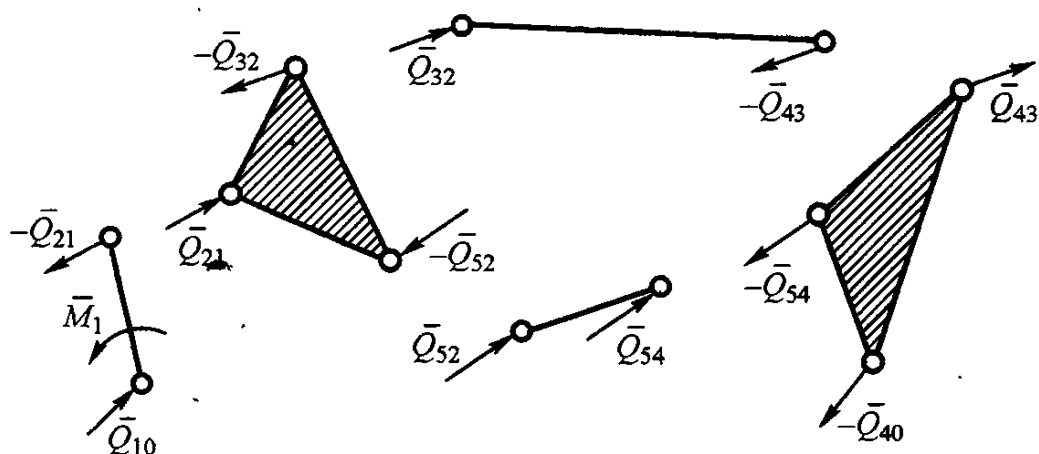


Рис. 5.11

Искомыми помимо момента M_1 являются семь векторов реакций в кинематических парах. Матрица коэффициентов системы линейных уравнений составляется из двенадцати модулей:

Звено	Пара						
	A	B	C	D	E	F	G
1	S_{10}	O_{12}					
2		E_{21}	O_{23}	O_{25}			
3			E_{32}		O_{34}		
4					E_{43}	O_{40}	O_{45}
5				E_{52}			E_{54}

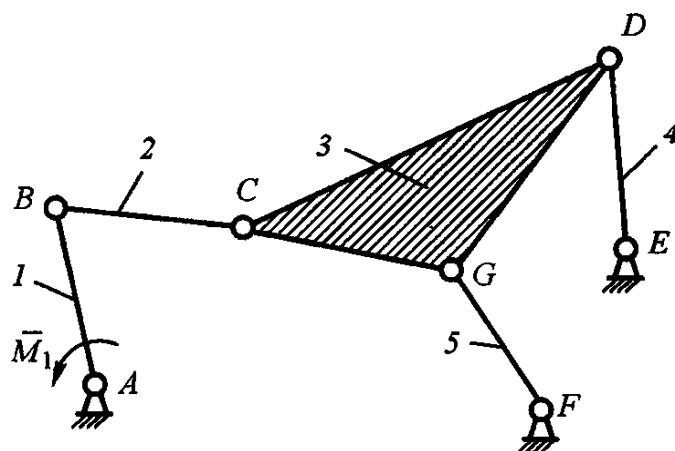


Рис. 5.12

Пример 2 (рис. 5.12). Механизм также содержит пять подвижных звеньев и семь низших пар, т. е. $w = 1$. Искомое внешнее воздействие приложено к звену 1 (M_1). Но в этом случае в состав механизма помимо одного первичного механизма входит структурная группа 3-го класса 3-го порядка. Блочная матрица коэффициентов может быть представлена в следующем виде:

Звено	Пара						
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
1	S_{10}	O_{12}					
2		E_{21}	O_{23}				
3			E_{32}	O_{35}		O_{34}	
4						E_{43}	O_{40}
5				E_{53}	O_{50}		

Ей соответствует следующая матрица коэффициентов (плечи моментов реакций для простоты обозначены *):

Звено	M_1	Q_{ij}													
		10x	10y	21x	21y	32x	32y	53x	53y	43x	43y	40x	40y	50x	50y
1		1		-1											
			1		-1										
	1	*	*	*	*										
2				1		-1									
					1		-1								
				*	*	*	*								
3						1		-1		-1					
							1		-1		-1				
						*	*	*	*	*	*				
4										1		-1			
											1		-1		
										*	*	*	*		
5								1						-1	
									1						-1
								*	*					*	*

5.7. Особенности учета сил трения

Ранее было принято допущение о пропорциональности сил трения и нормальных составляющих реакций в кинематических парах. В этом случае силы трения являются тангенциальными составляющими реакций. Это позволяет свести задачу об определении реакций в кинематических парах с учетом сил трения к линейной.

Получить точное решение было бы возможно, если бы нам были известны точки приложения реакций в кинематических парах. Однако именно они неизвестны. Поэтому поневоле задачу решают методом последовательных приближений: по результатам расчета без учета трения определяют точки приложения реакций; далее находят нормальные и тангенциальные составляющие реакций и уточняют точки приложения реакций. После этого можно проводить следующую итерацию. Нужно отметить, что в связи с достаточной малостью коэффициентов трения разница между полной и нормальной составляющими реакций для четырехзвенных механизмов мала. Влияние трения заметно сказывается на значении полного внешнего воздействия, а влияние на модуль и направление реакций может оказаться существенным для многозвенных механизмов.

Итак, трение в кинематических парах можно учитывать, используя матричный метод расчета. Основным соотношением является связь между нормальной и тангенциальной составляющей полной реакции (1.15): $Q^{\tau} = fQ^n$, где Q^{τ} — сила трения.

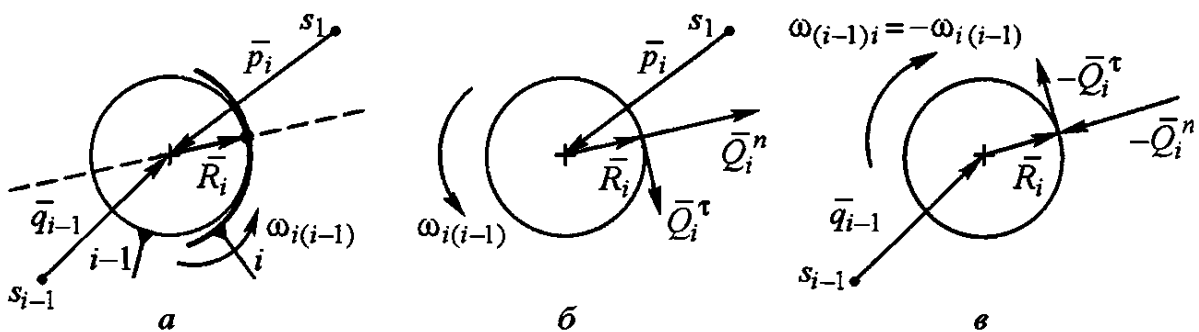


Рис. 5.13

На рис. 5.13, а показано сопряжение звеньев вращательной парой, соединяющей звенья $(i - 1)$ и i . Звенья имеют угловые скорос-

ти ω_{i-1} и ω_i . Положение точки контакта элементов пары определяется вектором $\bar{R}_i$. Картина нагружения входной пары звена i показана на рис. 5.13, б, выходной пары звена $(i-1)$ — на рис. 5.13, в. Направление относительной скорости $\omega_{i(i-1)}$ скольжения звена i по звену $(i-1)$ определяет направление силы трения $\bar{Q}_i^r$.

Введем единичный вектор $\bar{e}_i$, определяющий направление относительной угловой скорости:

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{\omega}_{i(i-1)}}{|\omega_{i(i-1)}|}; \quad e = \pm 1. \quad (5.17)$$

Тогда вектор силы трения определяется как

$$Q_i^r = f_i(-\bar{e}) \times \bar{Q}_i^n = f_i \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -e \\ Q_{ix}^n & Q_{iy}^n & 0 \end{pmatrix} = f_i e_i Q_{iy}^n \bar{i} - f_i e_i Q_{ix}^n \bar{j}. \quad (5.18a)$$

Соответственно,

$$Q_x^r = f_i e_i Q_{iy}^n; \quad Q_y^r = -f_i e_i Q_{ix}^n. \quad (5.18b)$$

Теперь нагружение входного шарнира звена i описывается выражениями

$$\begin{aligned} X: & \quad Q_{ix}^n + f_i e_i Q_{iy}^n; \\ Y: & \quad -f_i e_i Q_{ix}^n + Q_{iy}^n; \\ M_s: & \quad (\bar{p}_i + \bar{R}_i) \times (\bar{Q}_i^n + \bar{Q}_i^r) = \\ & \quad = [-p_{yi} - f_i e_i (p_{ix} + R_{ix})] \bar{Q}_{ix}^n + [p_{xi} - f_i e_i (p_{iy} + R_{iy})] \bar{Q}_{iy}^n. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Матричное представление (5.19) имеет вид

$$RE_{i(i-1)} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & f_i e_i \\ -f_i e_i & 1 \\ \hline -p_{yi} - f_i e_i (p_{ix} + R_{ix}) & p_{xi} - f_i e_i (p_{iy} + R_{iy}) \end{array} \right) \begin{pmatrix} Q_{ix}^n \\ Q_{iy}^n \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Матричное представление нагружения входной пары начального звена имеет вид

$$RS_{i(i-1)} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & RE_{i(i-1)} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_i \\ Q_{ix}^n \\ Q_{iy}^n \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

На основании рис. 5.13, в описывается нагружение выходного шарнира звена $(i-1)$:

$$RO_{(i-1)i} = \begin{pmatrix} -1 & -f_i e_i \\ f_i e_i & -1 \\ q_{(i-1)y} + f_i e_i (q_{(i-1)x} + R_{xi}) & -q_{(i-1)x} + f_i e_i (q_{(i-1)y} + R_{iy}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ix}^n \\ Q_{iy}^n \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Рассмотрим поступательную пару.

Как отмечено ранее в § 1.5 и далее в § 5.4, в результате силового расчета для поступательной пары определяется равнодействующая в ней и точка ее приложения. Действительные реакции в поступательной паре определяются характером нагружения всего звена, содержащего поступательную пару. Звенья, образующие поступательную пару, имеют две точки контакта при допущении об абсолютно твердом теле. В зависимости от положения равнодействующей относительно поступательной пары сила трения может быть как пропорциональна, так и непропорциональна равнодействующей (см. рис. 1.17).

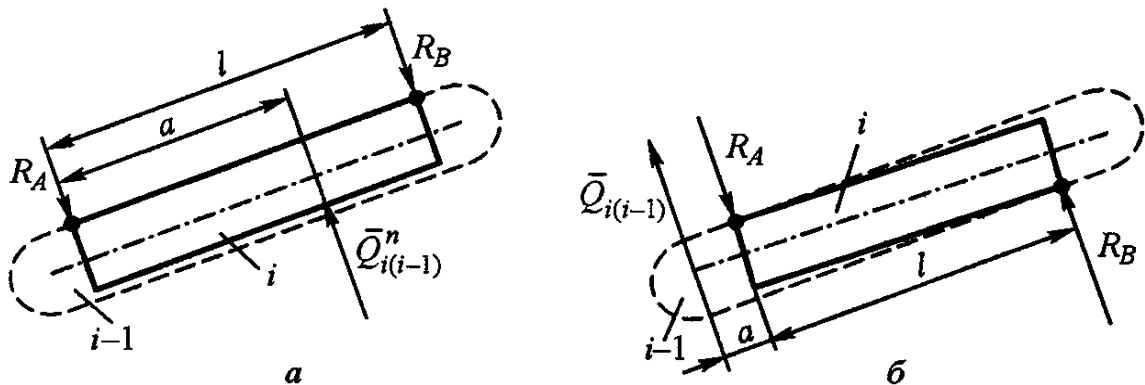


Рис. 5.14

Если равнодействующая расположена между точками контакта, охватываемое звено прижимается к одной стороне охватывающего звена (рис. 5.14, а). Тогда сила трения пропорциональна равнодействующей (обе реакции в точках контакта направлены против равнодействующей):

$$R_A = \frac{l-a}{l} Q^n; \quad R_B = \frac{a}{l} Q^n; \quad |R_A| + |R_B| = |Q^n|; \quad Q^\tau = f Q^n.$$

В другом случае (рис. 5.14, б) получаем

$$R_A = \frac{a}{l} Q^n; \quad R_B = \frac{l+a}{l} Q^n; \quad |R_A| + |R_B| > |Q^n|; \quad Q^\tau = f \left(1 + \frac{2a}{l} \right) Q^n,$$

т. е. $Q^\tau > f Q^n$.

Принимаем, что

$$Q^\tau = f A Q^n; \quad A=1 \quad \text{или} \quad A=1 + \frac{2a}{l}.$$

Для описания матричных модулей поступательных пар помимо соглашения об определении положения пары $\angle \varphi = \angle(x, \bar{v}_{\text{отн}})$ вводится соглашение о направлении нормальной и тангенциальной составляющих реакции и направлении внешней силы, приложенной к начальному звену (рис. 5.15):

$$\angle(\bar{x}, \bar{Q}^n) = \varphi + 90^\circ; \quad \angle(\bar{x}, \bar{Q}^\tau) = \varphi + 180^\circ; \quad \angle(\bar{x}, \bar{F}) = \varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_x^n &= Q^n \cos(\varphi + 90^\circ); \\ Q_x^\tau &= Q^\tau \cos(\varphi + 180^\circ); \\ Q_y^n &= Q^n \sin(\varphi + 90^\circ), \end{aligned} \quad (5.23)$$

откуда

$$\begin{aligned} Q_y^\tau &= Q^\tau \sin(\varphi + 180^\circ); \\ -(\bar{q} \times \bar{Q}) &= -(\bar{q}_u \times \bar{Q}^n + \bar{q}_v \times \bar{Q}^\tau); \\ \bar{p} \times \bar{Q} &= \bar{p}_u \times \bar{Q}^n + \bar{p}_v \times \bar{Q}^\tau; \end{aligned}$$

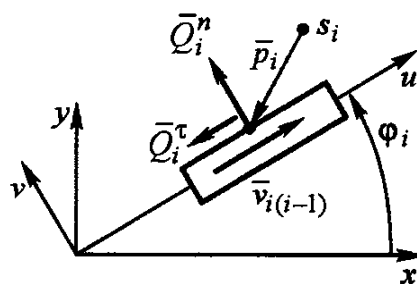


Рис. 5.15

$$PE_{i(i-1)} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_i - A_i f_i \cos \varphi_i \\ \cos \varphi_i - A_i f_i \sin \varphi_i \\ p_{iu} + f_i A_i p_{iv} \end{pmatrix} (Q_i^n); \quad (5.24a)$$

$$PS_{i(i-1)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & PE_{i(i-1)} \\ \sin \varphi_i & PE_{i(i-1)} \\ p_{iv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i \\ Q_i^n \end{pmatrix}; \quad (5.24б)$$

$$PO_{(i-1)i} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_i + A_i f_i \cos \varphi_i \\ -\cos \varphi_i + A_i f_i \sin \varphi_i \\ -q_{(i-1)u} + A_i f_i q_{(i-1)v} \end{pmatrix} (Q_i^n). \quad (5.24в)$$

Завершая этот параграф, следует сделать два замечания.

Первое — то, с которого этот параграф начинался: необходимость выполнения условия пропорциональности между нормальной составляющей реакции в кинематической паре и силой трения в ней.

Второе замечание касается устойчивости решения и связано с выбранным методом — методом последовательных приближений. Нулевое приближение — определение реакций в кинематических парах без учета трения, — наверное, не сулит каких-либо неприятностей, если при движении механизм не проходит особых положений, например изменение сборки. В большинстве случаев именно результаты этого приближения учитываются на начальном этапе прочностных расчетов в исходных данных, а также могут использоваться конструктором. При учете трения с практической точки зрения достаточно первого приближения расчета. Его можно использовать для уточнения направления реакций и для определения потерь в кинематических парах. Эти данные полезны при прочностных расчетах, прогнозировании возможного износа, для определения КПД машины. Разница между первым и вторым приближением ничтожна. Однако нужно иметь в виду, что все это относится к конфигурации механизма в общем случае. В крайних положениях механизма (естественно, и в случае особых положений) можно ожидать существенных ошибок. Поэтому эти положения лучше всего обходить.

6. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Что же мы получили и кому все это нужно?!

Asini exiquo pabulo vivunt.*

Латинская пословица

Обслуживание внутренних нужд ТММ, исходные данные для проведения предварительных расчетов на прочность элементов конструкции, конструирования и последующих исследований динамики машины, исходные данные для расчета привода, предложения по управлению движением.

Наверное, самое трудное теперь — толково объяснить, что проделанная работа не прошла впустую и изложенные задачи пригодятся в дальнейшем. Попытаемся хоть как-то показать области применения полученных моделей и решений (не судите строго — музыканты играют, как умеют). Во всяком случае, здесь представлен минимальный перечень возможных продолжений полученных результатов.

Мы научились решать и решаем несколько задач динамики механизмов. Это задачи о цикловом движении (определение закона движения и постоянной составляющей момента инерции звена приведения); задачи о нецикловом движении (управление движущей силой и скоростью при заданном и свободном конечном времени операции); задача об определении сил в кинематических парах с учетом и без учета трения.

Ясно, что полностью охватить все возможные случаи не только нет возможности, но и представляется бессмысленным.

Перечень решенных задач может быть расширен новыми и дополнен задачами оптимизации, которые здесь в принципе не рас-

* Ослы питаются скудным кормом (лат.).

сматривались. Мы исходили из убеждения: было бы решение, а оптимизаторы найдутся. Однако нам кажется, что предложенные подходы позволят решить если не все, то многие другие задачи.

Итак, результатом динамического синтеза являются:
числа

$$t_{\text{оп}}, J_c, (A_c)_{\text{оп}}, (M_d)_{\text{ср}}$$

и зависимостей

$$F(s) \text{ или } M(\varphi); Q(q); v(q) \text{ или } \omega(q),$$

где q — координата точки (звена) приведения.

Все результаты можно представить как функции времени, перейти от (угловых) скоростей точки (звена) приведения к скорости и ускорению любой точки или звена механизма.

Результатов немного. Но назвать их ненужными или малозначимыми нельзя. Каждый из них имеет свое продолжение в последующих расчетах (см. рис. 1.2). Какова же судьба полученных результатов при дальнейшем проектировании? Распределим полученные результаты в следующие четыре группы:

- 1) *данные для обслуживания внутренних нужд ТММ;*
- 2) *исходные данные для проведения предварительных расчетов на прочность элементов конструкции, конструирования и последующих исследований динамики уже не механизма, а МАШИНЫ;*
- 3) *исходные данные для расчета привода (электро-, гидро- и т. д.);*
- 4) *предложения по управлению движением механизма.*

Естественно, результаты расчетов могут использоваться в каждой из этих групп. Рассуждения о полезности проведенных расчетов сведены в табл. 6.1.

Попробуем на основе табл. 6.1 проследить хотя бы в общих чертах судьбу полученных результатов. Ядром концепции проектирования (см. рис. 1.2) является блок «Оценка основных конструктивных параметров машины». В этом блоке используют результаты «Силового расчета», «Динамического синтеза», «Расчета параметров привода».

Таблица 6.1

Результаты расчета	Область применения			
	ТММ	Конструирование, расчеты на прочность	Расчеты параметров электропривода, гидропривода	Управление движением
J_c	+	+	+	+
$t_{оп}$	—	—	+	+
$F_d(s); M_d(\varphi)$	—	+	+	+
$v(s); \omega(\varphi)$	+	—	+	+
Q_{ij}	—	+	—	—

Силовой расчет. Достаточно очевидной является судьба результатов силового расчета, т. е. зависимостей $Q(q)$.

Для прочностных расчетов на начальной стадии проектирования достаточно определить силы в кинематических парах без учета трения. По наибольшим их значениям и асимметрии нагрузки можно рассчитать размеры сечений элементов механизма (звеньев и кинематических пар) и перейти к конструированию. Кроме того, по виду годографа сил в паре можно говорить о силовых условиях работы кинематической пары (рис. 6.1). Эти сведения также ценны для конструктора: он может судить о возможной перекладке зазора в паре и сопутствующем этому удару в процессе движения механизма; определить ненагруженные или минимально нагруженные участки поверхности кинематической пары. Это может служить основанием для выбора точек подвода смазки.

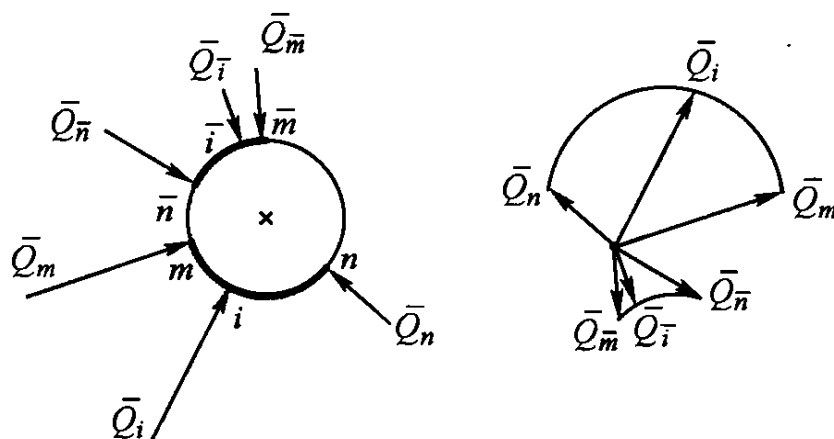


Рис. 6.1

На последующих стадиях прочностных расчетов необходима полная картина нагружения.

В общем энергетическом балансе работы машины трение играет существенную роль, особенно если в составе механизмов машины имеются исполнительные механизмы (рычажные или кулачковые) или передаточные механизмы с очень большим передаточным отношением. Например, в кривошипно-ползунном механизме прессы потери на трение могут достигать 30...50 % затраченной работы. И это объясняется не ошибками конструктора, а объективными причинами, вызванными особыми требованиями к данной машине. Соответственно, это должно учитываться при подготовке динамической модели. Изложенная методика учета сил трения позволяет учесть их влияние с достаточной для данного уровня расчетов точностью при определении приведенной силы (момента).

На начальной стадии проектирования практически невозможно просчитать ресурс машины и ее элементов. Однако на основе силового расчета можно дать сравнительные оценки ресурса конкурирующих вариантов решений по двум «слабым» критериям [3, с. 15]. Первый — износ от действия контактных напряжений в условиях сухого трения или плохой смазки заменяется интегральной оценкой Q — силой в паре. Оценка размеров кинематической пары в сочетании с результатами силового расчета и кинематического анализа позволяет говорить о втором аналоге критерия износа (qv) — произведения контактного напряжения на относительную скорость на контактной поверхности пары. Этот аналог предлагается в форме интегральной оценки (Qv). Здесь имеет смысл подчеркнуть, что речь идет именно о сравнительных оценках типа «можно ожидать, что износ по критерию Q такой-то пары механизма 1 будет больше, чем в аналогичной паре механизма 2» или «можно ожидать, что износ по критерию Qv такой-то пары механизма 1 будет меньше, чем в аналогичной паре механизма 2».

Кинематический анализ. Одним из результатов решения задачи динамики является закон движения звена (точки) приведения $q = v(q)$ или $\dot{q} = \omega(q)$. Это позволяет, используя аналоги скорости и ускорения (1-ю и 2-ю передаточные функции), найти скорости и ускорения любой точки или звена механизма:

$$\dot{\Pi}_i = \dot{q}\Pi'_i; \quad \ddot{\Pi}_i = \ddot{q}\Pi'_i + \dot{q}^2\Pi''_i.$$

Массы и моменты инерции звеньев механизма определяются в процессе конструирования.

Полученные результаты — ускорения (угловые ускорения) и массы (моменты инерции) — используются на стадии подготовки к силовому расчету для учета влияния сил инерции на силы в кинематических парах.

Если в основе вычислений масс звеньев лежит расчет на прочность, то с достаточной уверенностью можно утверждать, что влияние сил инерции на силы в кинематических парах кривошипных машин практически не сказывается при угловых скоростях кривошипа, меньших 20 рад/с.

Здесь следует еще раз сказать о том, что различие между кинематическими и метрическими характеристиками механизма — *rons asinorum* при изучении теории механизмов. Объясняется это тем, что в качестве объекта приведения принимается вращательное звено, чаще всего кривошип, т. е. непрерывно вращающееся звено, причем его угловая скорость несущественно отклоняется от своего среднего значения. В этом случае (особенно при использовании графических методов решения или графической интерпретации результатов решения) шкала времени и шкала положений кривошипа пропорциональны:

$$t = \int \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \approx \frac{\varphi}{\omega_{\text{ср}}} = c\varphi.$$

Для численных методов такие замены губительны (см. гл. 3). Заметим, что при расчете нецикловых механизмов с большими перепадами скорости на интервале движения различие между кинематическими и метрическими характеристиками бросается в глаза.

Динамический синтез. Переход от метрических характеристик (передаточных функций) элементов механизма (точек и звеньев) к их кинематике возможен только после решения задачи динамики механизма о движении точки (звена) приведения.

Важнейшим результатом динамического синтеза циклового движения является число J_c — постоянная составляющая приведенного момента инерции. На основе этого результата можно приступить к решению задачи об определении момента инерции маховых масс и о целесообразности использования маховика. Здесь эта задача не рассматривалась. Конечно, можно было бы сказать,

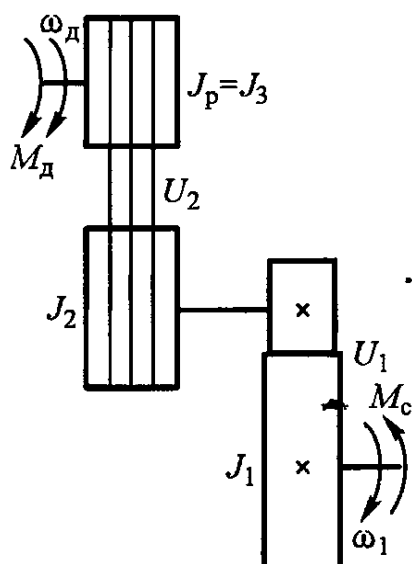


Рис. 6.2

что маховик установлен на таком-то валу привода, прочие вращающиеся массы имеют такие-то моменты инерции, учесть их в общем составе J_c и далее найти момент инерции маховика. Однако задача эта значительно сложнее. В нее входят вопросы, связанные с податливостью системы, требованиями к условиям работы элементов привода (двигателя и передаточного механизма), а также могут входить ограничения на габарит дополнительной маховой массы (маховика). Рассмотрение этих вопросов можно найти в работах [1, 16, 17] и специальной литературе по соответствующим отраслям техники. Здесь мы даем только качественный анализ проблемы.

Пусть возмущение передается от рабочей (обрабатываемой) среды на двигатель через передаточный механизм, состоящий из зубчатой пары и (клино)ременной передачи или упругой муфты (рис. 6.2). В результате решения получен момент инерции J_c , приведенный к выходному валу передаточного механизма:

$$J_c = J_1 + J_2 U_1^2 + J_3 (U_1 U_2)^2,$$

где J_1, J_2, J_3 — моменты инерции масс, установленных на соответствующих валах; U_1, U_2 — моменты инерции звеньев.

Интуитивно понятно, что установка маховика на входном валу $J_m = J_1 = J_c - J_3 (U_1 U_2)^2 - J_2 U_1^2$ позволяет сглаживать удары от возмущения M_c в зубчатой передаче и далее в электрической цепи двигателя ременной передачи, причем в последней этот эффект усиливается за счет наличия в кинематической цепи передаточного механизма. Установка маховика на промежуточном валу

$J_m = J_2 = \frac{J_c - J_1}{U_1^2} - \frac{J_3}{U_2^2}$ позволяет сглаживать удары от возмущения

M_c на ременной передаче и далее в электрической цепи двигателя, но зубчатая передача полностью воспринимает возмущения от входного вала. При установке маховика на валу двигателя воз-

мушения от входного вала будут сглаживаться только ременной передачей. Казалось бы, что для сглаживания возмущений по всей цепи от входного вала до двигателя предпочтительной является установка маховика на входном валу и ни в коем случае не на валу двигателя. Однако при установке маховика на промежуточном валу его линейные размеры существенно уменьшаются: $L_1 / L_2 = (U_1)^{2/5}$. Для тихоходных машин это обстоятельство является существенным, поэтому приходится идти на заведомое ухудшение условий работы зубчатой пары ради уменьшения габаритов маховика.

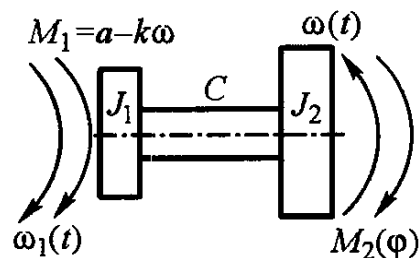


Рис. 6.3

Обсудим возможные эффекты, связанные с учетом податливости элементов системы, состоящей из маховых масс с моментами инерции J_1 и J_2 , связанных валом с податливостью C (рис. 6.3). Ясно, что в определенных ситуациях возможно появление резонанса, причём собственная частота колебательной системы зависит не только от податливости вала, но и от разложения момента инерции J_c на моменты инерции J_1 и J_2 масс, закрепленных на концах вала. Однако даже если работа системы протекает в областях, далеких от резонанса, может оказаться, что колебания, вызванные упругостью системы, будут соизмеримы с заданной малой неравномерностью вращения вала двигателя. В этом случае расчеты на основе жесткой модели не отражают физической картины явления.

Оценка параметров привода. Расчет привода позволяет дополнить конструкцию гидро- или электродвигателем. Рекомендации по выбору типов электродвигателей или гидросистем полностью выходят за рамки ТММ. Чем же мы можем быть полезны?

Электромеханический привод. Электромеханический привод состоит из электродвигателя, механической части (передаточного механизма) и системы управления. Естественно, что разработка схемы передаточного механизма, его расчет и конструирование полностью находятся в ведении курсов ТММ и деталей машин. Вопросы, связанные с расчетом параметров электродвигателя и системы управления приводом выходят за рамки ТММ. Здесь мы

отвечаем на вопросы специалистов. Основными параметрами электродвигателя являются его номинальные мощность и частота вращения (P_n , n_n) и момент инерции его ротора J_r , входящий при составлении динамической модели в состав J_c .

Укрупненно процесс назначения (выбора, расчета, подбора) электродвигателя состоит из трех этапов.

Первый этап — оценка номинальной мощности. Для этого при подготовке динамической модели определяется приведенный момент сил сопротивления (операции), в котором учтены все потери. Интегрирование этой зависимости позволяет определить затраченную работу. Отношение затраченной работы к заданному времени цикла (операции) дает *нижнюю оценку мощности привода*.

Второй этап — выбор типа электродвигателя из каталога на основе полученной оценки мощности. **Этот вопрос полностью выходит за рамки ТММ.** Помимо чисто инженерных вопросов, связанных со специальными знаниями в области электропривода, в него входят экономические, коммерческие и прочие вопросы. На этом этапе определяются три основных параметра электродвигателя: номинальные мощность и частота вращения (P_n , n_n) и момент инерции ротора J_r . *Однако номинальный режим — это режим, при котором двигатель способен работать с максимальной нагрузкой в соответствии с режимом работы, установленным изготовителем, не перегреваясь.* Понятие номинального режима конкретизируется в зависимости от характера изменения нагрузки и исполнения двигателя. Всего только 5 %-ный перегрев снижает долговечность обмотки ротора и статора вдвое! Без расчета на нагрев предыдущие расчеты — только упражнения в решении тех или иных математических задач. Выбор электродвигателя зависит от вида нагрузки (продолжительность нагружения внутри цикла), общего времени работы, структуры передаточного механизма и т. д.

Поэтому *третий этап* — проверка предварительно выбранного двигателя по нагреву и перегрузочной способности. В основе этапа лежит решение уравнения или системы уравнений движения с учетом J_r . В этой книге приведены численные и приближенные аналитические методы решения одного уравнения. Аналитические методы даны для того, чтобы показать эффекты, характеризующие

ту или иную задачу. Численные методы* позволяют получить решение с любой разумно заданной точностью. В итоге получаем график нагружения двигателя в виде зависимости момента на его валу от времени — $M_d(t)$. Решение системы уравнений в аналитическом виде удастся получать только для систем малой размерности в частных, специально подобранных случаях. Фактически всегда решение системы — численное.

Проверка предварительно выбранного двигателя по перегрузочной способности заключается в том, что максимальное значение момента на этом графике не должно превышать максимального кратковременно допустимого значения момента $M_{\max \text{ доп}}$ для выбранного типа двигателя. Для асинхронных двигателей эта величина составляет $0,8M_k$, для двигателей постоянного тока и синхронных двигателей — $2,5M_n$. При проверке двигателя по нагреву необходимо убедиться в том, что максимальное значение температуры его перегрева не превышает максимально допустимого значения. Для этого обычно используют косвенные методы, которые изучают в других дисциплинах. Точность этой проверки крайне невелика, поэтому расчетные значения принимаются с большим запасом. В случае неудовлетворительного результата подбирают другой двигатель.

Нужно отметить еще один нюанс решаемых задач — практически невозможно разделить задачи теории электропривода, теории механизмов, конструирования и т. д.** Во всяком случае, решение задачи движения входит составной частью в задачу о проектировании электропривода.

Исходными данными для этого этапа являются зависимости момента на выходном валу электродвигателя и его угловой скорости от времени:

$$M_d = M_d(t); \quad \omega_d = \omega_d(t).$$

* Как пишут некоторые авторы, «с применением ЭВМ». Однако вспоминается, что в одной работе была приведена фотография с несколькими отливками, положенными на осциллограф. В рецензии автора похвалили за то, что он в своих исследованиях применил современную исследовательскую аппаратуру — осциллограф такой-то марки (в те годы осциллограф в литейной лаборатории был действительно редкостью).

** В.И. Вернадский отмечал, что сейчас все более специализируются по проблемам, а не по научным дисциплинам.

Полученные нами зависимости $M_d = M_d(\varphi)$; $\omega_d = \omega_d(\varphi)$ элементарно перестраиваются в искомые после преобразования $t = \int \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}$. Далее с помощью параметрического преобразования зависимости $M_d = M_d(\varphi)$; $\omega_d = \omega_d(\varphi)$; $t = t(\varphi)$ перестраиваются в функции $M_d = M_d(t)$; $\omega_d = \omega_d(t)$.

Предложенные методы позволяют получать эти функции для любой автономной механической системы (автономная система не содержит явно независимой переменной t). Такая система в общем виде описывается дифференциальным уравнением вида

$$y' = f(x, y),$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Вопросы управления движением электропривода. В результате динамического синтеза циклового движения конструктор получает чрезвычайно важное число — приведенный момент инерции маховых масс, который, кроме того, является параметром управления движением (регулятором неравномерности вращения звена приведения).

При автоматическом управлении приводом в принципе можно ввести в уравнения движения программный закон изменения параметров движения. На этой основе мы можем делать правдоподобные прогнозы о поведении механизма при различных условиях его работы. Окончательный расчет привода делают специалисты, но существенно более быстрый расчет, проделанный на основе изложенного, позволяет на ранней стадии проектирования при наличии нескольких вариантов технических решений давать им экспертные оценки.

Гидромеханический привод. Под функциональным назначением гидропривода следует понимать способ передачи механической энергии от источника к потребителю. Гидропривод обладает широкими технологическими возможностями и невысоким КПД. С его применением возникает масса проблем (не только технических, но и экологических) вызванных свойствами рабочей жидкости, циркулирующей в изолированных полостях гидромашин. Термин «гидродвигатель» не должен вводить в заблуждение. Гид-

родвигатель не является первичным источником механической энергии, а лишь ее преобразователем. Вышесказанное не является антирекламой, это предупреждение о необходимости продумать целесообразность применения гидропривода. А соблазн велик: самая высокая энергоемкость и принципиальная простота управления с высоким качеством.

Основной характеристикой гидродвигателя служит зависимость между развиваемой им движущей силой и подачей, а также наибольшее допустимое давление и подача (расход) в системе. В случае дискретного регулирования параметров привода необходимо учитывать и возможное или допустимое число переключений в системе управления.

В случае, когда определен тип гидропривода, ТММ может предложить некоторые обобщенные рекомендации по управлению гидроприводом, заключающиеся в наборе характеристик, построенных на основе упрощенных моделей при решении изложенных в гл. 4 задач динамического синтеза.

По аналогии с расчетом электропривода выделим три этапа.

Первый этап. Рассматривается принципиальный вопрос о выборе гидропривода. ***Этот вопрос полностью выходит за рамки ТММ.*** Помимо чисто инженерных вопросов, связанных со специальными знаниями в области гидропривода, в него входят также экономические, коммерческие и прочие вопросы. На этом этапе получают исходные данные для решения задачи синтеза гидромеханической системы.

Второй этап — решение задачи динамического синтеза гидросистемы, позволяющей укрупненно решить задачу об управлении: построение механической характеристики гидродвигателя и определение числа возможных переключений гидросистемы. Как и в случае с электроприводом, практически невозможно разделить задачи теории гидропривода, теории механизмов, конструирования и т. д. Во всяком случае, решение задачи движения входит составной частью в задачу о проектировании гидропривода.

Третий этап выходит за рамки ТММ, так как его целью является окончательное решение вопроса о выборе типа привода и системы управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика машинного агрегата: Учеб. пособие / Под ред. Б.И. Крюкова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1987. 76 с.
2. Силовой расчет механизмов: Учеб. пособие / О.Б. Барышникова, В.Б. Тарабарин, Г.А. Тимофеев, Л.А. Черная; Под ред. В.Б. Тарабарина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 88 с.
3. Головин А.А. Проектирование сложных рычажных механизмов: Учеб. пособие по курсу «Теория механизмов и машин». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995. 76 с.
4. Живов Л.И., Овчинников А.Г. Кузнечно-штамповочное оборудование. Молоты. Винтовые прессы. Ротационные и электрофизические машины. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Вища шк., 1985. 279 с.
5. Вибрации в технике: Справ. В 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
6. Коренев Г.В. Очерки механики целенаправленного движения. М.: Наука, 1980. 192 с.
7. Математическая статистика: Учебник / В.М. Иванова, В.Н. Калинина, Л.А. Нешумова и др. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1981. 371 с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. М.: Наука, 1986. 512 с.
9. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: Учеб. пособие для машиностроит. спец. вузов / Под ред. К.В. Фролова. М.: Высш. шк., 1986. 295 с.
10. Каазик Ю.А. Математический словарь. Таллин: Валгус, 1985. 296 с.

11. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1955. 519 с.
12. *Крюков Б.И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. М.: Машиностроение, 1984. 216 с.
13. Учебный курс гидравлики: Пер. с нем. / Сост. А. Шмит. Лор на Майне: Маннесман Рексрот ГмбХ, 1980.
14. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. М.: Наука, 1980. С. 516–529.
15. *Suh C.H., Radcliffe S.W.* Kinematics and Mechanisms Design N.-Y. — Toronto: John Wiley and Son, 1978.
16. *Кожевников С.И.* Теория механизмов и машин. Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 4-е., испр. М.: Машиностроение, 1973. 592 с.
17. *Вейц В.Л., Коловский М.З., Конура А.Е.* Динамика управляемых машинных агрегатов. М.: Наука, 1984. 352 с.