

**ОПД.Ф.02.03 ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ**  
**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ**  
**МАШИННОГО АГРЕГАТА**  
Учебное пособие

Изложены методы аналитического и графоаналитического решения задач динамического анализа и синтеза машинного агрегата с примерами решения задач. В пособии подробно разработана методика выполнения части курсового проекта по динамическому анализу и синтезу машинного агрегата с использованием компьютера.

Подготовлено по дисциплине «Теория механизмов и машин» для студентов вузов, обучающихся по машиностроительным направлениям подготовки.

# Предисловие

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов механических специальностей и направлений, изучающих курс теории механизмов и машин. Базируясь на общеобразовательных механико-математических дисциплинах, таких как математика, физика, теоретическая механика, информатика, курс является основой специальных дисциплин по проектированию машин отраслевого применения.

Динамический анализ и синтез машин – один из самых сложных и «математизированных» разделов курса теории механизмов и машин. В связи с этим использование графоаналитических методов динамического анализа и синтеза машин позволяет выработать у студентов умение образно представлять поведение нагруженной внешними силами динамической системы. Умелое использование компьютерной техники освобождает от необходимости выполнения большого объёма вычислительных операций, а применение современных компьютерных систем автоматизированного проектирования (КОМПАС, AutoCAD и др.) значительно повышает точность вычислений.

С целью выработки у студентов практического навыка динамического анализа и синтеза в конце каждой главы пособия приведены задачи с примерами решения. Кроме этого, имеются контрольные вопросы, на которые должен ответить студент, изучив соответствующую главу. При затруднениях ответы на эти вопросы можно найти в учебном пособии.

В шестой главе приведён пример динамического анализа и синтеза поперечно-строгального станка. При определении параметров динамической модели использовалась разработанная в Алтайском государственном техническом университете автоматизированная система динамического анализа в сочетании с графоаналитическими методами. Этот пример можно использовать при выполнении курсового проекта.

# Введение

Динамика машин изучает движение машин под действием приложенных к ним сил, т.е. устанавливает зависимость между массами звеньев, силами, действующими на них, и теми скоростями и ускорениями, которые приобретают точки звеньев под действием этих сил.

В этом разделе решают такие важные задачи, как определение истинного закона движения машины, определение динамических нагрузок, действующих на звенья, регулирование хода машины, проблемы, связанные с вибрацией и виброизоляцией машин, уравнивание машин и многие другие.

Изучив этот раздел, студент должен знать:

- режимы (этапы движения машины);
- методы приведения сил и масс в машине;
- виды уравнений движения машины и методики их решения;
- причины колебаний угловой скорости главного вала машины при установившемся движении;
- методы периодического регулирования хода машины.

На основании полученных знаний студент должен уметь:

- определять кинетическую энергию машины;
- считать работу и мощность сил;
- определять параметры динамической модели машинного агрегата с жесткими звеньями;
- пользоваться уравнениями движения и диаграммой энергомасс при динамическом анализе машинного агрегата;
- решать задачи динамического синтеза машинного агрегата по заданной величине коэффициента неравномерности хода машины.

Необходимо помнить, что основным предмет изучения данного пособия – это машинный агрегат, т.е. совокупность машин и механизмов для выполнения какой-либо конкретной работы. Если речь идёт о динамическом анализе и синтезе одной машины или даже одного механизма, то подразумевается, что они являются составной частью единого машинного агрегата и взаимодействуют между собой через силовые и кинематические параметры.

## Обозначения

$A_d, A_{pc}, A_{vc}$  – работа движущих сил, сил полезного сопротивления, вредного сопротивления соответственно, Дж.

$A_{изб}$  – избыточная работа, Дж.

$A_d^ц, A_c^ц$  – работа движущих сил и сил сопротивления за цикл установившегося движения, Дж.

$F_d, F_c$  – движущая сила, сила сопротивления, Н.

$F_n$  – приведённая к кривошипу сила, Н.

$G_i$  – сила тяжести  $i$ -го звена, Н.

$h_{max}$  – максимальная ордината графика, мм.

$J_{Si}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно его центра масс,  $кгм^2$ .

$J_n$  – приведённый к кривошипу момент инерции механизма,  $кгм^2$ .

$l_{AB}$  – длина звена  $AB$ , м.

$M_d, M_{pc}, M_{vc}$  – момент движущих сил, сил полезного и вредного сопротивления соответственно, Нм.

$M_n$  – приведённый к кривошипу момент внешних сил механизма, Нм.

$m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг.

$m_n$  – масса звена приведения, кг.

$P_{mn}$  – средняя мощность за цикл установившегося движения, Вт.

$S_i$  – площадь плоской  $i$ -й фигуры,  $м^2$ .

$T_i$  – кинетическая энергия  $i$ -го звена, Дж.

$T_0$  – кинетическая энергия  $i$ -го звена в начальный момент времени, Дж.

$t_c$  – время цикла установившегося движения, с.

$u_{ij}$  – передаточное отношение от  $i$ -го звена к  $j$ -му звену.

$v_{Ai}$  – линейная скорость точки  $A$   $i$ -го звена,  $м/с^2$ .

$x_0, y_0$  – координаты точки пересечения касательных, проведённых к диаграмме энергомасс под экстремальными углами, мм.

$z_i$  – число зубьев  $i$ -го зубчатого колеса.

$\delta$  – коэффициент неравномерности хода машины.

$\varphi_i, \omega_i, \varepsilon_i$  – угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение  $i$ -го звена, рад,  $с^{-1}$ ,  $с^{-2}$ .

$\mu_M, \mu_F, \mu_A, \mu_J$  – масштабные коэффициенты графического изображения момента, силы, работы, момента инерции соответственно, Нм/мм, Н/мм, Дж/мм,  $кгм^2/мм$ .

# 1 Динамические параметры и характеристики машин

В процессе работы машинного агрегата к его звеньям приложены различные силы, под действием которых эти звенья движутся по тому или иному закону.

Характер действия этих сил может быть разным: одни силы могут быть постоянными, другие – переменными и зависеть от различных кинематических параметров точек их приложения. Одни силы совершают положительную работу и способствуют движению звеньев, совершают положительную работу, другие – препятствуют движению и совершают отрицательную работу.

Действующие в машинах силы и пары сил (в дальнейшем пары сил с моментом  $M$  будем называть просто моментом  $M$ ) можно классифицировать следующим образом.

## 1.1 Движущие силы и моменты

Движущие силы и моменты  $F_d$  и  $M_d$  – это силы и моменты, работа которых за время их действия или за один цикл, если они изменяются периодически, положительна. На рис. 1.1, а показана движущая сила, работа которой будет положительна, если угол  $\alpha$  – острый; на рис. 1.1, б показан движущий момент,  $\omega$  и  $M_d$  направлены в одну сторону.

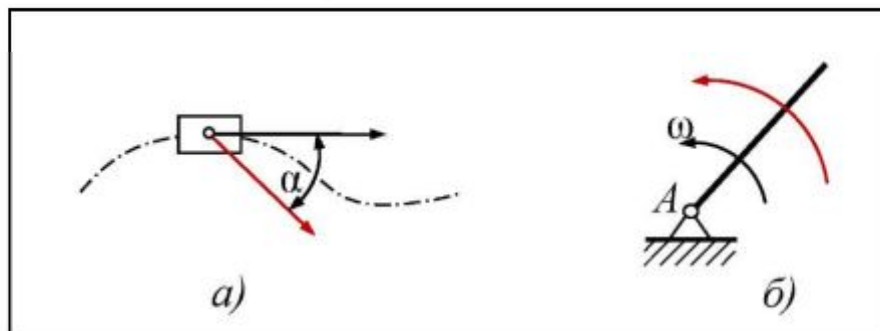


Рис. 1.1 Движущая сила и момент

Звенья, к которым приложены движущие силы и моменты, называют ведущими. К движущим силам относятся, например, силы давления газов на поршень в цилиндре двигателя внутреннего сгорания, момент, развиваемый электродвигателем, разность натяжения ветвей ремня на шкиве ременной передачи и т.д.

## 1.2 Силы и моменты сопротивления

Силы и моменты сопротивления  $F_c$  и  $M_c$  – это силы и моменты, работа которых за время их действия или за один цикл отрицательна. На рис. 1.2, *а* показана сила сопротивления, работа которой будет отрицательна, если угол  $\alpha$  – тупой; на рис. 1.2, *б* показан момент сопротивления –  $\omega$  и  $M_c$  направлены в разные стороны.

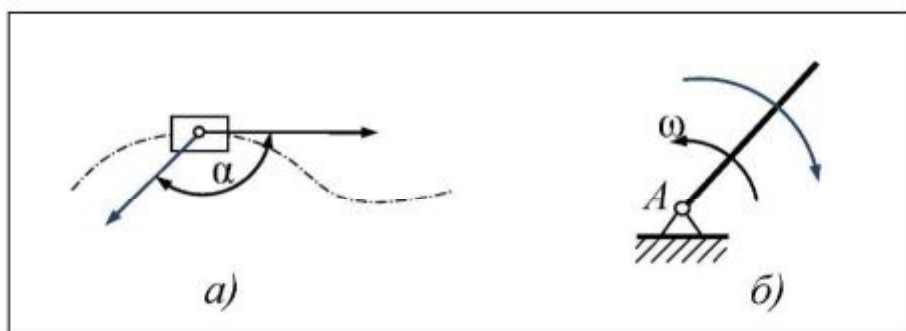


Рис. 1.2 Сила и момент сопротивления

Различают силы и моменты полезного или производственного сопротивления  $F_{пс}$  и  $M_{пс}$  и силы и моменты вредного сопротивления  $F_{вс}$  и  $M_{вс}$ .

К силам и моментам полезного сопротивления относят те силы и моменты, для преодоления которых создана данная рабочая машина. Например, это сопротивление при снятии стружки в металлорежущих станках (сила резания), вес транспортируемого груза в транспортных устройствах, сопротивление при прессовании и т.д. Звенья, к которым приложены силы полезного сопротивления, называют ведомыми.

К силам и моментам вредного сопротивления обычно относят сопротивление внешней среды: сопротивление воздуха, перемешивания жидкости и масла в масляной ванне и т.д.

## 1.3 Силы тяжести и силы упругости пружин

Работа этих сил может быть как положительной, так и отрицательной. Причём за полный кинематический цикл, когда центр масс звена или точка приложения упругой силы возвращаются в начальное положение, работа этих сил равна нулю.

## 1.4 Реакции в кинематических парах

Силы взаимодействия звеньев в кинематических парах называют реакциями. Согласно третьему закону Ньютона действие равно противодействию:

$$R_{12} = -R_{21}, \quad (1.1)$$

где  $R_{12}$  – реакция со стороны звена 1 на звено 2;  $R_{21}$  – реакция со стороны звена 2 на звено 1.

Полезно знать, что нормальные составляющие реакций работы не совершают, а касательные составляющие, т.е. силы трения, совершают отрицательную работу при относительном перемещении звеньев в кинематической паре.

## 1.5 Механические характеристики

Силы и моменты первых трех групп относятся к числу активных. Обычно они известны и считаются заданными. Эти силы и моменты приложены к механизму извне и поэтому являются внешними.

Реакции в кинематических парах для механизма в целом являются внутренними силами и пассивными, т.к. зависят от величины внешних сил.

Работу движущих сил иногда называют затраченной работой, работу сил полезного сопротивления – полезной работой, работу сил вредного сопротивления – вредной работой.

Наибольшее влияние на закон движения машины оказывают движущие силы и силы полезного сопротивления. Их физическую природу и характер изменения определяет рабочий процесс машины. В большинстве случаев эти силы являются переменными, зависящими от положения звеньев или от скорости точки приложения, или от каких-либо других кинематических параметров.

*Механической характеристикой* называют функциональную зависимость силы или момента от некоторого кинематического параметра механизма. Она представляется либо в графическом, либо в аналитическом виде.

При решении задач динамики механические характеристики считаются известными. При изображении механических характеристик обычно используют следующее правило знаков: силу или

момент считают положительными, если на рассматриваемом участке пути они совершают положительную работу.

*Примечание:* иногда, для лучшего использования поля чертежа, силы (моменты) сопротивления (рис. 1.3, а) показывают в области положительных значений с обязательной отметкой на этой кривой, что это сила (момент) *сопротивления* (рис. 1.3, б).

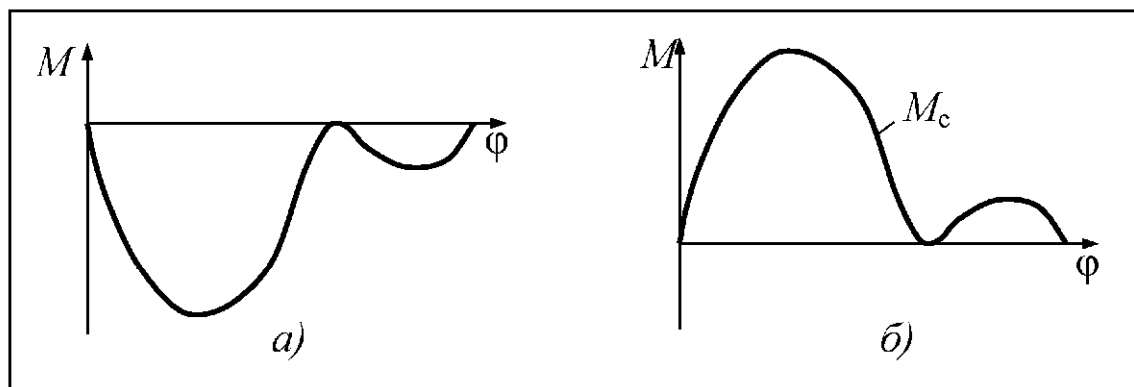


Рис. 1.3 Механическая характеристика

На рис. 1.4 показаны примеры механических характеристик различных источников движущей силы.

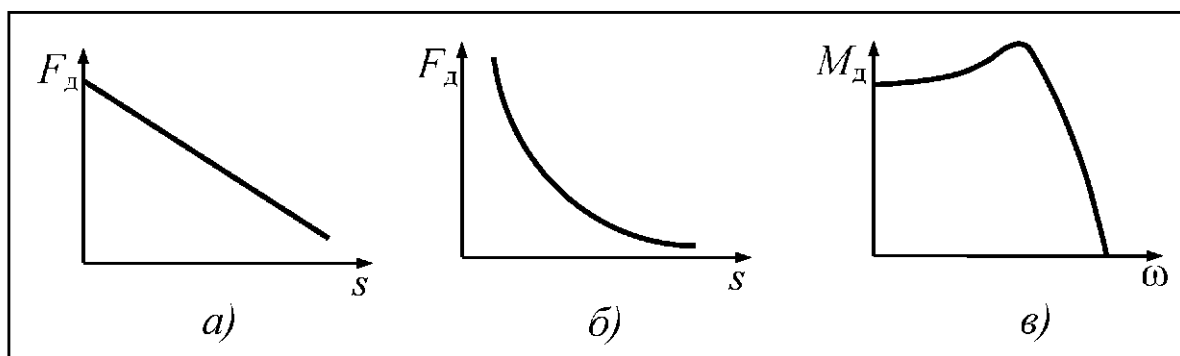


Рис. 1.4 Механические характеристики: а – пружинного двигателя; б – электромагнита; в – асинхронного электродвигателя

Изменяя параметры физического процесса, происходящего в машинном агрегате, получают семейство механических характеристик этого агрегата.

Например, на рис. 1.5 показано семейство механических характеристик двигателя внутреннего сгорания, полученное за счёт изменения количества подаваемого топлива. Параметр, за счёт которого происходит изменение механических характеристик, называют параметром управления  $h$ .

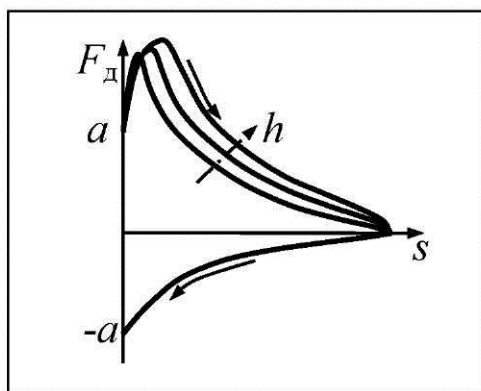


Рис. 1.5 Механические характеристики двухтактного двигателя внутреннего сгорания

## 1.6 Работа сил

Работа, производимая силой или моментом при перемещении звена, может быть подсчитана следующим образом:

$$A = \int_{s_0}^{s_i} F \cos \alpha \cdot ds, \quad (1.2)$$

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M d\varphi, \quad (1.3)$$

где  $s_0, s_i$  – начальное и конечное положение точки приложения силы  $F$ ;  $\alpha$  – угол между векторами силы и перемещения точки ее приложения;  $\varphi_0, \varphi_i$  – начальный и конечный угол поворота звена, к которому приложен момент  $M$ .

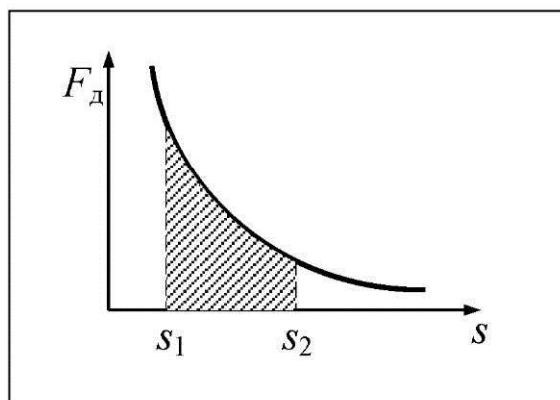


Рис. 1.6 К определению работы на интервале перемещения  $s_1 - s_2$  (рис. 1.6) вычисляется по формуле

$$A_{s_1-s_2} = P \mu_s \mu_F, \text{ Дж}, \quad (1.4)$$

где  $P$  – площадь заштрихованной под графиком фигуры,  $\text{мм}^2$ ;  $\mu_s$  – масштабный коэффициент оси абсцисс,  $\text{м/мм}$ ;  $\mu_F$  – масштабный коэффициент оси ординат,  $\text{Н/мм}$ .

Если механическая характеристика задана в виде графика, отражающего зависимость силы или момента от положения звена (рис. 1.4, а, б), то работа может быть подсчитана графическим способом. Например, для случая, показанного на рис. 1.4, б, работа силы  $F_d$

## 1.7 Кинетическая энергия машины

При решении многих задач динамики используют теорему *об изменении кинетической энергии динамической системы*: изменение кинетической энергии динамической системы на некотором её перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих в системе, на том же перемещении.

$$T_i - T_0 = A_d + A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}} + A_G, \quad (1.5)$$

где  $T_i, T_0$  – кинетическая энергия системы соответственно в  $i$ -м и начальном положении;  $A_d, A_{\text{пс}}, A_{\text{вс}}, A_G$  – соответственно работа движущих сил, сил полезного и вредного сопротивления, сил тяжести. Правую часть равенства (1.5) называют *избыточной работой* ( $A_{\text{изб}_{0-i}}$ ) при перемещении из нулевого в  $i$ -е положение.

Выражение (1.5) является уравнением движения машины в энергетической или интегральной форме. Чтобы воспользоваться этим уравнением, необходимо уметь определять кинетическую энергию машины.

*Кинетическая энергия машины равна сумме кинетических энергий всех её подвижных звеньев:*

$$T = \sum_{i=1}^n T_i. \quad (1.6)$$

Если звено совершает произвольное движение в пространстве, то его *кинетическая энергия, согласно теореме Кёнига, равна сумме кинетических энергий звена при его поступательном движении вместе с центром масс и во вращательном движении относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс*:

$$T = \frac{mv_S^2}{2} + \frac{J_S \omega^2}{2}, \quad (1.7)$$

где  $m$  – масса звена;  $v_S$  – скорость центра масс звена;  $J_S$  – момент инерции звена относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс;  $\omega$  – угловая скорость звена.

Следует иметь в виду, что в случае пространственного движения  $J_S$  является величиной переменной. Выражая  $J_S$  через моменты инерции звена относительно координатных осей с началом в центре масс звена и жёстко связанных со звеном, получим

$$T = \frac{mv_S^2}{2} + \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - J_{xy} \omega_x \omega_y - J_{yz} \omega_y \omega_z - J_{zx} \omega_z \omega_x, \quad (1.8)$$

где  $J_x, J_y, J_z$  – осевые моменты инерции;  $J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$  – центробежные моменты инерции звена.

Если выбрать в качестве координатных осей главные центральные оси инерции, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, то

$$T = \frac{mv_S^2}{2} + \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 . \quad (1.9)$$

В случае плоскопараллельного движения звена мгновенная ось во вращательном движении всегда направлена перпендикулярно плоскости движения, и момент инерции  $J_S$  является величиной постоянной, поэтому кинетическую энергию определяют по формуле (1.7).

При поступательном движении звена его угловая скорость равна нулю и скорости всех точек одинаковы, следовательно:

$$T = \frac{mv^2}{2} . \quad (1.10)$$

Если звено совершает вращательное движение вокруг некоторой оси  $A$ , не проходящей через центр масс, то его кинетическую энергию можно определять либо по формуле (1.7), либо, используя теорему Штейнера, по формуле

$$T = \frac{J_A \omega^2}{2} , \quad (1.11)$$

где  $J_A$  – момент инерции звена относительно оси  $A$ , определяемый по теореме Штейнера  $J_A = J_S + ml_{AS}^2$ .

Объединяя все случаи плоского движения звеньев, можно записать универсальную формулу определения кинетической энергии механизма (машины), включающего  $n$  подвижных звеньев:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2} . \quad (1.12)$$

*Задача 1.1.* Составить формулу для подсчёта кинетической энергии механизма долбежного станка, кинематическая схема которого изображена на рис. 1.7.

*Решение.* Кинетическая энергия механизма равна сумме кинетических энергий его подвижных звеньев:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 .$$

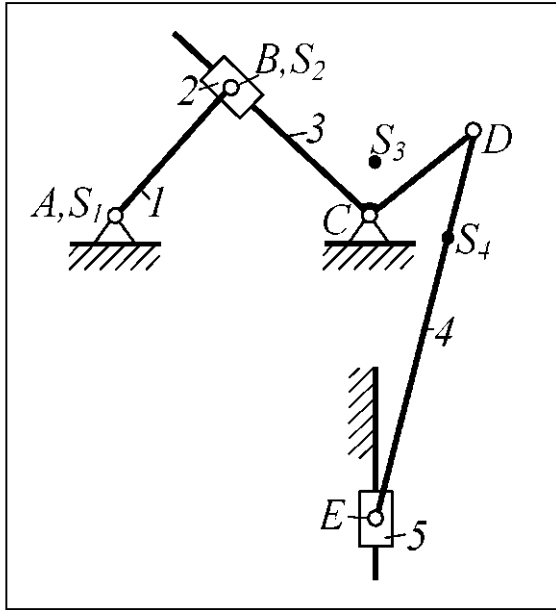


Рис. 1.7 Схема долбёжного станка

Запишем кинетическую энергию каждого звена, учитывая вид его движения. Звено 1 совершает вращательное движение; центр масс  $S_1$  совпадает с осью вращения, поэтому  $T_1 = \frac{J_{S_1} \omega_1^2}{2}$ .

Кулисный камень 2 совершает плоскопараллельное движение. Однако ввиду малости его момент инерции  $J_{S_2}$  пренебрегают, тогда:  $T_2 = \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2}$ .

Кулиса 3 вращается вокруг оси C. Центр масс  $S_3$  не совпадает с осью вращения, поэтому, используя формулу (1.11), запишем

$$T_3 = \frac{J_C \omega_3^2}{2},$$

где момент инерции  $J_C$  определим по теореме Штейнера:

$$J_C = J_{S_3} + m_3 l_{CS_3}^2.$$

Шатун 4 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическую энергию запишем, используя формулу (1.7):

$$T_4 = \frac{m_4 v_{S_4}^2}{2} + \frac{J_{S_4} \omega_4^2}{2}.$$

Ползун 5 совершает поступательное движение, поэтому на основании формулы (1.10) получим

$$T_5 = \frac{m_5 v_E^2}{2}.$$

Суммируя полученные результаты, запишем окончательно

$$T = \frac{J_{S_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{J_C \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 v_{S_4}^2}{2} + \frac{J_{S_4} \omega_4^2}{2} + \frac{m_5 v_E^2}{2}.$$

Таким образом, формула для расчёта кинетической энергии механизма долбёжного станка составлена.

## 1.8 Режимы работы машины

В зависимости от законов изменения сил, действующих в машине, и, как следствие, характера изменения кинетической

энергии машины различают три этапа или режима работы машины (рис. 1.8):

- разгон или разбег;
- установившееся движение;
- выбег или торможение.

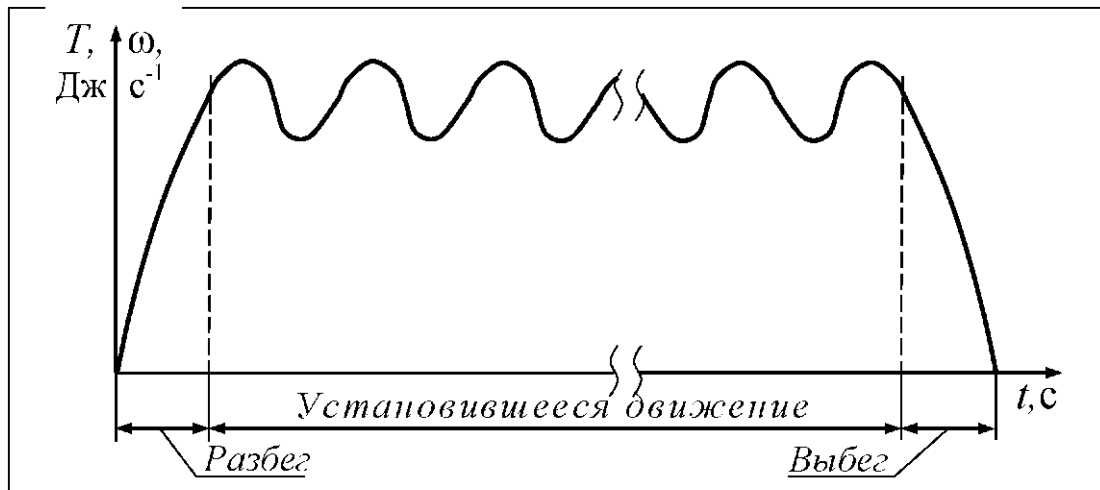


Рис. 1.8 Режимы работы машины

*Разбег* характеризуется возрастанием угловой скорости главного вала машины и её кинетической энергии от нуля до некоторого среднего значения, соответствующего рабочему режиму машины. В этом случае  $T_i - T_0 > 0$ . Время разбега должно быть малым, поэтому полезную нагрузку во время разбега не включают. С учётом этого, из (1.5) следует, что

$$A_d > A_{вс} \pm A_G. \quad (1.13)$$

*Установившееся движение* для большинства машин является наиболее продолжительным этапом работы, так как именно в это время машина выполняет те функции, для которых она предназначена. Оно характеризуется тем, что через определённый промежуток времени периодически повторяются не только положения звеньев, но и значения сил, действующих в машине, и, как следствие, все кинематические характеристики (скорости и ускорения) звеньев.

Наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяют свои параметры силы, действующие в машине, скорости и ускорения точек, называют *периодом* или *временем цикла установившегося движения*.

Очевидно, что при установившемся движении приращение кинетической энергии за цикл должно равняться нулю. Тогда из (1.5) следует, что

$$A_D^{\text{ц}} = A_{\text{пс}}^{\text{ц}} + A_{\text{вс}}^{\text{ц}}. \quad (1.14)$$

Работа сил тяжести за цикл  $A_G^{\text{ц}} = 0$ , т.к. работа потенциальных сил на замкнутом контуре равна нулю.

Из (1.14) формулируется следующий закон передачи работы при установившемся движении: *при установившемся движении работа движущих сил за цикл равна работе сил полезного и вредного сопротивления за этот же промежуток времени.*

*Выбег* или торможение характеризуется убыванием кинетической энергии и скорости главного вала машины:  $T_i - T_0 < 0$ . Для сокращения времени выбега двигатель отключают и включают тормозное устройство.

**Задача 1.2.** Моменты сил, приложенные к главному валу машины, изменяются в течение первых пяти оборотов в соответствии с графиком, показанным на рис. (1.9, а). Построить график изменения кинетической энергии вала при условии, что в начальный момент вал был неподвижным.

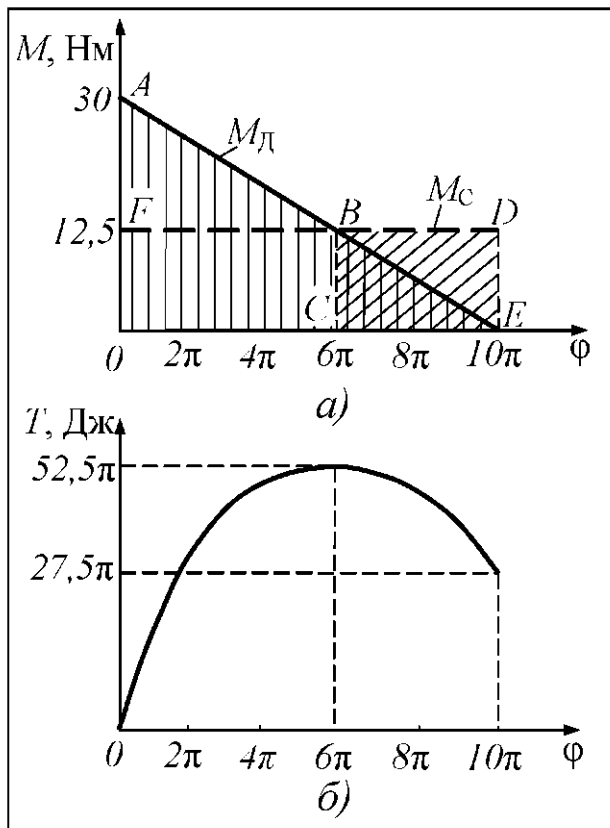


Рис. 1.9 Графики к задаче 1.2

**Решение.** На основании теоремы об изменении кинетической энергии системы запишем

$$T_i - T_0 = A_{\text{изб}_{0-i}}, \text{ где избыточная работа}$$

$$A_{\text{изб}_{0-i}} = A_{\text{до-}i} + A_{\text{с}_{0-i}}.$$

Так как в начальный момент времени кинетическая энергия  $T_0 = 0$ , то график кинетической энергии будет совпадать с графиком избыточной работы. С учётом этого запишем

$$T_i = \int_0^{\varphi_i} M_d d\varphi - \int_0^{\varphi_i} M_c d\varphi.$$

Учитывая формулу (1.4), найдем приращение кинетической энергии на первых трёх оборотах (от 0 до  $6\pi$ ):

$$T_{6\pi} = \int_0^{6\pi} M_d d\varphi - \int_0^{6\pi} M_c d\varphi = S_{0ABC} \mu_M \mu_\varphi - S_{0FBC} \mu_M \mu_\varphi, \quad (1.15)$$

где  $S_{0ABC}$  – площадь прямоугольной трапеции  $0ABC$  (рис. 1.9, а);  $S_{0FBC}$  – площадь прямоугольника  $0FBC$ .

На рис. 1.9, а оси координат отградуированы в физических единицах (рад и Нм), поэтому необходимость в масштабных коэффициентах отпадает. С учётом этого перепишем (1.15):

$$\begin{aligned} T_{6\pi} &= S_{0ABC} - S_{0FBC} = S_{\Delta FAB} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot FB = \frac{1}{2} \cdot 17,5 \cdot 6\pi = \\ &= 52,5\pi \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Аналогично найдём приращение кинетической энергии на четвёртом и пятом оборотах главного вала (от  $6\pi$  до  $10\pi$ )

$$\begin{aligned} T_{6\pi-10\pi} &= S_{\Delta BCE} - S_{CBDE} = -S_{\Delta BDE} = -\frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE = \\ &= -\frac{1}{2} 12,5 \cdot 4\pi = -25\pi \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Так как при  $\varphi = 6\pi$  кинетическая энергия  $T_{6\pi} = 52,5\pi$  Дж, то

$$T_{10\pi} = T_{6\pi} + T_{6\pi-10\pi} = 52,5\pi - 25\pi = 27,5\pi \text{ Дж.}$$

Примерный вид графика изменения кинетической энергии показан на рис. 1.9, б. Точно построить график по двум точкам невозможно. Поэтому читателю предлагается самостоятельно определить ординаты промежуточных точек в конце каждого оборота главного вала машины.

**Задача 1.3.** При установившемся движении машины моменты, приложенные к её главному валу, изменяются в соответствии с графиками, показанными на рис. 1.10. О моменте движущих сил известно, что он постоянен на протяжении всего цикла установившегося движения, и этот цикл соответствует полному обороту главного вала. Требуется определить величину движущего момента  $M_d$ .

**Решение.** Известно, что при установившемся движении работа движущего момента за цикл должна равняться работе момента сопротивления за этот же промежуток времени:  $A_d^u = A_c^u$ .

Запишем работу движущего момента за цикл

$$A_d^u = \int_0^{2\pi} M_d d\varphi = M_d \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = M_d \cdot 2\pi \text{ Дж.}$$

Найдём теперь работу момента сопротивления:

$$A_c^u = \int_0^{2\pi} M_c d\varphi = S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 100 = 50\pi \text{ Дж.}$$

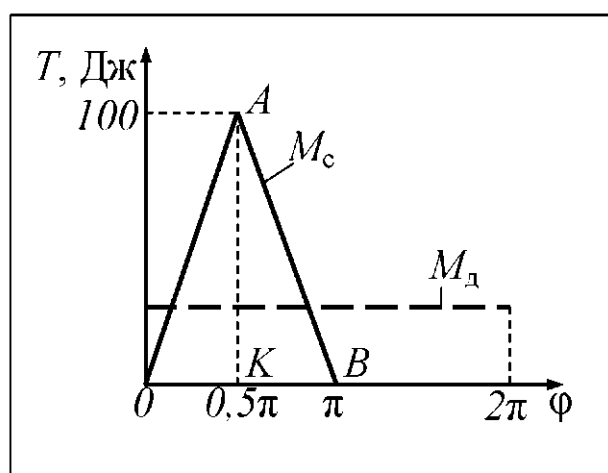


Рис. 1.10 Графики к задаче 1.3

Тогда, приравнявая правые части полученных результатов, получим:  $M_d \cdot 2\pi = 50\pi$ . Откуда  $M_d = 25$  Нм. Таким образом, движущий момент найден.

## 1.9 Контрольные вопросы

1. Что такое движущие силы?
2. Чем отличаются силы полезного сопротивления от сил вредного сопротивления?
3. Чему равна работа сил тяжести за кинематический цикл?
4. Что такое реакция в кинематической паре?
5. Дайте определение механической характеристике.
6. Как вычисляется работа силы и работа момента?
7. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии динамической системы.
8. Запишите формулы вычисления кинетической энергии звена, совершающего поступательное, вращательное и плоскопараллельное движение.
9. Какова энергетическая характеристика режимов работы машины: разбега, установившегося движения и выбега?
10. Сформулируйте закон передачи работы при установившемся движении.

## 2 Динамическая модель машины

Решение любой инженерной задачи начинают с построения расчётной схемы или расчётной модели исследуемого объекта. Расчётные модели, построенные для решения задач динамики, называют динамическими моделями.

Несмотря на высокий уровень развития математических методов исследования и средств вычислительной техники, невозможно получить модель, которая бы полно и точно описывала поведение исследуемого объекта. Поэтому при построении расчётных моделей приходится принимать ряд допущений, пренебрегать теми параметрами, которые при решении какой-либо конкретной проблемы являются несущественными.

В теории механизмов и машин при решении многих задач исследуют «идеальную» модель, в которой пренебрегают деформацией звеньев, зазорами в кинематических парах. Такая динамическая модель даёт хорошие результаты при решении динамических задач анализа, когда по заданному закону движения звена нужно найти динамические нагрузки, действующие в машине, при решении задач регулирования хода машины и некоторых других.

Кроме того, результаты, полученные при использовании «идеальной» динамической модели, в частности значения динамических нагрузок, могут быть использованы в более сложных моделях, учитывающих упругость звеньев, зазоры в кинематических парах и т.д.

### 2.1 Звено приведения

Рассмотрим методику построения «идеальной» динамической модели машинного агрегата с одной степенью подвижности, т.е. с одним входным звеном.

Как правило, машинный агрегат является достаточно сложной многозвенной системой с распределёнными массовыми и силовыми характеристиками. Исследование такой системы довольно затруднительно.

Однако, если для машинного агрегата с одной степенью подвижности найти истинный закон движения входного звена, то

затем, используя методы кинематического анализа, нетрудно определить закон движения любого другого звена или его точки.

Поэтому для машинного агрегата со степенью подвижности, равной единице, выбирают динамическую модель, состоящую из одного подвижного звена, совершающего либо вращательное, либо поступательное движение (рис. 2.1).

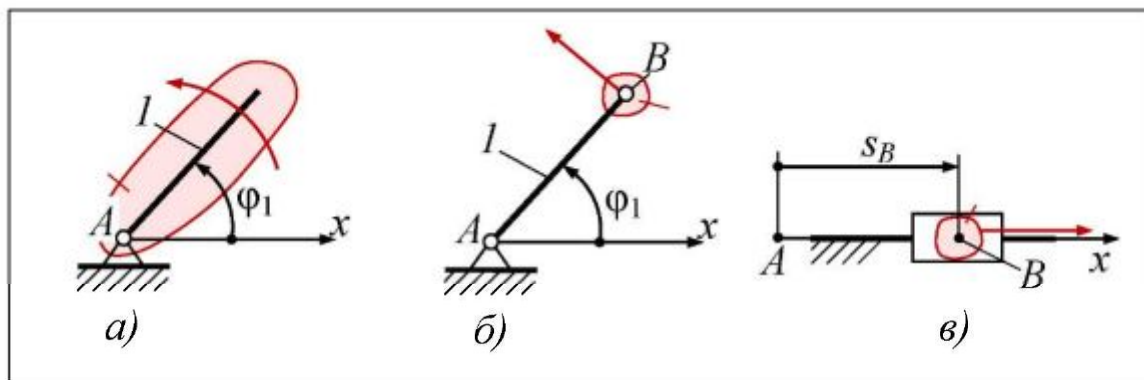


Рис. 2.1 Динамические модели

Для того чтобы это звено двигалось по тому же закону, что и в реальном механизме (машине), его нужно наделить рядом фиктивных свойств, исходя из положения, что уравнение движения, в частности теорема об изменении кинетической энергии, записанное для этого звена, должно совпадать с аналогичным уравнением, записанным для исследуемого машинного агрегата. Это произойдет в том случае, если подвижное звено динамической модели будет обладать такой фиктивной массой  $m_{\pi}$  или фиктивным моментом инерции  $J_{\pi}$ , при движении которого будет развиваться кинетическая энергия, равная кинетической энергии всей машины. Это звено должно быть нагружено такой фиктивной силой  $F_{\pi}$  или фиктивным моментом  $M_{\pi}$ , которые бы на любом элементарном перемещении производили работу, равную сумме работ всех действующих сил в машине.

Необходимо отметить, что динамические модели, изображенные на рис. 2.1, а и 2.1, б, равноценны. Между параметрами этих моделей существуют простые зависимости:

$$J_{\pi} = m_{\pi} l_{AB}^2, M_{\pi} = F_{\pi} l_{AB}.$$

Таким образом, построение динамической модели машинного агрегата сводится к приведению всех сил и масс машины к одному подвижному звену модели, называемому звеном приведе-

ния. Поэтому задачу о построении динамической модели часто называют *задачей о приведении сил и масс в машине*.

## 2.2 Приведение масс

Выше были сформулированы критерии приведения сил и масс в машине. Это позволяет дать следующее определение приведённой массе и приведённому моменту инерции.

*Приведённой к данной точке звена массой* называют такую точечную фиктивную массу  $m_{\pi}$ , при движении которой звено приведения развивает кинетическую энергию, равную кинетической энергии всей машины (механизма).

*Приведённым моментом инерции*  $J_{\pi}$  называется такой фиктивный момент инерции, обладая которым звено приведения развивает кинетическую энергию, равную кинетической энергии всей машины (механизма).

Для нахождения приведённого момента инерции (рис. 2.1, а) запишем равенство кинетических энергий звена приведения и машины (механизма)

$$\frac{J_{\pi}\omega_1^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si}\omega_i^2}{2}. \quad (2.1)$$

После преобразований получим

$$J_{\pi} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_{Si}^2}{\omega_1^2} + J_{Si} \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}. \quad (2.2)$$

Аналогично получают формулу для определения приведённой массы (рис. 2.1, б, в)

$$m_{\pi} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_{Si}^2}{v_B^2} + J_{Si} \frac{\omega_i^2}{v_B^2}. \quad (2.3)$$

Известно, что отношения в круглых скобках формул (2.2) и (2.3) называются аналогами скоростей или передаточными отношениями. Так как они определяются только геометрическими параметрами звеньев механизма (машины), зависят от положения входного звена и не зависят от закона его движения, то можно сформулировать свойства  $J_{\pi}$  и  $m_{\pi}$ .

1. В общем случае приведённый момент инерции звеньев (приведённая масса) есть величина переменная, зависящая от положения звена приведения.

2. Приведённый момент инерции (приведённая масса) есть величина, периодически повторяющаяся с периодом, равным времени одного оборота звена привода.
3. Для определения приведённого момента инерции (приведённой массы) не нужно знать истинного закона движения звена привода.

При определении приведённого момента инерции или приведённой массы аналоги скоростей могут быть найдены графоаналитическим методом – через отношения соответствующих длин отрезков плана скоростей либо аналитически.

*Задача 2.1.* Составить выражение для приведённого момента инерции рядовой зубчатой передачи, показанной на рис. 2.2. Известны моменты инерции колес относительно их осей вращения –  $J_1, J_2, J_3$ , числа зубьев колес –  $z_1, z_2, z_3$ . Звено привода – звено 1.

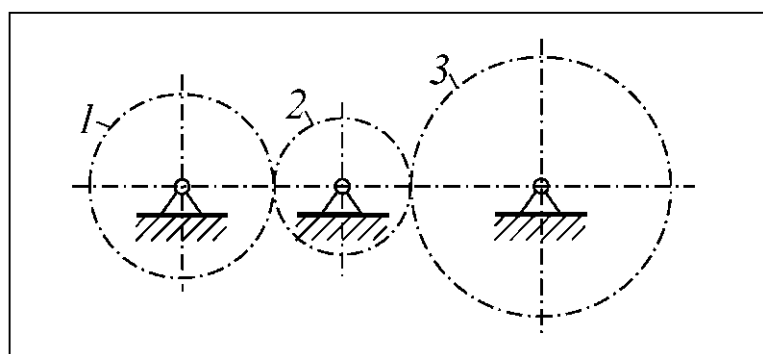


Рис. 2.2 Схема механизма к задаче 2.1

*Решение.* Так как звено привода – зубчатое колесо 1 – совершает вращательное движение, то его кинетическая энергия

$$T = \frac{J_{\text{п}} \omega_1^2}{2}. \quad (2.4)$$

Кинетическая энергия всего механизма

$$T = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}. \quad (2.5)$$

Приравняв правые части (2.4) и (2.5), получим

$$\frac{J_{\text{п}} \omega_1^2}{2} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}. \quad (2.6)$$

Отсюда

$$J_{\text{п}} = J_1 + J_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + J_3 \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2}. \quad (2.7)$$

Передаточные отношения выразим через отношения чисел зубьев:  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{z_2}{z_3} \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_3}$ . Подставив полученный результат в (2.7), окончательно запишем

$$J_{\Pi} = J_1 + J_2 \frac{z_1^2}{z_2^2} + J_3 \frac{z_1^2}{z_3^2}.$$

**Задача 2.2.** Составить выражение для определения приведённого момента инерции рычажного механизма (рис. 2.3, а), если известны размеры звеньев, их массы ( $m_i$ ) и моменты инерции относительно центров масс ( $J_{S_i}$ ). Звено приведения – звено 1. Выразить полученный результат через отношение длин отрезков плана скоростей (рис. 2.3, б).

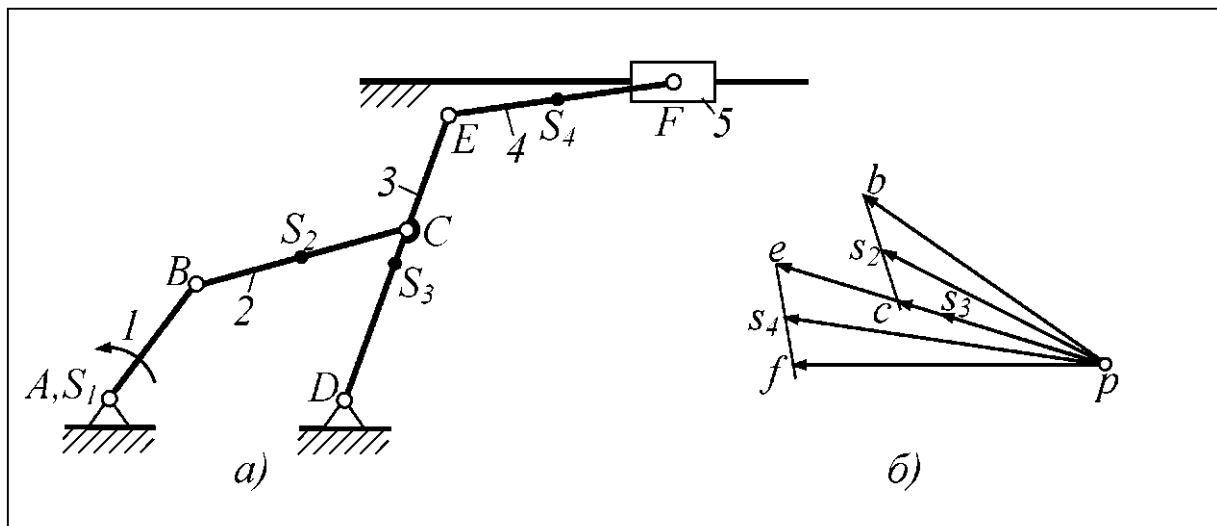


Рис. 2.3 Схема и план скоростей механизма к задаче 2.2

*Решение.* Кинетическая энергия звена приведения

$$T = \frac{J_{\Pi} \omega_1^2}{2}. \quad (2.8)$$

С учётом вида движения звеньев кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{J_{S_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{J_{S_2} \omega_2^2}{2} + \frac{J_{D_3} \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 v_{S_4}^2}{2} + \frac{J_{S_4} \omega_4^2}{2} + \frac{m_5 v_F^2}{2}, \quad (2.9)$$

где, согласно теореме Штейнера, момент инерции коромысла 3

$$J_{D_3} = J_{S_3} + m_3 l_{DS_3}^2.$$

Приравнявая правые части равенств (2.8) и (2.9), получим

$$\frac{J_{\Pi} \omega_1^2}{2} = \frac{J_{S_1} \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{J_{S_2} \omega_2^2}{2} + \frac{J_{D_3} \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 v_{S_4}^2}{2} + \frac{J_{S_4} \omega_4^2}{2} + \frac{m_5 v_F^2}{2}.$$

Поделив левую и правую части на  $\omega_1^2/2$ , запишем

$$J_{\Pi} = J_{S_1} + m_2 \frac{v_{S_2}^2}{\omega_1^2} + J_{S_2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + J_{D_3} \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} + m_4 \frac{v_{S_4}^2}{\omega_1^2} + J_{S_4} \frac{\omega_4^2}{\omega_1^2} + m_5 \frac{v_F^2}{\omega_1^2}. \quad (2.10)$$

Введя обозначения аналогов скоростей с индексом  $q$ , перепишем (2.10) в окончательном виде

$$J_{\Pi} = J_{S_1} + m_2 v_{qS_2}^2 + J_{S_2} \omega_{q2}^2 + J_{D_3} \omega_{q3}^2 + m_4 v_{qS_4}^2 + J_{S_4} \omega_{q4}^2 + m_5 v_{qF}^2.$$

Полученный результат выразим через отношение отрезков плана скоростей. Для этого выразим угловые скорости звеньев через линейные скорости их точек

$$\omega_1 = \frac{v_B}{l_{AB}}, \omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{CB}}, \omega_3 = \frac{v_C}{l_{CD}}, \omega_4 = \frac{v_{FE}}{l_{EF}}. \quad (2.11)$$

Подставив (2.11) в (2.10) и заменив линейные скорости через длины отрезков плана скоростей, получим

$$\begin{aligned} J_{\Pi} = J_{S_1} + m_2 \frac{v_{S_2} l_{AB}^2}{v_B^2} + J_{S_2} \frac{v_{CB} l_{AB}^2}{v_B l_{CB}^2} + J_{D_3} \frac{v_C l_{AB}^2}{v_B l_{CD}^2} + \\ m_4 \frac{v_{S_4} l_{AB}^2}{v_B^2} + J_{S_4} \frac{v_{FE} l_{AB}^2}{v_B l_{EF}^2} + m_5 \frac{v_F l_{AB}^2}{v_B^2} = J_{S_1} + m_2 \frac{p_{S_2}^2}{p_b^2} l_{AB}^2 + \\ + J_{S_2} \frac{c_b^2}{p_b^2} \frac{l_{AB}^2}{l_{CB}^2} + J_{D_3} \frac{p_c^2}{p_b^2} \frac{l_{AB}^2}{l_{CD}^2} + m_4 \frac{p_{S_4}^2}{p_b^2} l_{AB}^2 + J_{S_4} \frac{f_e^2}{p_b^2} \frac{l_{AB}^2}{l_{EF}^2} + \\ + m_5 \frac{p_f^2}{p_b^2} l_{AB}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, задачу 2.2 можно считать решённой.

## 2.3 Приведение сил

Одним из условий, обеспечивающих движение звена приведения по тому же закону, что и в реальном механизме, является равенство элементарной работы, производимой приведённой силой или моментом на любом возможном перемещении звена приведения, и алгебраической суммы элементарных работ всех приводимых сил и моментов. Отсюда вытекают следующие определения.

*Приведённой к данной точке звена силой* называют такую силу  $F_{\Pi}$ , элементарная работа которой равна алгебраической сумме элементарных работ всех приводимых сил и моментов.

*Приведённым к данному звену моментом  $M_{\Pi}$*  называют такой момент, элементарная работа которого равна алгебраической сумме элементарных работ всех приводимых сил и моментов.

При этом будем полагать, что линия действия приведённой силы совпадает с направлением вектора скорости точки её приложения. Пусть звено приведения – звено  $l$  (рис. 2.1), а приведённая сила приложена к точке  $B$ . Тогда из определений следует

$$F_{\Pi} \delta s_B = \sum_{i=1}^k F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^l M_j \delta \varphi_j; \quad (2.12)$$

$$M_{\Pi} \delta \varphi_1 = \sum_{i=1}^k F_i \delta s_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^l M_j \delta \varphi_j, \quad (2.13)$$

где  $k$  – число приводимых сил;  $l$  – число приводимых моментов.

Разделим левую и правую части равенств (2.12) и (2.13) на  $\delta t$ . Тогда с учётом того, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta \varphi}{\delta t} = \omega$  и  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta s}{\delta t} = v$ , получим

$$F_{\Pi} v_B = \sum_{i=1}^k F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^l M_j \omega_j; \quad (2.14)$$

$$M_{\Pi} \omega_1 = \sum_{i=1}^k F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^l M_j \omega_j. \quad (2.15)$$

Разделив (2.14) и (2.15) на  $v_B$  и  $\omega_1$  соответственно, окончательно запишем

$$F_{\Pi} = \sum_{i=1}^k F_i \frac{v_i}{v_B} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^l M_j \frac{\omega_j}{v_B}; \quad (2.16)$$

$$M_{\Pi} = \sum_{i=1}^k F_i \frac{v_i}{\omega_1} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^l M_j \frac{\omega_j}{\omega_1}. \quad (2.17)$$

Отсюда вытекает другое определение приведённой силы (приведённого момента).

*Приведённой силой (приведённым моментом)* называют такую силу (момент), которая, будучи приложенной к звену приведения, развивает мощность, равную алгебраической сумме мощностей, развиваемых всеми приводимыми силами и моментами.

Записав в (2.17) отношения скоростей через их аналоги, получим

$$M_{\Pi} = \sum_{i=1}^k F_i v_{qi} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^l M_j \omega_{qj}. \quad (2.18)$$

Аналоги скоростей могут быть найдены так же, как и при определении приведённого момента инерции (приведённой массы), графоаналитическим методом – через отношения соответствующих длин отрезков плана скоростей либо аналитически.

Анализ выражений (2.16), (2.17) позволяет сформулировать следующие свойства приведённой силы (приведённого момента).

1. В общем случае  $F_{\Pi}$  ( $M_{\Pi}$ ) есть величина переменная, зависящая от положения звена приведения.
2. При установившемся движении  $F_{\Pi}$  ( $M_{\Pi}$ ) есть величина периодически повторяющаяся, с периодом, равным времени одного цикла установившегося движения.

3. Приведённая сила (приведённый момент) не зависит от закона движения звена приведения.

**Задача 2.3.** Найти приведённый момент  $M_{\Pi}$  для зубчатого механизма, показанного на рис. 2.4, если известны моменты  $M_1$ ,  $M_3$  и числа зубьев колес –  $z_1$ ,  $z_3$ . Звено приведения – звено 1.

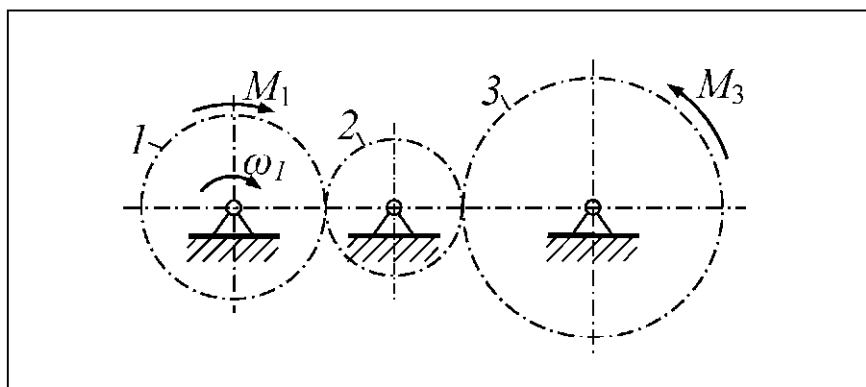


Рис. 2.4 Схема механизма к задаче 2.3

**Решение.** По формуле (2.17) имеем

$$M_{\Pi} = M_1 \omega_1 / \omega_1 - M_3 \omega_3 / \omega_1.$$

В этом выражении второе слагаемое записано со знаком «минус», так как мощность момента  $M_3$  отрицательна. Действительно, угловая скорость  $\omega_3$  направлена, как и  $\omega_1$ , по часовой стрелке. А это направление противоположно направлению  $M_3$ .

Выразив передаточное отношение  $\omega_3 / \omega_1$  через отношение чисел зубьев (см. решение задачи 2.1), окончательно получим

$$M_{\Pi} = M_1 - M_3 z_1 / z_3.$$

Задача 2.3 решена.

**Задача 2.4.** Составить выражение для определения приведённого момента  $M_{\Pi}$  сил, действующих на звенья механизма (рис. 2.5). Известны размеры звеньев, внешняя сила  $F$  и момент  $M$ . Звено приведения – звено 1.

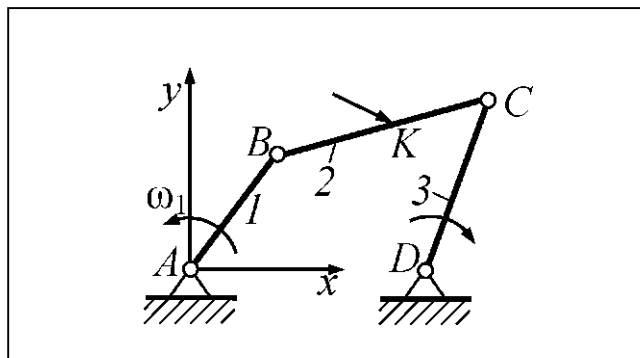


Рис. 2.5 Схема механизма к задаче 2.4

*Решение.* Используя формулу (2.17), запишем

$$M_{\Pi} = F \frac{v_K}{\omega_1} \cos \alpha + M \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad (2.19)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами силы  $F$  и скорости точки её приложения  $v_K$ .

Отметим, что слагаемые в (2.19) могут быть отрицательными, если угол  $\alpha$  – тупой и, если  $M$ ,  $\omega_3$  направлены в разные стороны.

Записав отношения скоростей в виде аналогов, получим

$$M_{\Pi} = F v_{qK} \cos \alpha + M \omega_{q3}. \quad (2.20)$$

Если сила  $F$  и аналог скорости  $v_{qK}$  заданы своими проекциями на координатные оси  $x$  и  $y$ , то выражение (2.20) запишется так:

$$M_{\Pi} = F_x v_{qKx} + F_y v_{qKy} + M \omega_{q3}.$$

Таким образом, задача 2.4 решена.

## 2.4 Определение приведённой силы с помощью рычага Жуковского

Сформулируем теорему Жуковского. *Если силу, приложенную в какой-либо точке звена механизма, перенести параллельно самой себе в одноимённую точку повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей, то момент этой силы относительно полюса плана будет пропорционален её мощности.*

Докажем эту теорему. Пусть сила  $F$  действует на звено  $AB$  в точке  $K$  (рис. 2.6, а). На рис. 2.6, б представлен фрагмент плана скоростей механизма, в состав которого входит звено  $AB$ . Перенесём силу  $F$  параллельно самой себе в точку  $k$  повернутого на  $90^\circ$  плана скоростей (рис. 2.6, в).

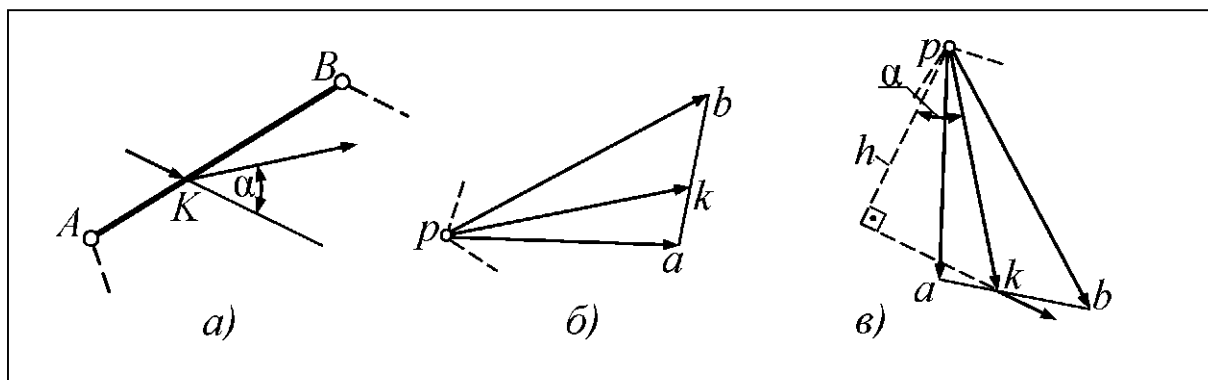


Рис. 2.6 К доказательству теоремы Жуковского

Повёрнутый на  $90^\circ$  план скоростей называют *рычагом Жуковского*. Запишем момент силы  $F$  относительно полюса  $p$ :

$$m_p F = F \cdot h = F \cdot pk \cdot \cos \alpha = F \frac{v_K}{\mu_v} \cos \alpha. \quad (2.21)$$

Не трудно увидеть, что углы  $\alpha$ , показанные на рис. 2.6, *a* и рис. 2.6, *в*, одинаковы как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. А на рис. 2.6, *a*  $\alpha$  – это угол между вектором силы  $F$  и скоростью точки её приложения  $v_K$ . Следовательно, окончательно можно записать

$$m_p F = \frac{1}{\mu_v} F v_K \cos \alpha = \frac{1}{\mu_v} P F, \quad (2.22)$$

где  $P F$  – мощность силы  $F$ . Теорема доказана.

Отметим, что теорема Жуковского справедлива только для сил, а не для моментов. Но любой момент можно представить парой сил, а каждую силу пары уже можно переносить на рычаг Жуковского.

Исходя из изложенного, заменим в (2.14) моменты  $M_j$  парами сил. Тогда равенство мощностей (2.14) можно записать так:

$$F_{\Pi} v_B = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i, \quad (2.23)$$

где  $n$  – общее число сил с учётом представления моментов парами сил.

Согласно теореме Жуковского равенство мощностей (2.23) можно заменить равенством моментов приведённой и приводимых сил относительно полюса  $p$  рычага Жуковского:

$$m_p F_{\Pi} = \sum_{i=1}^n m_p F_i. \quad (2.24)$$

Из полученного равенства моментов можно определять приведённую силу.

**Задача 2.5.** В заданном положении кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.7, *a*) определить приведённый момент  $M_{\Pi}$ , считая звено приведения – звено  $I$ . Известны: размеры звеньев  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ , внешняя сила  $F_K$  и момент  $M$ . План скоростей механизма показан на рис. 2.7, *б*.

**Решение.** Построим рычаг Жуковского (рис. 2.7, *в*), повернув план скоростей на  $90^\circ$  против часовой стрелки (направление поворота значения не имеет). Заменим приведённый момент  $M_{\Pi}$  и внешний момент  $M$  парами сил  $F_{\Pi}$ ,  $F'_{\Pi}$  и  $F$ ,  $F'$  соответственно (рис. 2.7, *a*). Вычислим модули внешних сил  $F = F' = M/l_{BC}$ .

Перенесём все силы со схемы механизма в соответствующие точки рычага Жуковского. Силу  $F_{\Pi}'$  переносить не будем, т.к. она не

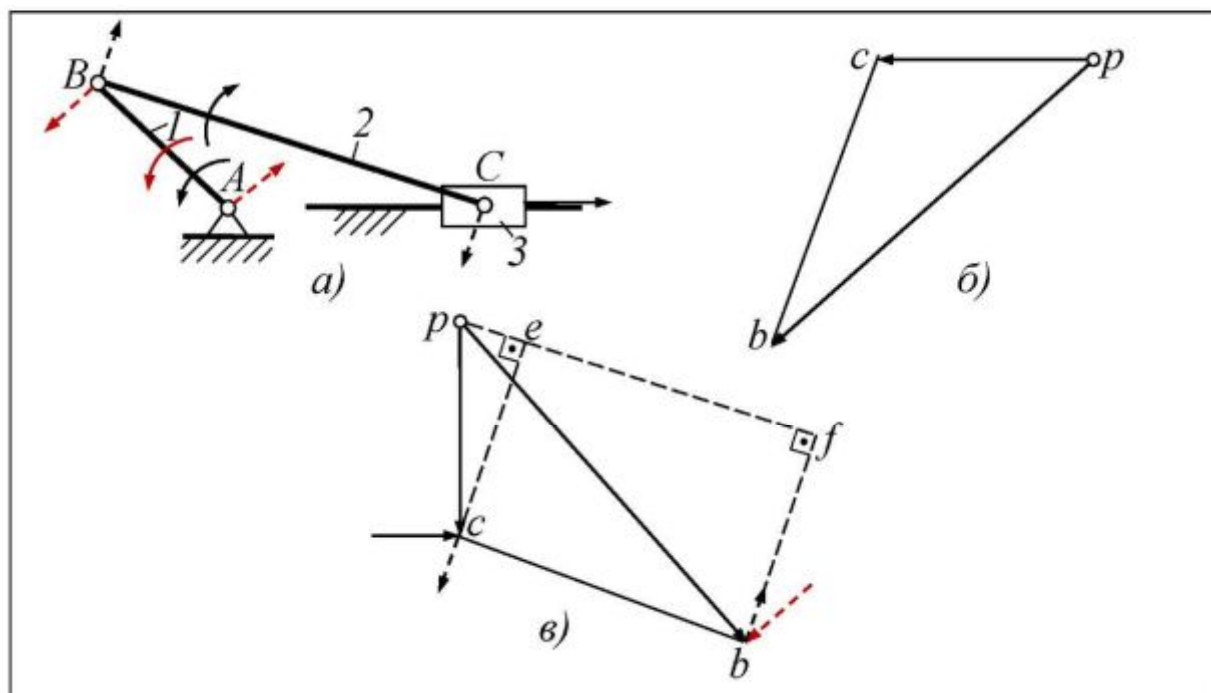


Рис. 2.7 Схема механизма и рычаг Жуковского к задаче 2.5

создаёт момента относительно полюса  $p$ . Используя формулу (2.24), запишем равенство моментов сил относительно полюса  $p$

$$F_{\Pi} \cdot pb = F' \cdot pe - F \cdot pf - F_c \cdot pc. \quad (2.25)$$

Знаки моментов правой части равенства проставляются по следующему правилу: если момент силы совпадает по направлению с моментом приведённой силы, то он записывается положительным. В противном случае – момент отрицателен.

Из (2.25) получим  $F_{\Pi} = F' \frac{pe}{pb} - F \frac{pf}{pb} - F_c \frac{pc}{pb}$ .

Определим искомый приведённый момент

$$M_{\Pi} = F_{\Pi} \cdot l_{AB}.$$

Приведённый момент считается положительным, если его направление совпадает с направлением вращения звена приведения, в противном случае он отрицательный. В нашем случае он совпадает с направлением  $\omega_1$ , следовательно, имеет положительный знак.

## 2.5 Контрольные вопросы

1. Что такое звено приведения?
2. Обоснуйте необходимость замены динамической системы звеном приведения.
3. В чём заключаются два условия корректной замены динамической системы звеном приведения?
4. Что такое приведённая масса и приведённый момент инерции?
5. Запишите формулу расчёта приведённой массы и приведённого момента инерции.
6. Каковы свойства приведённой массы и приведённого момента инерции?
7. Что такое приведённая сила и приведённый момент внешних сил?
8. Запишите формулу расчёта приведённой силы и приведённого момента внешних сил.
9. Каковы свойства приведённой силы и приведённого момента внешних сил?
10. Сформулируйте теорему Жуковского.
11. Как применить теорему Жуковского для нахождения приведённого момента внешних сил?

### 3 Уравнения движения машины

После приведения сил и масс в машине машинный агрегат с одной степенью подвижности приводится к одной из динамических моделей, показанных на рис. 2.1.

Для описания движения звена приведения обычно используют либо уравнение его движения в энергетической или интегральной форме, либо уравнение движения в дифференциальной форме. При этом вид конкретно используемого уравнения движения и методика его решения зависят от законов изменения сил, действующих в машине.

#### 3.1 Уравнения движения в интегральной форме

На основании теоремы об изменении кинетической энергии динамической системы для звена приведения запишем

$$T_i - T_0 = A_{0-i}, \quad (3.1)$$

где  $T_i$  и  $T_0$  – кинетическая энергия звена приведения в  $i$ -м и начальном положениях соответственно;  $A_{0-i}$  – работа приведённой силы (приведённого момента) на том же интервале движения звена приведения.

Если звено приведения совершает вращательное движение (рис. 2.1,  $a$ ), то уравнение (3.1) будет иметь вид

$$\frac{J_{\Pi i} \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\Pi 0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{\Pi} d\varphi. \quad (3.2)$$

Если звено приведения совершает поступательное движение:

$$\frac{m_{\Pi i} v_i^2}{2} - \frac{m_{\Pi 0} v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s_i} F_{\Pi} ds. \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) называют уравнениями движения в энергетической (интегральной) форме. Их составляют и решают в том случае, если приведённый момент  $M_{\Pi}$  или приведённая сила  $F_{\Pi}$  являются постоянными величинами, что бывает довольно редко, либо когда  $M_{\Pi}$  или  $F_{\Pi}$  зависят только от положения звена приведения.

## 3.2 Уравнения движения в дифференциальной форме

Запишем уравнение (3.1) на дифференциально-малом интервале времени

$$dT = dA. \quad (3.4)$$

Тогда для звена приведения, совершающего вращательное движение, перепишем (3.2)

$$d \frac{J_{\Pi} \omega^2}{2} = M_{\Pi} d\varphi.$$

Или

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{J_{\Pi} \omega^2}{2} = M_{\Pi}. \quad (3.5)$$

Учитывая, что  $J_{\Pi}$  и  $\omega$  в общем случае являются величинами переменными, возьмём производную от кинетической энергии по углу поворота звена приведения. Тогда уравнение (3.5) будет иметь вид

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} + \frac{J_{\Pi}}{2} 2\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = M_{\Pi}. \quad (3.6)$$

С учётом того, что  $\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega dt}{dt d\varphi} = \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt}$ , получим уравнение движения звена приведения в дифференциальной форме, если оно вращается:

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} + J_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Pi}. \quad (3.7)$$

Аналогично получают уравнение движения звена приведения, совершающего поступательное движение:

$$\frac{v^2}{2} \frac{dm_{\Pi}}{ds} + m_{\Pi} \frac{dv}{dt} = F_{\Pi}. \quad (3.8)$$

В частных случаях, когда в машинах отсутствуют рычажные механизмы и передаточные отношения по этой причине являются постоянными величинами, не изменяются  $J_{\Pi}$  и  $m_{\Pi}$ . Поэтому  $\frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = 0$  и  $\frac{dm_{\Pi}}{ds} = 0$ . Следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие движение звена приведения, значительно упрощаются:

$$J_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Pi}; \quad (3.9)$$

$$m_{\Pi} \frac{dv}{dt} = F_{\Pi}. \quad (3.10)$$

### 3.3 Методы решения уравнений движения

Выше уже отмечалось, что вид конкретно используемого уравнения движения и методика его решения зависят от законов изменения сил, действующих в машине.

#### 3.3.1 Силы зависят от положения точек их приложения

Этот случай является достаточно распространенным. В качестве примеров можно привести двигатели внутреннего сгорания (ДВС), пружинные двигатели, пневмоприводы, а также все машины, использующие указанные выше виды двигателей (дизель-компрессоры, буровые станки, подъёмные краны с приводом от ДВС и др.).

В этих случаях для определения закона движения звена привода обычно используют уравнение движения в энергетической форме либо диаграмму энергомасс. При этом должны быть заданы: кинематическая схема машинного агрегата, массы и моменты инерции звеньев, значения всех внешних сил, приложенных к машине, начальные условия движения.

Запишем уравнение движения звена привода в энергетической форме

$$\frac{J_{\Pi i} \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\Pi 0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{\Pi} d\varphi.$$

Приравнявая работу приведённого момента избыточной работе  $A_{\text{изб}_{0-i}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{\Pi} d\varphi$ , получим

$$\frac{J_{\Pi i} \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\Pi 0} \omega_0^2}{2} = A_{\text{изб}_{0-i}}.$$

Отсюда можно записать угловую скорость звена привода

$$\omega_i = \frac{2A_{\text{изб}_{0-i}} + J_{\Pi 0} \omega_0^2}{J_{\Pi i}}. \quad (3.11)$$

Для того чтобы определить по этой формуле  $\omega_i$ , необходимо выполнить ряд последовательных действий, описанных ниже.

1. Подсчитать величину  $J_{\Pi}$  для ряда положений механизма. За начальное положение обычно принимают положение, соответствующее значению угла  $\varphi = \varphi_0$ . Построить график  $J_{\Pi} = J_{\Pi}(\varphi)$ .

2. Для тех же положений подсчитать величины суммарного приведённого момента  $M_{\Pi}$  и построить график  $M_{\Pi} = M_{\Pi}(\varphi)$ .

Примечание. Для установившегося режима работы машины могут быть заданы:

- для машин-орудий – силы сопротивления; движущие силы неизвестны, но считаются постоянными;
- для машин-двигателей – движущие силы; силы полезного сопротивления не известны, но считаются постоянными.

В этих случаях сначала подсчитывают и строят график приведённого момента сил сопротивления  $M_c = M_c(\varphi)$  для машин-орудий или приведенного момента движущих сил  $M_d = M_d(\varphi)$  для машин-двигателей.

Величину неизвестного приведённого момента движущих сил для машин-орудий (сил сопротивления для машин-двигателей) находят из закона передачи работы при установившемся движении, используя равенство (1.14) и полагая из-за малости  $A_{\text{вс}}^{\text{ц}} = 0$ :

$$M_d \varphi_{\text{ц}} = \int_0^{\varphi_{\text{ц}}} M_c d\varphi, \quad (3.12)$$

$$M_c \varphi_{\text{ц}} = \int_0^{\varphi_{\text{ц}}} M_d d\varphi, \quad (3.13)$$

где  $\varphi_{\text{ц}}$  – угол поворота звена приведения, соответствующий одному циклу установившегося движения. Часто  $\varphi_{\text{ц}} = 2\pi$ .

Равенство (3.12) записано для машин-орудий, а равенство (3.13) – для машин-двигателей.

3. Методом графического или численного интегрирования подсчитать избыточную работу и построить график  $A_{\text{изб}} = A_{\text{изб}}(\varphi)$ . Если в начальный момент кинетическая энергия машины  $T_0 = 0$ , то этот график будет одновременно являться графиком кинетической энергии машины  $T = T(\varphi)$ .

Если в начальный момент  $T_0 \neq 0$ , то для перехода к графику  $T = T(\varphi)$  необходимо к значениям  $A_{\text{изб}}$  добавить величину  $T_0 = \frac{J_{\text{п0}} \omega_0^2}{2}$ .

4. С учётом начальных условий подсчитать по формуле (3.11) угловую скорость звена приведения для ряда его последовательных положений и построить график  $\omega = \omega(\varphi)$ .

5. Методом графического или численного дифференцирования найти величины аналога углового ускорения звена приведения  $\varepsilon_q = \frac{d\omega}{d\varphi}$  и построить соответствующий график.

6. Определить угловое ускорение звена приведения для ряда последовательных положений, используя соотношение  $\varepsilon_i = \omega_i \varepsilon_{qi}$ .

7. Если необходимо определить время движения звена приведения из одного положения в другое, то используют соотношение  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  или  $dt = \frac{1}{\omega} d\varphi$ . Отсюда

$$\Delta t_i = t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{1}{\omega} d\varphi. \quad (3.14)$$

Для решения (3.14) необходимо, используя график  $\omega = \omega(\varphi)$ , построить предварительно обратную зависимость  $\omega^{-1}(\varphi)$ . Затем методом графического интегрирования обратной зависимости построить зависимость  $t = t(\varphi)$ .

Такова методика динамического анализа машины с помощью уравнения движения звена приведения, записанного в энергетической форме. Рассмотрим теперь использование *диаграммы энергомасс*.

*Диаграммой энергомасс* называют зависимость кинетической энергии машины от приведённого момента инерции  $T = T(J_{\pi})$ . Если такая диаграмма построена, то с её помощью находят соответствующие друг другу значения  $T_i$  и  $J_{\pi i}$  и из равенства  $T_i = \frac{J_{\pi i} \omega_i^2}{2}$  определяют угловую скорость звена приведения

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2T_i}{J_{\pi i}}}. \quad (3.15)$$

Последовательность построения диаграммы энергомасс и определения угловой скорости следующая.

1. Подсчитывают ряд последовательных значений приведённого момента сил, действующих в машине, и строят график  $M_{\pi}(\varphi)$  (рис. 3.1, а).

2. Для тех же положений подсчитывают значения приведённого момента инерции звеньев машины и строят график  $J_{\pi}(\varphi)$  (рис. 3.1, б).

3. Графически интегрируя график приведённого момента сил, строят график избыточной работы  $A_{изб}(\varphi)$  (рис. 3.1, в).

Масштабный коэффициент оси ординат этого графика рассчитывают по формуле

$$\mu_A = H \mu_M \mu_\varphi, \frac{\text{Дж}}{\text{мм}}, \quad (3.16)$$

где  $H$  – произвольно выбранное полюсное расстояние (см. рис. 3.1, а), мм;  $\mu_M$ ,  $\mu_\varphi$  – масштабные коэффициенты по осям графика приведённого момента.

Если в начальный момент машина была неподвижна  $\omega_0 = 0$ , то график избыточной работы будет являться одновременно графиком кинетической энергии машины. Если  $\omega \neq 0$ , то для построения зависимости  $T(\varphi)$  необходимо к найденным значениям избыточной работы добавить кинетическую энергию машины, накопленную к начальному моменту, определяемому углом  $\varphi_0$ , и равную

$$T_0 = \frac{J_{п0} \omega_0^2}{2}.$$

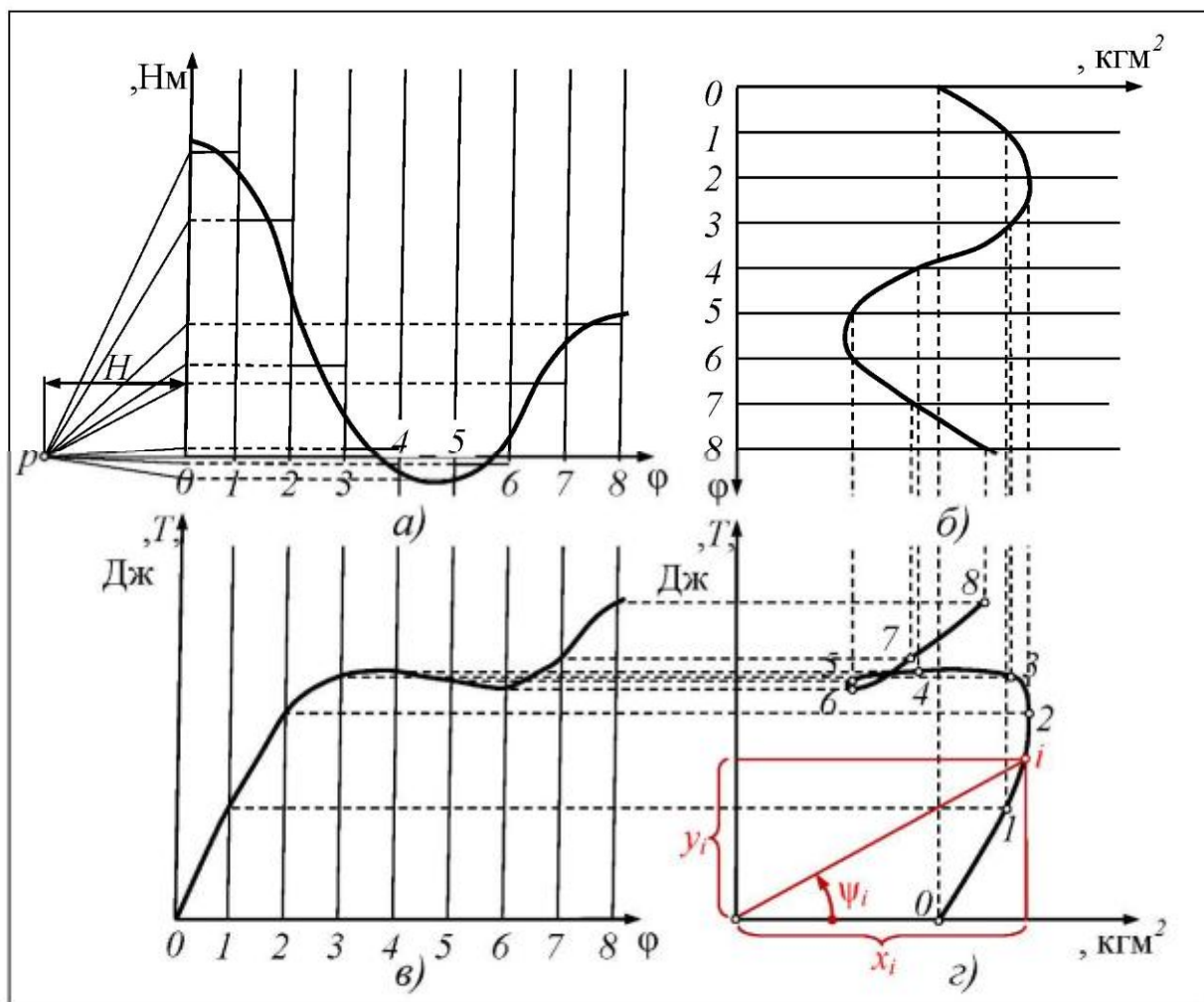


Рис. 3.1 Построение диаграммы энергомасс

Такое добавление начальной кинетической энергии будет выглядеть на диаграмме рис. 3.1, в смещением начала системы координат вдоль оси  $A_{изб}$  вниз на расстояние (мм):

$$T_0 = \frac{T_0}{\mu_A}.$$

4. Далее, исключая параметр  $\varphi$ , строят диаграмму энергомасс  $T = T(J_{\pi})$  (рис. 3.1, з).

5. Используя формулу (3.15), определяют  $\omega_i$  для ряда последовательных положений звена приведения:

$$\omega_i = \frac{\overline{2\mu_A y_i}}{\mu_{J_{\pi}} x_i}. \quad (3.17)$$

По полученным значениям строят график  $\omega = \omega(\varphi)$ .

6. Определение углового ускорения звена приведения и времени его движения из одного положения в другое описано выше.

По диаграмме энергомасс легко прослеживается характер изменения угловой скорости звена приведения. Соединив произвольную точку  $i$  диаграммы с началом системы координат, обозначим угол  $\psi_i$  (рис. 3.1, з). Тогда

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{y_i}{x_i}. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.18), перепишем (3.17):

$$\omega_i = \frac{\overline{2\mu_A}}{\mu_{J_{\pi}}} \operatorname{tg} \psi_i. \quad (3.19)$$

Из формулы (3.19) следует, что чем больше угол  $\psi_i$ , тем больше и угловая скорость  $\omega_i$ , и наоборот. Следовательно, переходя по диаграмме энергомасс от позиции к позиции, можно проследить, как изменяется угловая скорость звена приведения при изменении его положения.

При установившемся движении, когда периодически повторяются значения  $T_i$  и  $J_{\pi i}$ , диаграмма энергомасс будет изображаться замкнутой линией (рис. 3.2).

Проведя из начала координат к диаграмме энергомасс касательные в точках  $M$  и  $N$ , определим соответственно максимальное и минимальное значения угловой скорости внутри цикла установившегося движения:

$$\omega_{\max} = \frac{\overline{2\mu_A}}{\mu_{J_{\pi}}} \operatorname{tg} \psi_{\max}; \quad (3.20)$$

$$\omega_{\min} = \frac{2\mu_A}{\mu_{J_{\Pi}}} \operatorname{tg} \psi_{\min}. \quad (3.21)$$

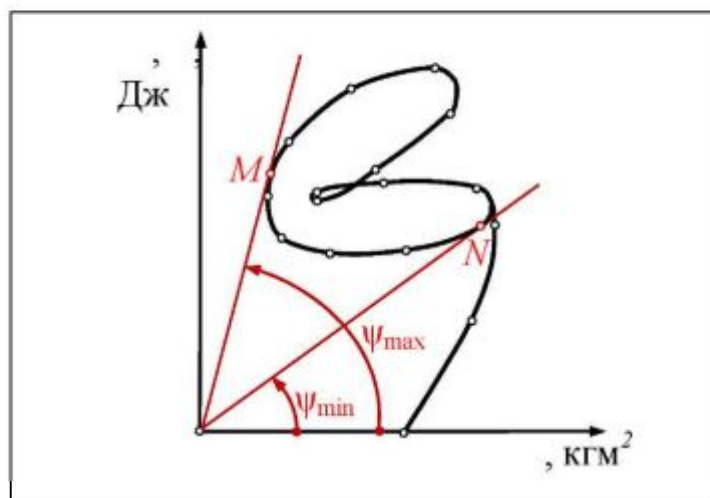


Рис. 3.2 Диаграмма энергомасс при установившемся движении

Отсюда же следует, что если для установившегося движения построена диаграмма энергомасс и известны  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ , но по каким-то причинам неизвестно положение начала системы координат, то, определив углы  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  из выражений

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_A} \omega_{\max}^2; \quad (3.22)$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_A} \omega_{\min}^2 \quad (3.23)$$

и проведя касательные к диаграмме под этими углами, можно найти точку их пересечения, которая и будет являться началом системы координат диаграммы энергомасс.

### 3.3.2 Силы зависят от скоростей точек их приложения

Это явление наблюдается в турбогенераторах, гидрогенераторах, во многих грузоподъёмных машинах, прокатных станах, воздуходувках с электроприводом, роторных компрессорах с электроприводом и в некоторых других установках. Во всех этих машинах отсутствуют рычажные системы и, следовательно, приведённый момент инерции – величина постоянная.

Если силы, действующие в машине, зависят от скорости или от времени движения звена привода, то для описания его движения обычно используют уравнение движения в дифференциальной форме (3.9).

Если разделить переменные  $\omega$  и  $t$  и принять  $t_0 = 0$ , то из (3.9) получим

$$dt = J_{\pi} \frac{d\omega}{M_{\pi}}.$$

Или после интегрирования

$$t = J_{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{M_{\pi}} d\omega. \quad (3.24)$$

В зависимости от способа задания функции  $M_{\pi}(\omega)$  уравнение (3.24) решают графическим или аналитическим способом. Если зависимость  $M_{\pi}(\omega)$  представлена в виде графика, то с его помощью определяют ряд последовательных значений обратной функции  $M_{\pi}^{-1}$  и строят график  $M_{\pi}^{-1}(\omega)$ . Далее методом графического или численного интегрирования получают график  $t = t(\omega)$ , с помощью которого легко найти время, необходимое для достижения требуемой скорости. Если продифференцировать график  $\omega(t)$ , то получим график углового ускорения звена приведения.

Следует отметить, что значение  $\varepsilon_i$  для любого положения можно получить по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{M_{\pi i}}{J_{\pi i}}. \quad (3.25)$$

Если функция  $M_{\pi}(\omega)$  задана аналитически или удаётся получить аналитическое выражение функции  $M_{\pi}$ , заданной в виде графика, то уравнение (3.24) решают аналитическим способом.

Довольно часто для определения режима работы некоторых машин (например, для периода разгона турбогенераторного агрегата, роторной или грузоподъёмной машины с приводом от электродвигателя постоянного или переменного тока) зависимость  $M_{\pi}(\omega)$  выражается формулой

$$M_{\pi} = A - B\omega, \quad (3.26)$$

где  $A$  – начальное значение приведённого момента внешних сил ( $A = M_{\pi 0}$ );  $B$  – постоянная, характеризующая крутизну спада зависимости  $M_{\pi}(\omega)$ .

Тогда уравнение (3.24) будет иметь вид

$$t = J_{\pi} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{A - B\omega}. \quad (3.27)$$

Взяв табличный интеграл правой части, получим

$$t = -\frac{J_{\pi}}{B} \ln A - B\omega \Big|_0^{\omega} = \frac{J_{\pi}}{B} \ln \frac{A}{A - B\omega}.$$

Или

$$\frac{t}{T} = \ln \frac{A}{A - B\omega},$$

где  $T$  – постоянная времени, равная  $J_{\Pi} / B$ .

Используя определение логарифма, запишем

$$e^{\frac{t}{T}} = \frac{A}{A - B\omega}. \quad (3.28)$$

Из (3.28) можно окончательно получить

$$\omega = \frac{A}{B} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) = \omega_{\text{уст}} (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (3.29)$$

где  $\omega_{\text{уст}} = \frac{A}{B}$  – угловая скорость установившегося движения.

На рис. 3.3 показан график изменения угловой скорости при разбеге. Если бы при разбеге  $M_{\Pi} = \text{const}$ , то движение было бы равноускоренным и угловая скорость достигла бы значения  $\omega_{\text{уст}}$  через промежуток времени  $T$ .

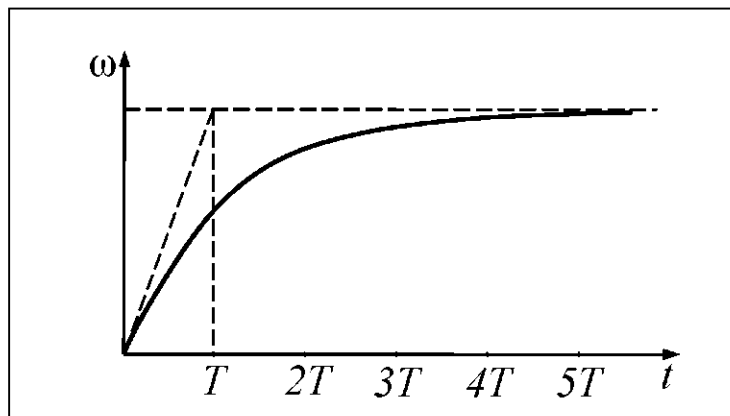


Рис. 3.3 Изменение угловой скорости при разбеге

Как показывает анализ полученной зависимости (3.29), теоретически процесс разбега длится бесконечно долго. Однако практически через  $t = 4 \dots 5 T$  получают  $\frac{\omega}{\omega_{\text{уст}}} = 0,995$ , т.е. процесс разбега заканчивается. Отсюда следует очевидный вывод: чем больше  $T$ , т.е. чем больше  $J_{\Pi}$ , тем продолжительнее период разбега.

Используя равенство  $t_{\text{разб}} = 5T$ , можно решить обратную задачу: по заданному, допустим, времени срабатывания определить массовые характеристики звеньев механизма, т.е.  $J_{\Pi}$ . Зная, что  $T = \frac{J_{\Pi}}{B} = \frac{1}{5} t_{\text{разб}}$ , находим  $J_{\Pi} = \frac{B}{5} t_{\text{разб}}$ .

Если линейная аппроксимация зависимости  $M_{\pi}(\omega)$  невозможна, то уравнение (3.24) решается графическим способом.

Более трудоёмко с использованием численных методов решаются уравнения движения, если приложенные к механизму силы зависят одновременно от разных кинематических параметров.

### 3.3.3 Численный метод решения дифференциального уравнения движения

Запишем дифференциальное уравнение вращающегося звена приведения

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\pi}}{d\varphi} + J_{\pi} \frac{d\omega}{dt} = M_{\pi}(\varphi, \omega, t), \quad (3.30)$$

где приведённый момент внешних сил  $M_{\pi}$  зависит от положения, скорости звена приведения и времени.

Суть приближённого метода решения уравнения (3.30) состоит в том, что угол поворота  $\varphi$  звена приведения разбивается на достаточно малые интервалы  $\Delta\varphi$ , для каждого из которых приведённый момент  $M_{\pi}$  считается постоянным, а приведённый момент инерции  $J_{\pi}$  – изменяющимся по линейному закону.

Так как  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}$ , то уравнение (3.30) можно переписать следующим образом:

$$2J_{\pi}d\omega + \omega dJ_{\pi} = \frac{2}{\omega} M_{\pi}d\varphi. \quad (3.31)$$

Заменяя в (3.31)  $d\varphi$  на  $\Delta\varphi$ ,  $d\omega = \omega_{i+1} - \omega_i$ ,  $dJ_{\pi} = J_{\pi_{i+1}} - J_{\pi_i}$ , где  $i, i+1$  – два положения звена приведения, соответствующие началу и концу промежутка  $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ , получим

$$2J_{\pi_i} \omega_{i+1} - \omega_i + \omega_i J_{\pi_{i+1}} - J_{\pi_i} = \frac{2}{\omega_i} M_{\pi_i} \Delta\varphi.$$

Отсюда

$$\omega_{i+1} = \frac{M_{\pi_i} \Delta\varphi}{J_{\pi_i} \omega_i} + \frac{3J_{\pi_i} - J_{\pi_{i+1}}}{2J_{\pi_i}} \omega_i. \quad (3.32)$$

Зная для исследуемого интервала  $\Delta\varphi$ :  $M_{\pi_i}$ ,  $J_{\pi_i}$ ,  $\omega_i$ ,  $J_{\pi_{i+1}}$ , находят  $\omega_{i+1}$ . Повторяя аналогичные расчёты, вычисляют ряд последовательных значений угловой скорости звена приведения и строят график  $\omega = \omega(\varphi)$ .

Чтобы найти время движения, можно воспользоваться соотношением

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega}. \quad (3.33)$$

Используя равенства  $dt = t_{i+1} - t_i$ ,  $d\varphi = \Delta\varphi$ ,  $\omega = \frac{\omega_i + \omega_{i+1}}{2}$ , из (3.33) получим

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_i + \omega_{i+1}}.$$

Откуда

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\Delta\varphi}{\omega_i + \omega_{i+1}}. \quad (3.34)$$

Изложенный численный метод решения уравнения движения может быть использован при достаточно малом интервале  $\Delta\varphi$  и, следовательно, требует большого объёма вычислений. Это возможно только с использованием компьютера.

### 3.4 Решение задач по определению закона движения

**Задача 3.1.** Определить закон изменения угловой скорости звена  $I$  зубчатого планетарного механизма (рис. 3.4) и вычислить время его движения до полной остановки. Заданы числа

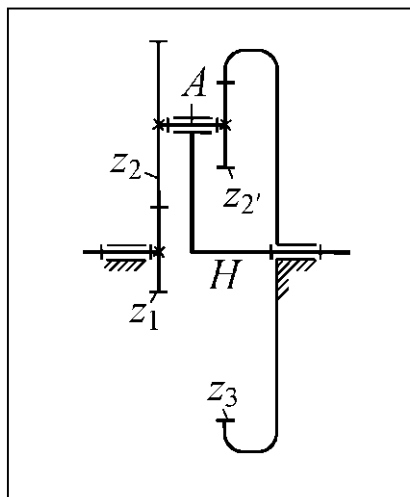


Рис. 3.4 Планетарный механизм к задаче 3.1

зубьев нулевых<sup>1</sup> колёс  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_2' = 20$ ,  $z_3 = 80$ ; модуль всех колёс  $m = 10$  мм. Моменты инерции колёс и водила  $H$  относительно их осей:  $J_1 = 0,196$  кгм<sup>2</sup>,  $J_{2,2'} = 0,588$  кгм<sup>2</sup>,  $J_H = 0,785$  кгм<sup>2</sup>. Сила тяжести блока сателлитов  $2,2'$   $G_{2,2'} = 196$  Н. Начальная угловая скорость колеса  $I$  —  $\omega_{1_0} = 70$  с<sup>-1</sup>. К колесу  $I$  приложен постоянный движущий момент  $M_d = 98,1$  Нм, а к водилу  $H$  — постоянный момент

сил сопротивления  $M_c = 941$  Нм.

**Решение.** Выберем в качестве звена приведения то колесо, закон движения которого необходимо определить, — это колесо  $I$ .

<sup>1</sup> Нулевыми называют зубчатые колёса, изготовленные без смещения производящего реечного контура. В этом случае их начальные окружности совпадают с делительными.

Найдём приведённый момент инерции  $J_{\Pi}$  и приведённый момент внешних сил  $M_{\Pi}$  по формулам (2.2) и (2.17) соответственно.

С учётом вида движения звеньев планетарного механизма по формуле (2.2) запишем

$$J_{\Pi} = J_1 + m_{2,2'} \frac{v_A^2}{\omega_1^2} + J_{2,2'} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + J_H \frac{\omega_H^2}{\omega_1^2}. \quad (3.35)$$

Так как  $v_A = \omega_H(r_{w1} + r_{w2})$ , где  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  – радиусы начальных окружностей зубчатых колёс 1 и 2, определяемые по формулам

$$r_{w1} = r_1 = mz_1 \cdot 2 = 10 \cdot \frac{20}{2} = 100 \text{ мм} = 0,1 \text{ м}, \quad r_{w2} = r_2 = mz_2 \cdot 2 = 10 \cdot \frac{40}{2} = 200 \text{ мм} = 0,2 \text{ м}.$$

С учётом этого и с учётом замены отношений угловых скоростей передаточными отношениями, получим

$$J_{\Pi} = J_1 + m_{2,2'} u_{H1}^2 (r_{w1} + r_{w2})^2 + J_{2,2'} u_{21}^2 + J_H u_{H1}^2. \quad (3.36)$$

По формуле Виллиса определим передаточное отношение планетарного механизма

$$u_{H1} = \frac{1}{u_{1H}} = \frac{1}{1 - u_{13}^H} = \frac{1}{1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}} = \frac{z_1 z_{2'}}{z_1 z_{2'} + z_2 z_3}.$$

Подставив числовые данные, вычислим

$$u_{H1} = \frac{z_1 z_{2'}}{z_1 z_{2'} + z_2 z_3} = \frac{20 \cdot 20}{20 \cdot 20 + 40 \cdot 80} = \frac{1}{9}.$$

Так как ось колеса 2 подвижна, то для определения  $u_{21}$  запишем передаточное отношение в обратном движении

$$u_{21}^H = \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H}.$$

Разделив числитель и знаменатель на  $\omega_1$ , получим

$$u_{21}^H = \frac{u_{21} - u_{H1}}{1 - u_{H1}},$$

откуда:  $u_{21} = u_{21}^H (1 - u_{H1}) + u_{H1}$ . Выразив передаточные отношения через числа зубьев и подставив числовые данные, вычислим искомое передаточное отношение:

$$u_{21} = -\frac{z_1}{z_2} \left( 1 - \frac{z_1 z_{2'}}{z_1 z_{2'} + z_2 z_3} \right) + \frac{z_1 z_{2'}}{z_1 z_{2'} + z_2 z_3} = -\frac{20}{40} \left( 1 - \frac{20 \cdot 20}{20 \cdot 20 + 40 \cdot 80} \right) + \frac{20 \cdot 20}{20 \cdot 20 + 40 \cdot 80} = -\frac{1}{3}.$$

Теперь по формуле (3.36) можно вычислить приведённый момент инерции:  $J_{\Pi} = 0,196 + 0,588 \frac{1}{9} + \frac{196}{9,8} \cdot \frac{1}{81} (0,1 + 0,2)^2 + 0,785 \frac{1}{81} = 0,293 \text{ кгм}^2$ .

Приведённый момент инерции найден, определим приведённый момент внешних сил по формуле (2.17):

$$M_{\Pi} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}} \frac{\omega_{\text{н}}}{\omega_1} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}} u_{\text{н1}}. \quad (3.37)$$

Подставив числовые данные, вычислим

$$M_{\Pi} = 98,1 - 941 \frac{1}{9} = -6,5 \text{ Нм}.$$

Для определения закона движения звена приведения воспользуемся дифференциальным уравнением (3.9):

$$J_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Pi}.$$

После разделения переменных и интегрирования получим

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \frac{M_{\Pi}}{J_{\Pi}} \int_0^t dt.$$

Взяв интегралы, запишем

$$\omega - \omega_0 = \frac{M_{\Pi}}{J_{\Pi}} t.$$

После подстановки числовых значений и вычислений:

$$\omega = 70 - \frac{6,5}{0,293} t = 70 - 22,2t. \quad (3.38)$$

Таким образом, закон изменения угловой скорости колеса  $I$  найден. Определим теперь время до его полной остановки. Для этого в (3.38) подставим  $\omega = 0$  и вычислим:

$$t = \frac{70}{22,2} \approx 3,3 \text{ с}.$$

Задачу 3.1 можно считать решённой.

**Задача 3.2.** Силы и массы звеньев механизма приведены к валу входного звена. Приведённый момент внешних сил изменяется в соответствии с графиком, показанным на рис. 3.5. Постоянный приведённый момент движущих сил  $M_{\Pi\text{д}}$  действует только во время разбега и установившегося движения. Пульсирующий приведённый момент сил полезного сопротивления  $M_{\Pi\text{с}}$  действует только при установившемся движении, по окончании которого отключается двигатель и включается тормоз, развивающий приведённый тормозной момент  $M_{\Pi\text{т}} = 294 \text{ Нм}$ . Приведённый момент инерции  $J_{\Pi} = 2,94 \text{ кгм}^2$ . Определить приведённый движущий момент, время, затрачиваемое на каждый из трёх периодов движения, максимальное и минимальное значение угловой скорости вала при установившемся движении.

*Решение.* Из графика (рис. 3.5) видно, что разбег заканчивается при  $\varphi = 10\pi$  рад. А один цикл установившегося движения соответствует одному обороту звена привода  $\varphi_{\text{ц}} = 2\pi$ .

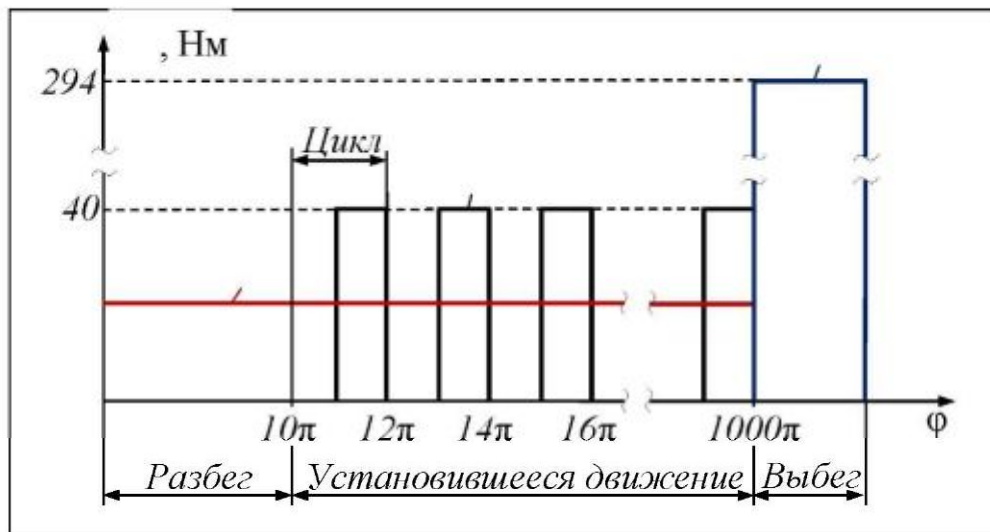


Рис. 3.5 Графики приведённого момента к задаче 3.2

Чтобы найти величину неизвестного приведённого момента движущих сил  $M_{\text{пд}}$ , воспользуемся законом передачи работы при установившемся движении – за цикл работа движущих сил должна равняться работе сил сопротивления:

$$M_{\text{пд}} \cdot 2\pi = M_{\text{пс}} \cdot \pi.$$

Подставив числовое значение  $M_{\text{пс}}$ , получим:  $M_{\text{пд}} = \frac{40\pi}{2\pi} = 20$  Нм. Движущий момент найден.

Для дальнейшего решения задачи запишем уравнение движения на этапе разбега в энергетической форме, имея в виду, что начальная кинетическая энергия равна нулю:

$$\frac{J_{\text{п}}\omega^2}{2} = \int_0^{10\pi} M_{\text{пд}} d\varphi.$$

Взяв интеграл, получим  $\frac{J_{\text{п}}\omega^2}{2} = M_{\text{пд}} \cdot 10\pi$ .

Тогда установившаяся угловая скорость звена привода в конце периода разбега

$$\omega_{\text{уст}} = \frac{\overline{2M_{\text{пд}} \cdot 10\pi}}{J_{\text{п}}} = \frac{\overline{2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 3,14}}{2,94} = 20,66 \text{ с}^{-1}.$$

Чтобы найти время разбега, запишем уравнение движения в дифференциальной форме

$$J_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{пд}}. \quad (3.39)$$

Разделив переменные и проинтегрировав (3.39), получим

$$\frac{J_{\Pi}}{M_{\Pi d}} \int_0^{\omega_{уст}} d\omega = \int_0^{t_p} dt.$$

Взяв интегралы, вычислим время разбега

$$t_p = \frac{J_{\Pi} \omega_{уст}}{M_{\Pi d}} = \frac{2,94 \cdot 20,66}{20} = 3,03 \text{ с.}$$

Чтобы найти  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  при установившемся движении, проанализируем законы изменения  $M_{\Pi d}$  и  $M_{\Pi c}$  в пределах одного цикла установившегося движения (рис. 3.5). Из графика видно, что в первой половине цикла угловая скорость будет возрастать, а во второй половине – убывать. Причём, в конце цикла эта скорость должна быть равна скорости в начале цикла, т.к. приращение кинетической энергии за цикл равно нулю. Следовательно, найденная ранее угловая скорость  $\omega_{уст}$  будет минимальной, т.е.  $\omega_{\min} = \omega_{уст} = 20,66 \text{ с}^{-1}$ .

Чтобы найти максимальную угловую скорость  $\omega_{\max}$ , запишем уравнение движения звена приведения для первой половины цикла, когда действует только движущий момент:

$$\frac{J_{\Pi} \omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_{\Pi} \omega_{\min}^2}{2} = M_{\Pi d} \cdot \pi.$$

Отсюда

$$\omega_{\max} = \frac{2M_{\Pi d} \cdot \pi + J_{\Pi} \omega_{\min}^2}{J_{\Pi}} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 3,14 + 2,94 \cdot 20,66^2}{2,94} = 21,67 \text{ с}^{-1}.$$

Средняя угловая скорость  $\omega_{ср} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} = \frac{21,67 + 20,66}{2} = 21,17 \text{ с}^{-1}$ .

Минимальная и максимальная угловые скорости звена приведения найдены. Чтобы найти время установившегося движения, вычислим количество циклов  $N$  и время одного цикла  $t_{ц}$ :

$$N = \frac{1000\pi - 10\pi}{2\pi} = 495, \quad t_{ц} = \frac{2\pi}{\omega_{ср}} = \frac{2 \cdot 3,14}{21,17} = 0,29 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда время установившегося движения

$$t_{уст} = N t_{ц} = 495 \cdot 0,29 = 143,55 \text{ с.}$$

Приступим теперь к анализу выбега. Он начинается с окончанием последнего цикла установившегося движения, когда угловая скорость звена приведения будет минимальной  $\omega_{\min} = 20,66 \text{ с}^{-1}$ . До остановки звена приведения на него действует только тормозной момент  $M_{\Pi т} = 294 \text{ Нм}$ .

Чтобы найти время выбега, запишем уравнение движения в дифференциальной форме:

$$J_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} = -M_{\Pi T}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав результат, получим

$$\int_0^{t_{\text{выб}}} dt = - \frac{J_{\Pi}}{M_{\Pi T}} \int_{\omega_{\min}}^0 d\omega.$$

Тогда время выбега получим, взяв интегралы и подставив числовые данные:

$$t_{\text{выб}} = - \frac{J_{\Pi}}{M_{\Pi T}} -\omega_{\min} = - \frac{2,94}{294} -20,66 = 0,207 \text{ с.}$$

Таким образом, задачу 3.2 можно считать решённой, однако для большей наглядности представим полученные результаты графически (рис. 3.6).

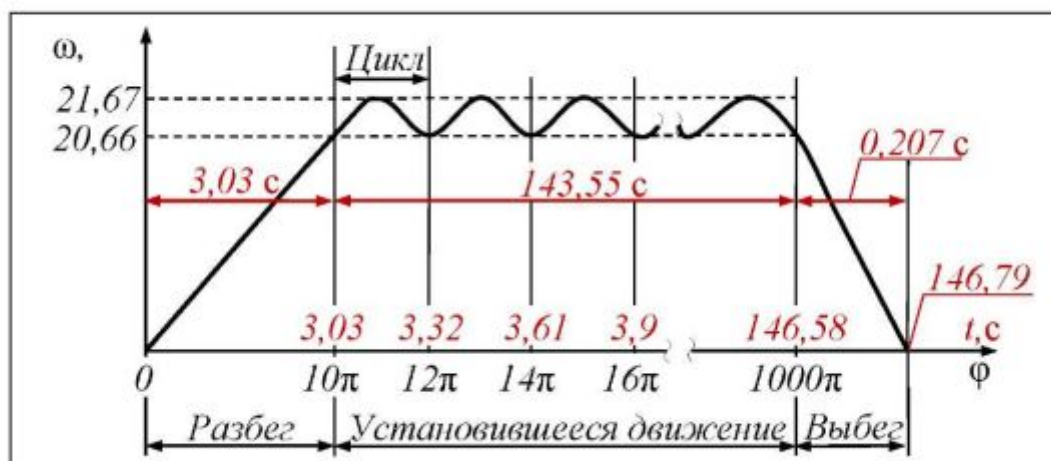


Рис. 3.6 Результаты решения задачи 3.2

### 3.5 Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение движения машины в интегральной форме.
2. Запишите уравнение движения машины в дифференциальной форме.
3. Почему при силах, зависящих от положения звеньев, предпочитают использовать уравнение в интегральной форме?
4. Какова методика графоаналитического решения уравнения движения в интегральной форме?
5. Изложите методику численного решения дифференциального уравнения движения машины.

## 4 Динамический анализ установившегося движения

Под динамическим анализом машинного агрегата понимают определение закона движения главного вала машины (звена привода) под действием приложенных сил.

Остановимся отдельно на установившемся режиме работы машины, который является основным режимом для таких машинных агрегатов, как металлорежущие станки, прессы, прокатные станы, генераторы электрической энергии, компрессоры, насосы, текстильные машины и многие другие.

### 4.1 Периодические и непериодические колебания скорости звена привода

Напомним, что установившимся движением называют такое движение, при котором периодически повторяются значения действующих в машине сил и, как следствие, всех её кинематических характеристик. Наименьший промежуток времени  $t_{ц}$ , по истечении которого повторяются все динамические и кинематические параметры машины, называют периодом или временем цикла установившегося движения.

Ранее был сформулирован закон передачи работы при установившемся движении: работа движущих сил за цикл равна работе всех сил сопротивления за тот же промежуток времени. Однако следует помнить, что *внутри цикла появляется избыточная работа, отличная от нуля.*

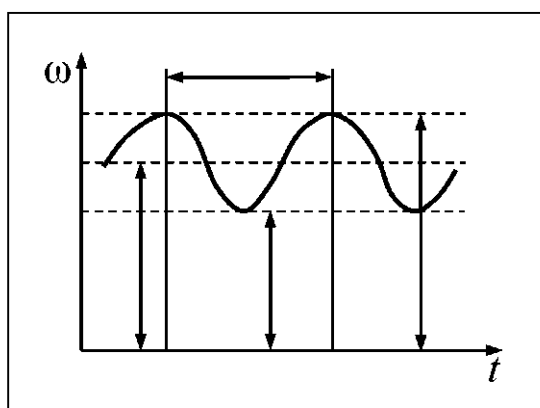


Рис. 4.1 Цикл установившегося движения

Эта причина, а также непостоянство приведённого момента инерции звеньев  $J_{п}$ , приводит, как это следует из формулы (3.11), к возникновению периодических колебаний скорости главного вала машины, т.е. к таким изменениям скорости, когда она является периодической функцией времени (рис. 4.1).

Кроме периодических ко-

лебаний скорости при установившемся движении могут возникнуть и непериодические колебания скорости, вызванные внезапным и случайным изменением соотношения между работой движущих сил и сил сопротивления, соответствующего установившемуся движению (например, внезапное падение напряжения в сети электрического тока, внезапное изменение нагрузки и т.п.).

Колебания скорости главного вала машины являются нежелательным явлением, так как они вызывают дополнительные динамические нагрузки и вибрации звеньев, что снижает долговечность и надёжность машин, ухудшает рабочий процесс машины. Так как не удаётся полностью устранить колебания скорости, то нужно хотя бы ограничить их величину.

Разная природа возникновения периодических и непериодических колебаний скорости вызывает и различные методы их регулирования. Периодические колебания скорости ограничивают за счёт соответствующего подбора масс звеньев. Часто это делают за счёт установки дополнительной вращающейся массы, называемой *маховиком*. Непериодическое регулирование хода машины осуществляют с помощью специальных механизмов, называемых *регуляторами*.

Для количественной оценки величины периодических колебаний скорости при установившемся движении введены: коэффициент неравномерности хода машины  $\delta$ , коэффициент динамичности  $K_{\text{дин}}$ .

*Коэффициентом неравномерности* хода машины называют отношение максимального изменения скорости внутри цикла установившегося движения к средней скорости за цикл (рис. 4.1):

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{cp}}}. \quad (4.1)$$

Допустимую величину коэффициента неравномерности хода устанавливают, исходя из опыта эксплуатации различного типа машин. Например, для металлорежущих станков  $\delta = \frac{1}{25} \dots \frac{1}{50}$ , для сельскохозяйственных машин  $\delta = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{50}$ , для двигателей внутреннего сгорания  $\delta = \frac{1}{80} \dots \frac{1}{150}$ , для авиационных двигателей  $\delta = \frac{1}{200}$  и меньше [1].

Весьма малые значения  $\delta$  позволяют принять в качестве средней скорости за цикл её среднеарифметическое значение:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2}. \quad (4.2)$$

Имея заданными  $\delta$  и  $\omega_{\text{cp}}$ , из (4.1) и (4.2) можно определить экстремальные значения скорости внутри цикла установившегося движения:

$$\omega_{\text{max}} = \omega_{\text{cp}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right); \quad (4.3)$$

$$\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{cp}} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad (4.4)$$

При одних и тех же величинах  $\delta$  и  $\omega_{\text{cp}}$  звено приведения может вращаться с различными угловыми ускорениями, что приводит к появлению неодинаковых динамических нагрузок (рис. 4.2).

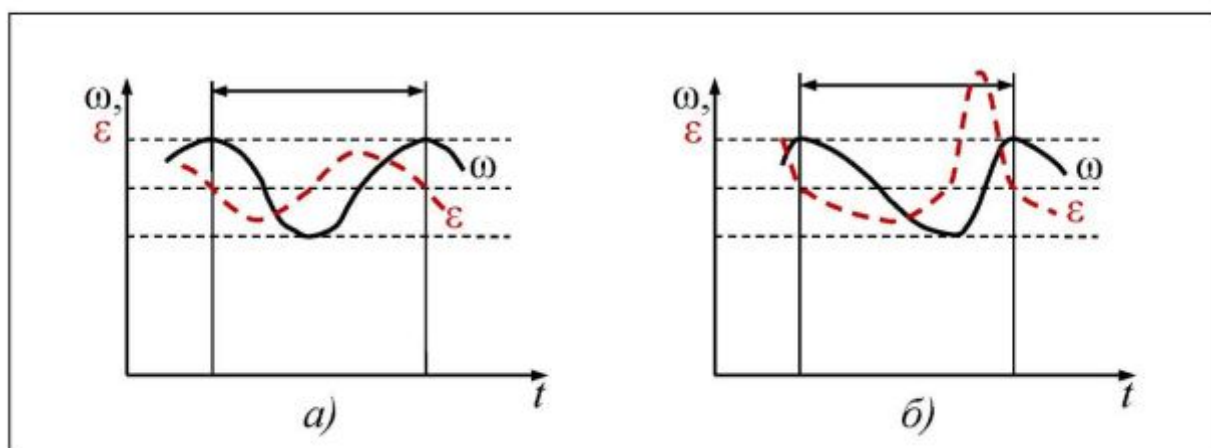


Рис. 4.2 Циклы с различными ускорениями

Если продифференцировать графики угловых скоростей  $\omega$ , показанные на рис. 4.2 а, б, то можно увидеть, что для случая, показанного на рис. 4.2, б, звено приведения будет иметь большее значение максимального углового ускорения  $\epsilon_{\text{max}}$  внутри цикла установившегося движения по сравнению с законом движения на рис. 4.2, а.

Чтобы учесть различный динамический характер законов движения, вводят коэффициент динамичности

$$K_{\text{дин}} = \frac{\epsilon_{\text{max}}}{\omega_{\text{cp}}^2}.$$

## 4.2 Динамический анализ машины при действии сил, зависящих от положения звена привода

Общая методика решения уравнения движения для этого случая изложена в п. 3.3.1. Однако при установившемся движении решение уравнения (3.11) имеет свою специфику, вызванную тем, что известна средняя угловая скорость  $\omega_{\text{ср}}$ , но неизвестны начальные условия движения.

Поставим задачу: определить коэффициент неравномерности хода и закон изменения скорости при установившемся движении.

В качестве исходных данных в этом случае обычно выступают: кинематическая схема машинного агрегата, массовые характеристики звеньев, средняя угловая скорость звена привода, закон изменения сил сопротивления при установившемся движении для машин-орудий или движущих сил – для машин-двигателей. Для машин-орудий предполагается, что постоянным является приведённый момент движущих сил  $M_d = \text{const}$  (для машин-двигателей – приведённый момент сил сопротивления  $M_c = \text{const}$ ).

Задача решается по описанной ниже методике.

1. Подсчитывают ряд последовательных значений приведённого момента сил сопротивления для машин-орудий (движущих сил – для машин-двигателей) и строят соответствующий график (рис. 4.3, а). При этом за начальное положение принимают одно из крайних, обычно в начале рабочего хода.

2. Для тех же положений подсчитывают величины приведённого момента инерции и строят график  $J_n(\varphi)$  (рис. 4.3, б).

3. Методом графического интегрирования зависимости  $M_{\text{пс}}(\varphi)$  или  $M_{\text{пд}}(\varphi)$  строят диаграмму работы сил сопротивления  $A_c(\varphi)$  для машин-орудий или работы движущих сил  $A_d(\varphi)$  для машин-двигателей (рис. 4.3, в). Масштабный коэффициент оси ординат этой диаграммы рассчитывают по формуле (3.16).

4. Строят график работы движущих сил  $A_d(\varphi)$  для машин-орудий или сил сопротивления для машин-двигателей, исходя из следующих положений:

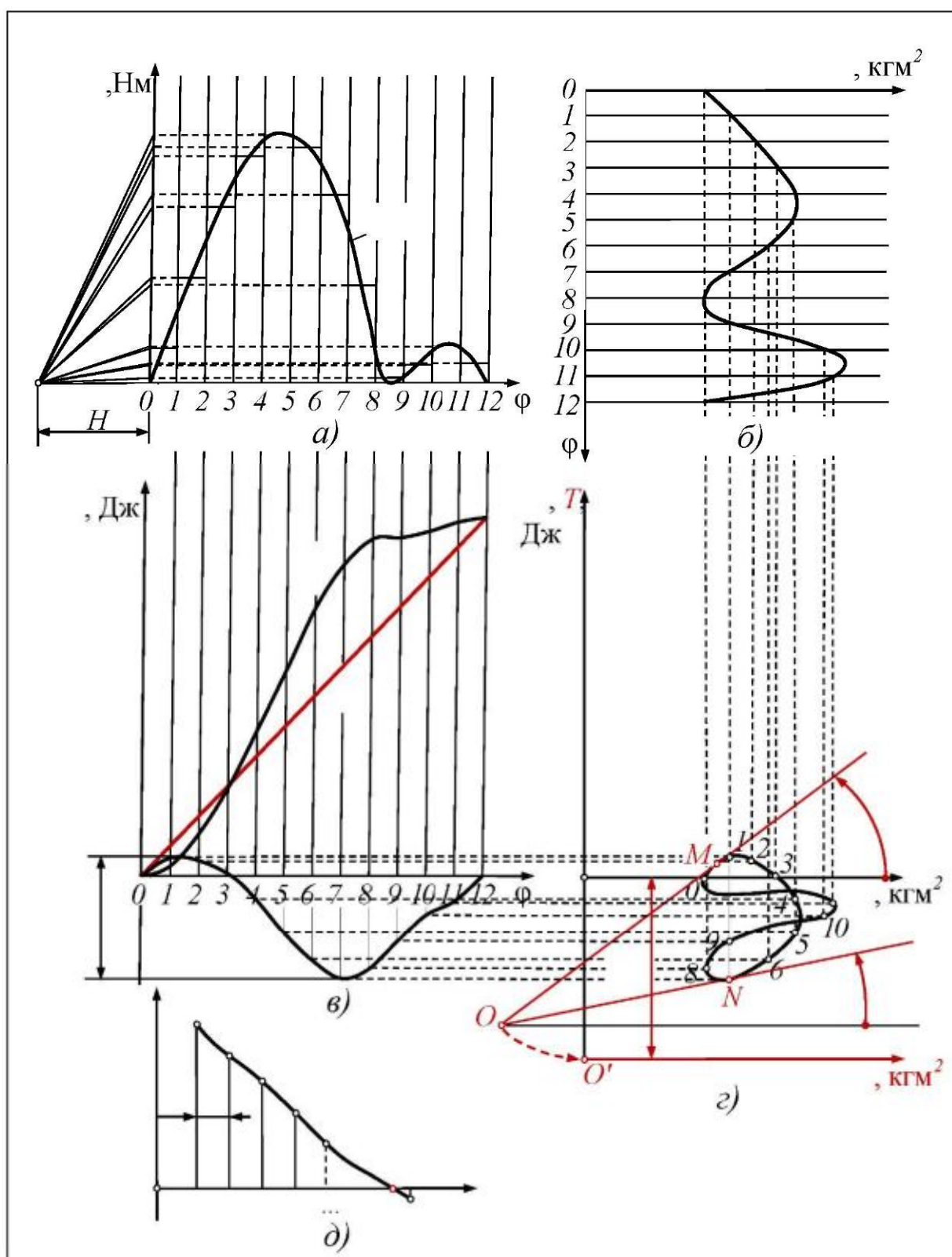


Рис. 4.3 Динамический анализ по диаграмме энергомасс  
- график должен изображаться отрезком прямой, так как это работа постоянного момента;

- так как за цикл установившегося движения избыточная работа должна равняться нулю, то для построения графика работы движущих сил для машин-орудий необходимо соединить отрезком прямой точки графика работы сил сопротивления, соответствующие началу и концу цикла установившегося движения (рис. 4.3, в).

5. Строят график избыточной работы, ординаты которого вычисляют по формуле

$$A_{\text{изб}} = A_{\text{д}} - A_{\text{с}}.$$

Он будет изображаться соответствующими ординатами, заключёнными между графиками  $A_{\text{д}}(\varphi)$  и  $A_{\text{с}}(\varphi)$ .

Полученный график не будет являться графиком полной кинетической энергии машины, так как неизвестна энергия, накопленная машиной в период её разбега (угловая скорость звена привода  $\omega_0$  в начале цикла установившегося движения неизвестна).

6. Графически исключая параметр  $\varphi$ , строят диаграмму энергомасс в системе координат  $A_{\text{изб}} - J_{\text{п}}$  (рис. 4.3, г).

7. Находят положение начала системы координат диаграммы энергомасс  $T = T(J_{\text{п}})$ .

В рассматриваемой задаче, когда массы всех звеньев известны, это положение должно быть ниже на оси  $A_{\text{изб}}$ . Положение этой точки определяют, зная, что если из начала системы координат провести касательные к диаграмме энергомасс, то точки касания определяют положения, в которых угловая скорость будет иметь экстремальные значения:

$$\omega_{\text{max}} = \frac{2\mu_A}{\mu_J} \cdot \text{tg } \psi_{\text{max}}; \quad (4.5)$$

$$\omega_{\text{min}} = \frac{2\mu_A}{\mu_J} \cdot \text{tg } \psi_{\text{min}}. \quad (4.6)$$

Поэтому, чтобы найти положение начала системы координат, задаются предварительным значением коэффициента неравномерности хода машины

$$\delta_0 = \frac{A_{\text{изб}}^{\text{max}}}{\omega_{\text{ср}}^2 J_{\text{ср}}},$$

где  $A_{\text{изб}}^{\text{max}}$  – максимальное значение избыточной работы (см. рис. 4.3, в);  $J_{\text{ср}}$  – среднее значение приведённого момента инерции.

Далее по формулам (4.3) и (4.4) определяют экстремальные значения угловой скорости звена приведения и через тангенсы по формулам (3.22) и (3.23) рассчитывают экстремальные значения углов касательных  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  к диаграмме энергомасс.

Под этими углами проводят касательные к диаграмме энергомасс (рис. 4.3, *з*), фиксируя точки касания  $M$  и  $N$ . Уравнения этих касательных будут иметь вид

$$y_O + y_M = x_O + x_M \operatorname{tg} \psi_{\max}; \quad (4.7)$$

$$y_O + y_N = x_O + x_N \operatorname{tg} \psi_{\min}, \quad (4.8)$$

где  $x_O, y_O$  – координаты точки пересечения касательных к диаграмме энергомасс. При этом координата  $x_O$  считается положительной, если она отсчитывается *влево* от оси  $A_{\text{изб}}$ .

Если предварительное значение  $\delta_0$  равно искомому, то координата  $x_O = 0$ . Такое бывает очень редко. Чаще всего получают отличное от нуля  $x_O$ . Продолжая задаваться новыми значениями  $\delta = \delta + \Delta\delta$ , где  $\Delta\delta$  – требуемая точность вычисления коэффициента неравномерности, получают новые значения  $x_O$ . Расчёты повторяют до тех пор, пока  $x_O$  не поменяет знак. Построив зависимость  $x_O = x_O(\delta)$  (рис. 4.3, *д*), можно увидеть, что искомое значение  $\delta$  находится в точке пересечения графика с осью коэффициента неравномерности. Описанный процесс последовательного приближения показан на рис. 4.3, *з* смещением центра  $O$  в положение  $O'$  по штриховой стрелке.

Теперь, зная  $\delta$ , последовательно по формулам (4.3), (4.4), (3.22), (3.23) и (4.8) находят координату  $y_O$  нового начала диаграммы энергомасс  $T = T(J_{\Pi})$ .

8. Если необходимо найти закон изменения угловой скорости звена приведения при его установившемся движении, то можно воспользоваться зависимостью

$$\omega_i = \frac{2\mu_A \cdot y_O + y_i}{\mu_J x_i}, \quad (4.9)$$

где  $x_i, y_i$  – координаты текущей точки диаграммы энергомасс в старых осях  $J_{\Pi}, A_{\text{изб}}$ .

Определение углового ускорения звена приведения и времени его движения из одного положения в другое проводим по методике, изложенной в пунктах 5...7 подраздела 3.3.1.

### 4.3 Примеры решения задач

**Задача 4.1.** К барабану грузоподъёмного механизма приложен момент силы тяжести поднимаемого груза  $M_c = 8000$  Нм. Барабан приводится в движение асинхронным электродвигателем переменного тока с механической характеристикой  $M_d = 10000 - 100\omega$  через редуктор с передаточным отношением  $u = 10$ . Определить угловую скорость установившегося движения барабана.

**Решение.** Так как необходимо определить угловую скорость барабана, то возьмём его в качестве звена приведения. Приведём к нему отдельно движущие силы и силы полезного сопротивления. Приведённый момент сил полезного сопротивления:  $M_{пс} = M_c$ . Приведённый момент движущих сил определим по формуле

$$M_{пд} = M_d \frac{\omega}{\omega_6} = M_d \cdot u,$$

где  $\omega_6$  – угловая скорость барабана.

Движение станет установившимся, когда сравняются приведённые моменты:

$$M_{пд} = M_{пс}.$$

Тогда  $M_d \cdot u = M_c$ . Или  $10000 - 100\omega \cdot u = M_c$ . Заменив  $\omega$  на  $\omega_6 u$  и раскрыв скобки, получим

$$\omega_6 = \frac{M_c - 10000u}{-100u^2} = \frac{8000 - 10000 \cdot 10}{-100 \cdot 10^2} = 9,2 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, установившаяся угловая скорость барабана определена, задача решена.

**Задача 4.2.** Силы и массы звеньев машинного агрегата приведены к главному валу машины. Движение установилось с периодом, равным времени одного оборота звена приведения. Приведённый момент сил сопротивления  $M_{пс}$  изменяется по закону, показанному на рис. 4.4. Приведённый момент движущих сил постоянен и равен  $M_{пд} = 20$  Нм. Приведённый момент инерции звеньев  $J_{п} = 10$  кгм<sup>2</sup>. Угловая скорость в начале цикла установившегося движения  $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$ .

Определить экстремальные значения угловой скорости главного вала  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ , среднюю угловую скорость устано-

вившегося движения  $\omega_{\text{ср}}$ , коэффициент неравномерности хода машины  $\delta$ , угловое ускорение вала в начале цикла  $\varepsilon_0$ .

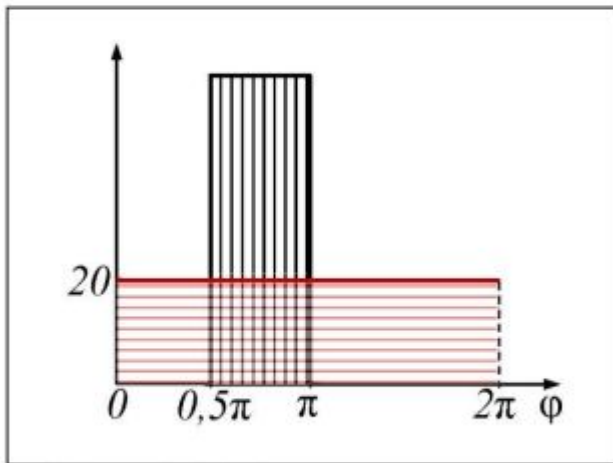


Рис. 4.4 Приведённые моменты к задаче 4.2

*Решение.* Сначала найдём величину неизвестного момента  $M_{\text{пс}}$ . Для этого воспользуемся законом передачи работы при установившемся движении: за один цикл работа движущих сил должна равняться работе сил сопротивления. Работа момента равна площади под его диаграммой. На этом основании запишем:

$$M_{\text{пс}} \pi - 0,5\pi = M_{\text{пд}} \cdot 2\pi.$$

Отсюда  $M_{\text{пс}} = M_{\text{пд}} \cdot 4 = 20 \cdot 4 = 80 \text{ Нм}.$

Так как силы, действующие в машине, зависят от положения звена привода (угла  $\varphi$ ) и известна начальная угловая скорость  $\omega_0$ , то для дальнейшего решения задачи динамического анализа воспользуемся уравнением движения в энергетической форме

$$\frac{J_{\text{п}} \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\text{п}} \omega_0^2}{2} = A_{\text{изб}_{0-i}}. \quad (4.10)$$

При  $J_{\text{п}} = \text{const}$  закон изменения  $\omega_i$  полностью определяется характером изменения избыточной работы.

Для того чтобы определить положения, в которых угловая скорость принимает экстремальные значения, будем рассуждать следующим образом. На промежутке от 0 до  $0,5\pi$  действует только момент движущих сил  $M_{\text{пд}}$ . Следовательно, избыточная работа, кинетическая энергия и угловая скорость будут возрастать. На промежутке от  $0,5\pi$  до  $\pi$  приведённый момент сил сопротивления  $M_{\text{пс}}$  больше приведённого момента движущих сил. Следовательно, избыточная работа будет отрицательной, и кинетическая энергия и угловая скорость будут убывать. Затем по аналогичным причинам угловая скорость будет возрастать на промежутке от  $\pi$  до  $2\pi$ . Далее цикл будет повторяться. Таким образом,  $\omega_i = \omega_{\text{max}}$  при  $\varphi = 0,5\pi$  и  $\omega_i = \omega_{\text{min}}$  при  $\varphi = \pi$ .

С учётом сказанного выше запишем уравнение движения для интервала от 0 до  $0,5\pi$ :

$$\frac{J_{\pi}\omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_{\pi}\omega_0^2}{2} = M_{\pi d} \cdot 0,5\pi.$$

Выразив  $\omega_{\max}$ , получим

$$\omega_{\max} = \frac{2 M_{\pi d} \cdot 0,5\pi + \frac{J_{\pi}\omega_0^2}{2}}{J_{\pi}} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 0,5 \cdot 3,14 + \frac{10 \cdot 10^2}{2}}{10} \approx 10,3 \text{ с}^{-1}.$$

Чтобы найти  $\omega_{\min}$ , запишем уравнение (4.10) для интервала от  $0,5\pi$  до  $\pi$ :

$$\frac{J_{\pi}\omega_{\min}^2}{2} - \frac{J_{\pi}\omega_{\max}^2}{2} = M_{\pi d} \cdot 0,5\pi - M_{\pi c} \cdot 0,5\pi.$$

Выразив  $\omega_{\min}$ , получим

$$\begin{aligned} \omega_{\min} &= \frac{2 M_{\pi d} \cdot 0,5\pi - M_{\pi c} \cdot 0,5\pi + \frac{J_{\pi}\omega_{\max}^2}{2}}{J_{\pi}} = \\ &= \frac{2 \cdot 20 \cdot 0,5 \cdot 3,14 - 80 \cdot 0,5 \cdot 3,14 + \frac{10 \cdot 10,3^2}{2}}{10} \approx 9,35 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Средняя угловая скорость звена приведения:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} = \frac{10,3 + 9,35}{2} = 9,82 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент неравномерности хода:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{10,3 - 9,35}{9,82} = 0,096.$$

Чтобы найти угловое ускорение звена приведения в начале цикла, воспользуемся уравнением движения в дифференциальной форме (3.9):

$$J_{\pi} \frac{d\omega}{dt} = M_{\pi}.$$

В начале цикла действует только движущий момент, поэтому

$$\varepsilon_0 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{\pi d}}{J_{\pi}} = \frac{20}{10} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, задача 4.2 решена.

## 4.4 Контрольные вопросы

1. Какое движение называют установившимся?
2. Чем вызваны периодические колебания скорости при установившемся движении?

3. В чём причина непериодических колебаний скорости при установившемся движении?
4. Каким образом влияют на периодические и непериодические колебания угловой скорости?
5. Как определяется коэффициент неравномерности хода машины?
6. Как определяется коэффициент динамичности?
7. В чём заключается особенность динамического анализа машинного агрегата при установившемся движении, если силы зависят от положения звеньев?
8. В чём суть метода последовательных приближений при динамическом анализе установившегося движения?

## 5 Динамический синтез машинного агрегата

Выше было показано, что из-за несовпадения законов изменения приведённых к главному валу движущих сил и сил сопротивления, а также из-за непостоянства приведенного момента инерции звеньев (приведённой массы) машинного агрегата наблюдаются периодические колебания скорости главного вала машины. Чтобы обеспечить качественную работу машинного агрегата, надо спроектировать его таким образом, чтобы коэффициент неравномерности хода машины, характеризующий интенсивность периодических колебаний скорости, не превышал допустимых значений (см. п. 4.1).

### 5.1 Приближённый метод определения момента инерции маховика

Для того чтобы выяснить, каким образом можно влиять на неравномерность хода машины, воспользуемся уравнением движения в энергетической форме

$$\frac{J_{\Pi i} \omega_i^2}{2} - \frac{J_{\Pi 0} \omega_0^2}{2} = A_{\text{изб}0-i}. \quad (5.1)$$

Для упрощения анализа примем  $J_{\Pi i} \approx \text{const}$ . В этом случае из уравнения движения следует, что максимальному изменению кинетической энергии  $A_{\text{изб}}^{\text{max}}$  внутри цикла установившегося движения будет соответствовать максимальное изменение угловой скорости звена приведения от  $\omega_{\min}$  до  $\omega_{\max}$ .

На этом основании (5.1) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{J_{\Pi} \omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_{\Pi} \omega_{\min}^2}{2} &= A_{\text{изб}}^{\text{max}}. \\ \text{Или} \quad J_{\Pi} \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2} &= A_{\text{изб}}^{\text{max}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Разложив разность квадратов с учётом (4.1) и (4.2), запишем (5.2) в виде

$$J_{\Pi} \delta \omega_{\text{ср}}^2 = A_{\text{изб}}^{\text{max}}.$$

Отсюда

$$\delta = \frac{A_{\text{изб}}^{\text{max}}}{J_{\Pi} \omega_{\text{ср}}^2}. \quad (5.3)$$

Из полученного выражения видно, что при заданных силах, действующих в машинах, на уменьшение коэффициента неравномерности хода машины можно влиять, увеличивая значения  $J_{\Pi}$  и  $\omega_{\text{ср}}$ . Однако любая машина изначально проектируется на максимальную производительность и, в связи с этим, резервы увеличения скоростей движения звеньев уже исчерпаны. Дальнейшее увеличение  $\omega_{\text{ср}}$  может привести к ухудшению потребительских свойств машины или даже к её выходу из строя. Следовательно, *чтобы уменьшить неравномерность хода машины, нужно увеличить приведённый момент инерции звеньев*. Для этого, чаще всего, на один из валов машинного агрегата устанавливают дополнительную массу, называемую *маховиком*.

Обычно это диск сплошной или с тяжелым ободом, так как такая форма даёт возможность легче уравновесить маховик и избежать дополнительных динамических нагрузок. Маховик является как бы аккумулятором кинетической энергии, накапливая её в период ускоренного движения звеньев и отдавая её обратно в момент замедления движения, сглаживая тем самым изменение угловой скорости главного вала. Такая аккумулирующая роль маховика позволяет использовать накопленную им энергию для преодоления повышенных кратковременных нагрузок без увеличения мощности двигателя.

Формула (5.3) позволяет получить приближённое значение момента инерции маховика  $J_{\text{м}}$ . С учётом массы маховика, установленного на звено приведения, можно записать

$$J_{\Pi} = J_{\text{м}} + J_1 + J_{\text{зв}},$$

где  $J_1$  – собственный момент инерции звена приведения;  $J_{\text{зв}}$  – среднее значение приведённого момента инерции всех остальных звеньев.

Тогда из (5.3) можно вычислить искомый момент инерции маховика:

$$J_{\text{м}} \approx \frac{A_{\text{изб}}^{\text{max}}}{\delta \omega_{\text{ср}}^2} - J_1 - J_{\text{зв}}.$$

Более точное решение этой задачи может быть получено с помощью диаграммы энергомасс.

## 5.2 Определение момента инерции маховика по диаграмме энергомасс

Для решения этой задачи должны быть заданы:

- кинематическая схема машины;
- массы и моменты инерции звеньев;
- силы, действующие в машине; для машин-двигателей обычно задают движущие силы (приведённый момент сил полезного сопротивления считается постоянным); для машин-орудий задают закон изменения сил полезного сопротивления (приведённый момент движущих сил считается постоянным);
- средняя угловая скорость главного вала машины  $\omega_{\text{ср}}$ ;
- допустимое значение коэффициента неравномерности хода машины  $\delta$ .

Действуя по методике, изложенной в разделе 4.2 (пункты 1...6), строим диаграмму энергомасс  $A_{\text{изб}} = A_{\text{изб}}(J_{\text{п}})$  (рис. 4.3, а, б, в, г). Результат построения показан на рис. 5.1.

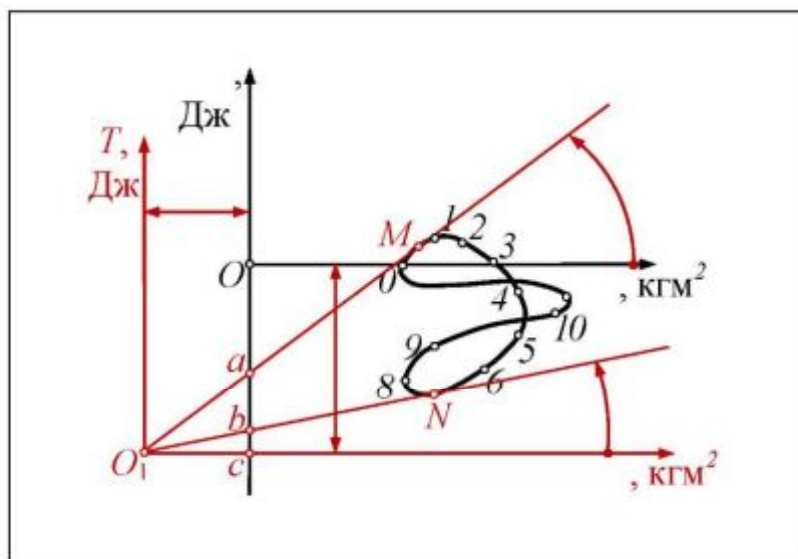


Рис. 5.1 К определению момента инерции маховика

После построения диаграммы энергомасс в осях  $J_{\text{п}}$ ,  $A_{\text{изб}}$  ищут начало новой системы координат  $T J_{\text{п}}$  – точку  $O_1$ . Для этого последовательно находят:

- 1) экстремальные значения угловой скорости по формулам

$$\omega_{\text{max}} = \omega_{\text{ср}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), \quad \omega_{\text{min}} = \omega_{\text{ср}} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right);$$

- 2) значения углов наклона касательных к диаграмме энергомасс через их тангенсы:

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_A} \omega_{\max}^2, \quad \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_A} \omega_{\min}^2. \quad (5.4)$$

Далее под известными углами  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  проводят касательные к диаграмме энергомасс и находят положение точки их пересечения. Эта точка –  $O_1$  – и будет являться началом новой системы координат диаграммы  $T J_{\Pi}$ . Причём отрезок  $x_0$  будет изображать момент инерции маховика, устанавливаемого на звено приведения, а отрезок  $y_0$  изобразит кинетическую энергию машины (вместе с маховиком), накопленную в период её разгона.

Искомый момент инерции маховика можно вычислить по формуле

$$J_M = x_0 \cdot \mu_J, \quad (5.5)$$

где  $x_0$  – длина отрезка в миллиметрах.

Однако на практике из-за малых значений коэффициента неравномерности  $\delta$  углы  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  незначительно отличаются друг от друга, поэтому точка  $O_1$  пересечения касательных может оказаться далеко за пределами чертежа. В этом случае момент инерции маховика вычисляют через длину отрезка  $ab$  (рис. 5.1).

Из рисунка видно, что

$$ab = ac - bc = O_1c \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max} - O_1c \cdot \operatorname{tg} \psi_{\min}.$$

$$\text{Отсюда} \quad O_1c = x_0 = \frac{ab}{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}}.$$

С учётом формул (5.4) запишем

$$x_0 = \frac{ab \cdot 2\mu_A}{\mu_J \omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}.$$

$$\text{Так как } \omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = \omega_{\max} + \omega_{\min} \quad \omega_{\max} - \omega_{\min} = 2\delta\omega_{\text{ср}}^2, \text{ то}$$

$$x_0 = \frac{ab \cdot \mu_A}{\mu_J \delta \omega_{\text{ср}}^2}.$$

Подставив полученный результат в (5.5), получим

$$J_M = \frac{ab \cdot \mu_A}{\delta \omega_{\text{ср}}^2}. \quad (5.6)$$

Для некоторого класса машин, к которым относятся двигатели внутреннего сгорания, поршневые компрессоры и т.п., при больших значениях средней угловой скорости главного вала допустимый коэффициент неравномерности  $\delta$  имеет малую величину. В этом случае углы  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  близки к  $90^\circ$  и отрезок  $ab$  оказывается за пределами чертежа, а координату  $x_0$  определяют аналитически, используя уравнения касательных (4.7) и (4.8).

Из этих уравнений следует:

$$x_0 = \frac{y_M - y_N - x_M \operatorname{tg} \psi_{\max} + x_N \operatorname{tg} \psi_{\min}}{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}}. \quad (5.7)$$

Отметим, что в формуле (5.7) координаты точек касания  $M$  и  $N$  измеряются в старой системе координат  $A_{\text{изб}}(J_{\text{п}})$  и берутся со своими знаками. Зная  $x_0$ , по формуле (5.5) вычисляют искомый момент инерции маховика.

Если маховик устанавливают на звене приведения, то его момент инерции равен подсчитанному значению  $J_{\text{м}}$ . В принципе он может быть установлен на любом вращающемся звене. Если маховик устанавливают не на звене приведения, а на  $i$ -м звене, то его момент инерции  $J_{\text{м}i}$  находится по правилам приведения (его кинетическая энергия должна оставаться неизменной):

$$\frac{J_{\text{м}i} \omega_i^2}{2} = \frac{J_{\text{м}} \omega_1^2}{2}.$$

Откуда  $J_{\text{м}i} = J_{\text{м}} \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} = J_{\text{м}} u_{1i}^2, \quad (5.8)$

где  $u_{1i}$  – передаточное отношение от звена приведения  $I$  к  $i$ -му звену.

Из (5.8) видно, что чем больше угловая скорость  $\omega_i$ , тем меньше величина  $J_{\text{м}i}$ . Поэтому с целью уменьшения размеров маховика его лучше устанавливать на звеньях, вращающихся с большими угловыми скоростями. Однако при этом необходимо учитывать жёсткость вала. При недостаточной жёсткости вала маховик может вызвать значительные крутильные колебания вала и в результате неравномерность хода машины не уменьшится, а напротив, увеличится.

### 5.3 Контрольные вопросы

1. Какой параметр динамической модели надо варьировать, чтобы уменьшить неравномерность хода машины?
2. Что такое маховик?
3. Какую функцию выполняет маховик?
4. Как приближённо рассчитать момент инерции маховика?
5. Как, используя диаграмму энергомасс, определить момент инерции маховика?

## 6 Компьютерный динамический анализ и синтез машинного агрегата

Как отмечалось выше, динамический анализ или синтез машинного агрегата представляет собой сложную вычислительную операцию. Замена динамической системы динамической моделью не избавляет от необходимости определения по громоздким зависимостям приведённых инерционных и силовых параметров. Рассмотренные графические методы позволяют значительно снизить трудоёмкость вычислений. Они являются мощным инструментом выработки у студентов «кинематического и динамического мышления». Однако эти методы, как любые графические методы, имеют существенные погрешности получаемых результатов.

Оптимальным, по нашему мнению, будет сочетание компьютерных аналитических методов получения основных результатов с графическими методами как проверочными. В связи с этим ставится задача формализации структур механических систем и в первую очередь – рычажных механизмов.

### 6.1 Формализация структуры рычажных механизмов

*Выбор системы координат.* При аналитическом описании структуры механизмов используется только *правая прямоугольная система координат* с началом на оси вращения кривошипа. Если в механизме есть неподвижная направляющая, то ось  $x$  направляется параллельно этой направляющей. Если в механизме имеется несколько неподвижных направляющих, то ось  $x$  направляется параллельно той направляющей, которая принадлежит наиболее удалённой группе Ассура в соответствии с формулой строения механизма (рис. 6.1). При этом положение оси  $x$  определяется углом  $Q$ , который отсчитывается от правой горизонтали против хода часовой стрелки. Например, в механизме на рис. 6.1 этот угол равен  $270^\circ + \alpha$ . Обобщённая координата  $F_0$  отсчитывается от оси  $x$  против хода часовой стрелки:

$F_0 = 90^\circ - \alpha + \varphi$ , где  $\varphi$  – угол поворота кривошипа от горизонтали. Вращение кривошипа против хода часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке – отрицательным.

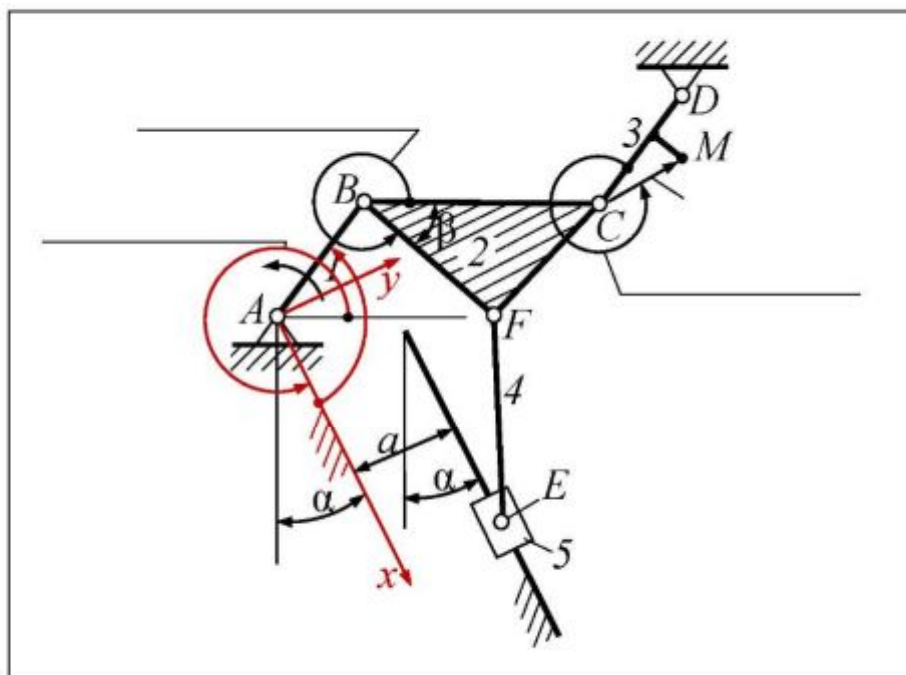


Рис. 6.1 К описанию положения механизма

*Описание структурных групп (групп Ассура).* Структурные группы нумеруют в соответствии с формулой строения механизма. Группа, присоединённая к начальной системе, будет иметь номер  $K = 1$ , следующая группа –  $K = 1$  и так далее.

*Звенья нумеруют отдельно внутри группы.* Номер  $I$  присваивается каждому звену группы, начиная с того, которым группа присоединяется либо к входному звену, либо к предыдущей группе. Например, если  $K, I = 2, 1$ , то речь идёт о звене 1 в структурной группе 2.

*Аналогично нумеруются кинематические пары в каждой структурной группе.* Номер кинематической пары в группе обозначается буквой  $L$ , и, например, координаты в системе  $x, y$  задаются так:  $x_{K,L}$ ,  $y_{K,L}$ . Здесь  $K$  – номер группы,  $L$  – номер кинематической пары в группе. Так, координаты  $x_{1,3}$ ,  $y_{1,3}$  определяют положение третьей кинематической пары в структурной группе 1.

Покажем формализацию структуры механизма на примере рычажного механизма, изображённого на рис. 6.2.

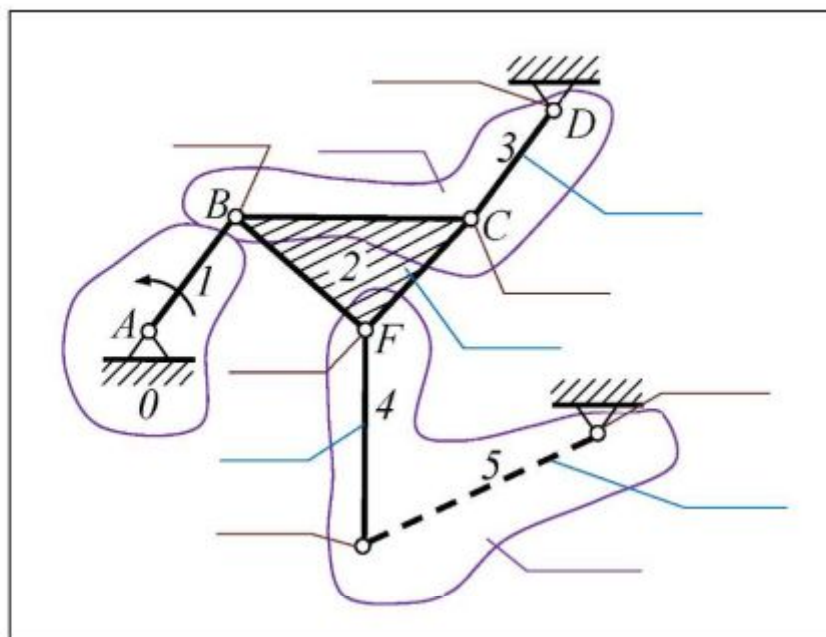


Рис. 6.2 К описанию структуры механизма

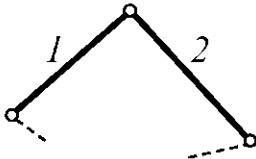
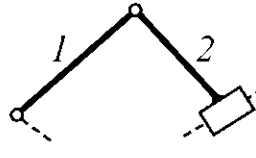
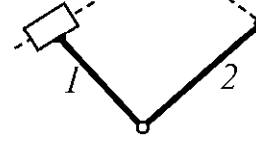
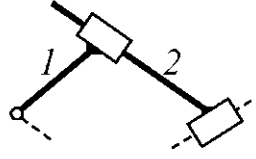
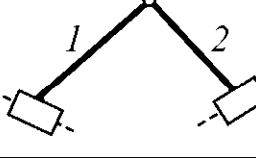
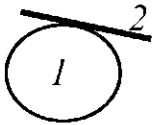
На этом рисунке изображена структурная схема механизма с рис. 6.1, в котором ползун 5 преобразован в бесконечной длины поводок 5, показанный пунктиром. Из рисунка видно, что после кодирования структуры звено 2,1 обозначает звено 4, а кинематическая пара 2,1 есть шарнир  $F$ .

Перейдём теперь к формализации *вида структурной группы*. Для обращения к соответствующей подпрограмме расчёта в зависимости от структуры исследуемого механизма вводят обозначения  $J K$ , где  $J$  – вид структурной группы. Этот вид выбирается в соответствии с табл. 6.1. Буквой В в таблице обозначены вращательные кинематические пары, буквой П – поступательные.

При заданном положении входного звена некоторые структурные группы могут иметь два возможных положения её звеньев, т.е. могут иметь два способа сборки. Для описания имеющего место способа сборки вводится *признак сборки структурной группы*  $CB(K)$ . Признак сборки может иметь два значения – "1" и "–1", если группы могут присоединяться в двух различных вариантах, и третье значение – "0", если вариант только один.

Так для группы ВВВ (табл. 6.1) возможны два варианта сборки (рис. 6.3).  $CB K = 1$ , если контур  $ABCA$  обходится против хода часовой стрелки (рис. 6.3, а);  $CB K = -1$ , если контур  $ABCA$  обходится по часовой стрелке (рис. 6.3, б).

Таблица 6.1

| Виды групп                                                                          | Буквенные обозначения | Виды групп (признак $J$ ) |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------------------|
|    | ВВВ                   | 1                         |
|    | ВВП                   | 2                         |
|    | ПВВ                   | 3                         |
|   | ВПП                   | 4                         |
|  | ВПП                   | 5                         |
|  | ПВП                   | 6                         |
|  | —                     | 7                         |

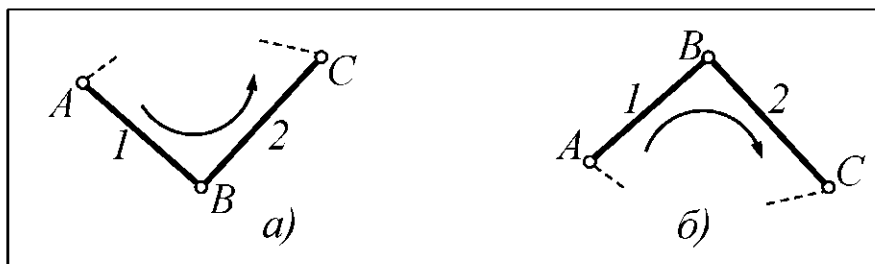


Рис. 6.3 Варианты сборки группы Ассура ВВВ

Для группы ВВП (рис. 6.4):  $CB K = 1$ , если проекция вектора  $l$  звена  $l$  на ось  $x$  положительна (рис. 6.4, а);  $CB K = -1$ , если проекция вектора  $l$  звена  $l$  на ось  $x$  отрицательна (рис. 6.4, б).

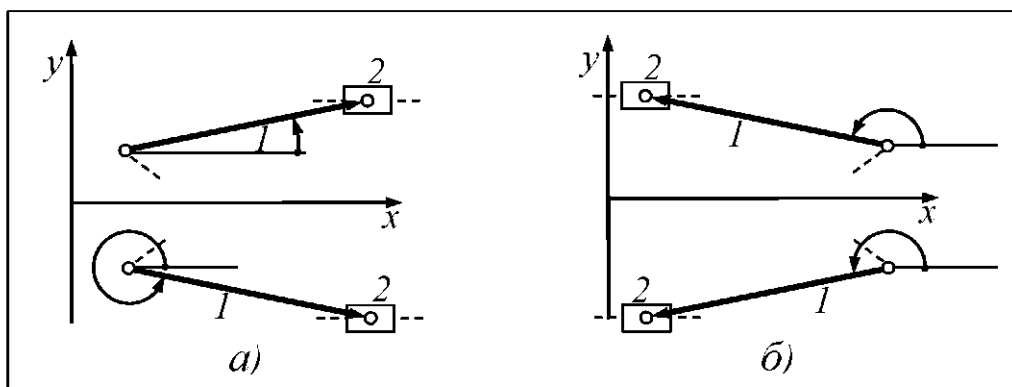


Рис. 6.4 Варианты сборки группы Ассура ВВП

Варианты сборки группы ВПВ кодируются так:  $CB K = 1$ , если кулисой (подвижной направляющей) является звено 2 (рис. 6.5, а);  $CB K = -1$ , если кулисой является звено 1 (рис. 6.5, б).



Рис. 6.5 Варианты сборки группы Ассура ВПВ

Для остальных структурных групп параметр сборки равен нулю  $CB K = 0$ .

Длины звеньев кодируют так:  $A K, 1$ ,  $A K, 2$ , где  $A$  – длина звена в метрах,  $K$  – номер группы, в которую входит звено. Под длиной звена будем понимать длину основного вектора этого звена (вектор параллельный осевой линии звена, входящего в структурную группу). Если звеном является ползун или если основной вектор звена имеет переменную длину, то длину этого звена обозначают (условно) нулём.

Координаты присоединения звена группы Ассура к стойке  $X K, 3$ ,  $Y K, 3$ . Если структурная группа соединена со стойкой вращательной парой, то  $X K, 3$  и  $Y K, 3$  равны соответствующим координатам этой точки в метрах. Если структурная группа соединена со стойкой поступательной парой, то параметр  $Y K, 3$

равен углу между осью  $x$  и направляющей поступательной пары в градусах, а параметр  $Y_{K,3}$  равен смещению направляющей, взятому с соответствующим знаком, относительно начала системы координат. Например, на рис. 6.1 кодирование присоединения к стойке звена 5 будет выглядеть так: параметр  $X_{2,3}$  равен нулю, так как направляющая поступательной пары параллельна оси  $x$ ; параметр  $Y_{2,3}$  равен размеру  $a$  в метрах. Первая цифра в квадратных скобках  $K = 2$  показывает номер группы Ассура в порядке её присоединения (см. рис. 6.2).

*Звено присоединения в предыдущей группе* кодируется в том случае, если к ней присоединяется другая группа. Параметр присоединения  $IP_K$  равен либо номеру звена в *предыдущей* группе (1 или 2), либо  $IP_K = 0$ , если структурная группа присоединена к начальному механизму.

*Длина дополнительного вектора  $TP_K$  и угол дополнительного вектора  $UP_K$* . Эти два параметра описывают положение точки присоединения последующей структурной группы к предыдущей. Параметры  $TP_K = 0$  и  $UP_K = 0$ , если структурная группа присоединяется к начальному механизму. Если для описания положения точки присоединения удаётся выделить дополнительный вектор постоянной длины, то параметр  $TP_K$  равен длине этого вектора в метрах. Таким вектором является вектор  $l_{BF}$  на рис. 6.1 или  $l_{BD}$  на рис. 6.6,  $a$ , а также  $l_{CD}$  на рис. 6.6,  $b$ .

*Угол  $UP_K$*  – это угол между основным вектором звена и указанным выше дополнительным вектором. Отсчитывается он от основного вектора против хода часовой стрелки. Например, на рис. 6.1 – это угол  $\varphi_{\text{доп}} = 360^\circ - \beta$ . Поэтому  $UP_K = 360^\circ - \beta$ .

Если на звене присоединения в предыдущей группе не удаётся выделить дополнительный вектор постоянной длины, то для описания этих случаев присоединения структурной группы параметру  $TP_K$  приписывают условные значения 0, 1 или 2. Рассмотрим этот случай более подробно. На рис. 6.6  $a, \dots, d$  показаны возможные варианты присоединения структурной группы (изображена сплошными линиями) и соответствующие значения параметров  $TP_K$  и  $UP_K$  предыдущей группы (показана пунктирной линией). Основным вектором на звене присоединения является вектор  $l_{BC}$ .

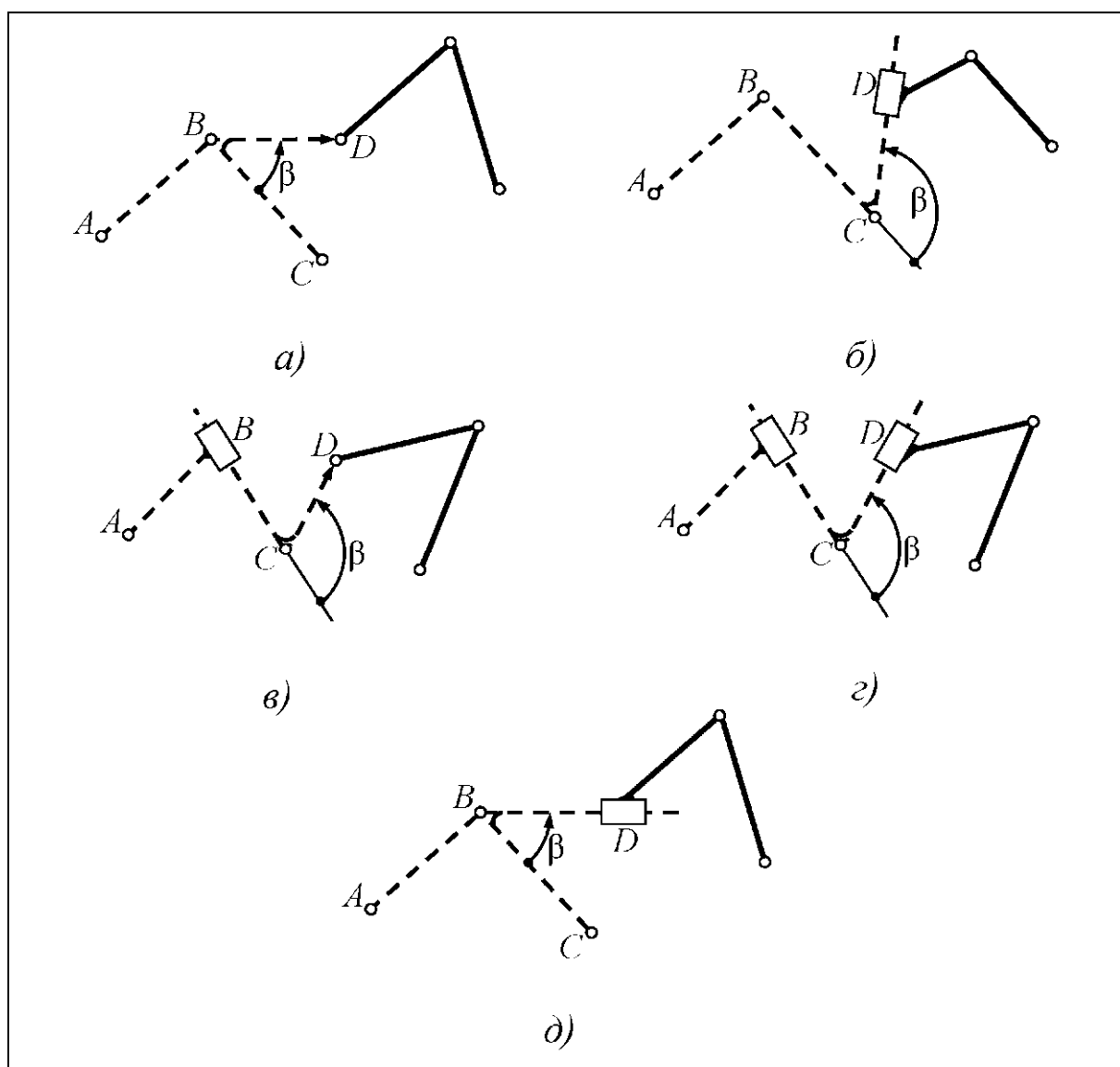


Рис. 6.6 Варианты присоединения групп Ассура

*Дополнительная точка.* Если требуется найти кинематические параметры какой-то дополнительной точки, не принадлежащей кинематической паре (точка  $M$  на рис. 6.1), то вводится вектор дополнительной точки  $TS\ K,I$  и угол этого вектора  $US\ K,I$ . Параметр  $TS\ K,I$  равен расстоянию от одной из шарнирных точек звена до дополнительной точки, если есть такая возможность, то от первой шарнирной точки звена. Параметр  $US\ K,I$  равен углу между основным вектором звена и вектором дополнительной точки. Например, длина вектора дополнительной точки  $M$  на рис. 6.1  $TS\ 1,2 = l_{CM}$ , а угол вектора дополнительной точки  $US\ 1,2 = 360^\circ - \vartheta$ , где  $\vartheta$  – кратчайший угол между основным вектором звена и дополнительным вектором  $l_{CM}$ .

После ввода соответствующих параметров, определяющих структуру и кинематику механизма, вводятся массы и моменты инерции звеньев, а также силы сопротивления по положениям с учётом знака по отношению к выбранной оси  $x$ . Если сила совпадает по направлению с осью  $x$ , то она имеет положительный знак, в противном случае – отрицательный.

В дальнейшем параметры динамической модели выводятся в виде таблицы на экран компьютера или на печать. Пример ввода в компьютер параметров динамической системы для дальнейшего её динамического анализа и синтеза будет рассмотрен в следующем разделе.

## 6.2 Компьютерный динамический анализ и синтез поперечно-строгального станка

Сформулируем задачу динамического анализа и синтеза машинного агрегата применительно к поперечно-строгальному станку, кинематическая схема которого изображена на рис. 6.7.

### 6.2.1 Исходные данные

Построить динамическую модель поперечно-строгального станка, приняв за звено приведения кривошип  $I$ . Определить значение коэффициента неравномерности хода машины. Найти момент инерции маховика, обеспечивающего заданное значение коэффициента неравномерности  $\delta$ . Построить график изменения угловой скорости  $\omega_1$  звена приведения для машины с маховиком.

*Исходные данные* для решения задачи. Линейные размеры:

- длина кривошипа  $l_{AB} = 0,127$  м;
- длина кулисы  $l_{CD} = 0,53$  м;
- длина шатуна  $l_{DE} = 0,191$  м;
- расстояние между центрами вращения кривошипа и кулисы  $l_{AC} = 0,32$  м;
- высота хода ползуна  $5 y_E = 0,1885$  м;
- положение центров масс кулисы и шатуна  $l_{CS_3} = l_{CD}/2$ ,  $l_{DS_4} = l_{DE}/2$ .

Инерционные характеристики звеньев:

- массы  $m_3 = 17$  кг,  $m_4 = 20$  кг,  $m_5 = 56$  кг;

- моменты инерции относительно центров масс  $J_{S_1} = 0,2 \text{ кгм}^2$ ,  $J_{S_3} = 1,4337 \text{ кгм}^2$ ,  $J_{S_4} = 0,1457 \text{ кгм}^2$ ; момент инерции ротора электродвигателя  $J_p = 0,02 \text{ кгм}^2$ ; приведённый к кривошипу момент инерции зубчатых колёс и кулачкового механизма  $J' = 3 \text{ кгм}^2$ .

Среднее значение угловой скорости кривошипа  $\omega_{cp} = 9,42 \text{ с}^{-1}$ . Допустимое значение коэффициента неравномерности хода машины  $\delta = 0,05$ .

Передаточное отношение планетарного редуктора  $u_{1H} = 5$ ; числа зубьев колёс  $z_4 = 13$ ,  $z_5 = 26$ .

Закон изменения сил полезного сопротивления (силы резания)  $F_{pc}$  представлен графиком на рис. 6.7. Максимальное значение этой силы  $F_{pc} = 2700 \text{ Н}$ .

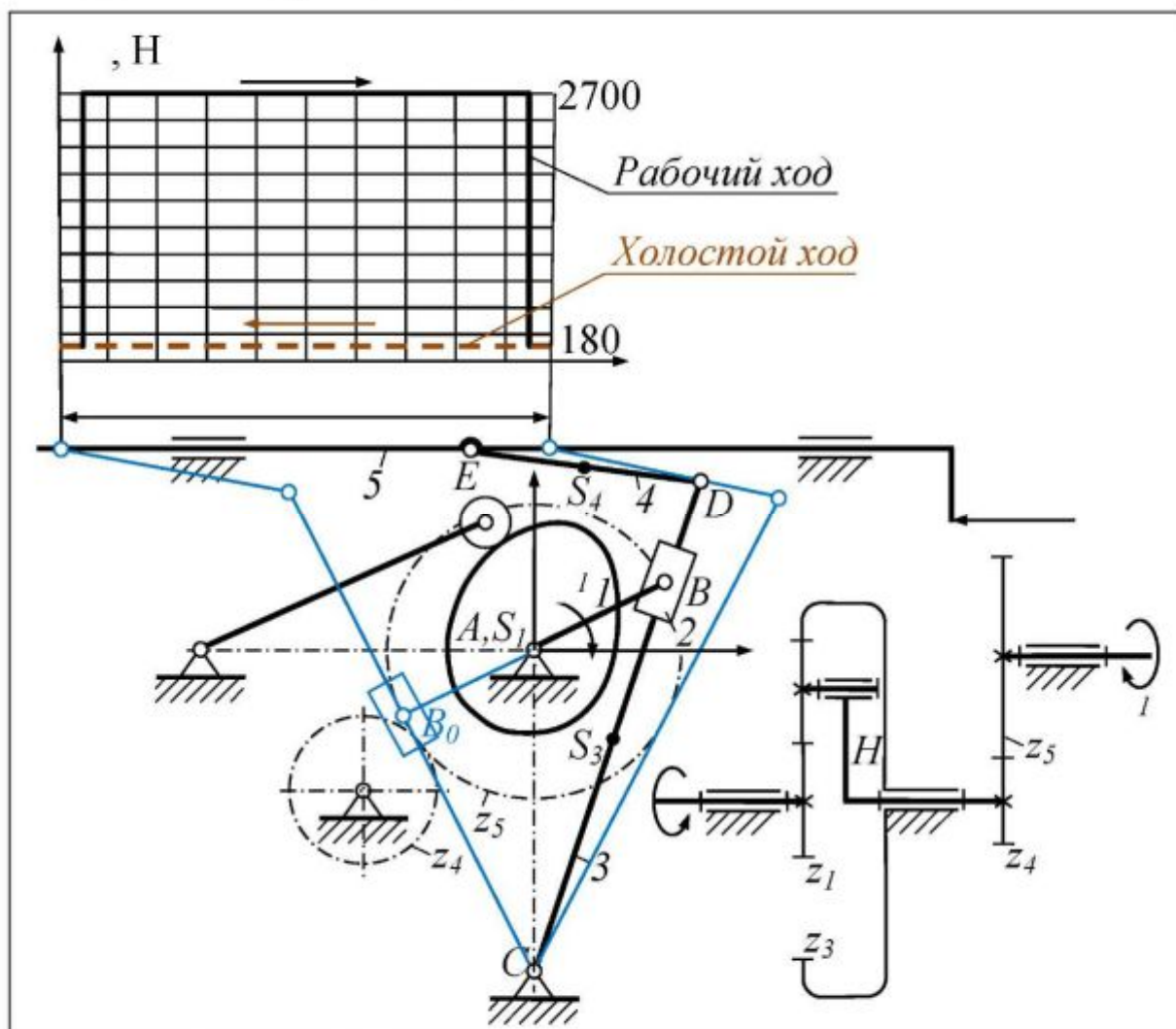


Рис. 6.7 Схема поперечно-строгального станка

## 6.2.2 Определение приведённого момента внешних сил

По условию задачи выбираем в качестве звена приведения кривошип  $I$ . Известны внешние силы, действующие на механизм, – это силы тяжести звеньев и сила полезного сопротивления. Силы тяжести определяются умножением массы звеньев на ускорение свободного падения. Для определения приведённого момента этих сил воспользуемся формулой (2.18). Внешние моменты на механизм не действуют, поэтому второе слагаемое правой части этой формулы равно нулю. Отметим, что движущий момент неизвестен, поэтому мы его пока не приводим.

Представив аналоги скоростей через их проекции на оси неподвижной системы координат  $Axy$  (рис. 6.7), из (2.18) получим

$$M_{\Pi} = G_3 v_{qs_{3y}} + G_4 v_{qs_{4y}} + F_{\text{пс}} v_{qE}, \quad (6.1)$$

где  $v_{qs_{3y}}$ ,  $v_{qs_{4y}}$  – проекции аналогов скоростей центров масс кулисы 3 и шатуна 4 соответственно на ось  $y$ ;  $v_{qE}$  – аналог скорости точки  $E$ .

## 6.2.3 Определение приведённого момента инерции

Учитывая, что звеном приведения является кривошип  $I$ , и воспользовавшись формулой (2.2), составим выражение для определения приведённого момента инерции  $J_{\Pi}$ :

$$J_{\Pi} = J_p \frac{\omega_{\text{дв}}^2}{\omega_1^2} + J' + J_{S_1} + m_3 \frac{v_{S_3}^2}{\omega_1^2} + J_{S_3} \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} + m_4 \frac{v_{S_4}^2}{\omega_1^2} + J_{S_4} \frac{\omega_4^2}{\omega_1^2} + m_5 \frac{v_E^2}{\omega_1^2}. \quad (6.2)$$

Передаточное отношение, записанное в первом слагаемом выражения (6.2), есть величина постоянная. Вычислим его. Из схемы зубчатой передачи на рис. 6.7 видно, что:

$$u_{\text{дв},1} = \frac{\omega_{\text{дв}}}{\omega_1} = u_{1H} \cdot u_{45} = u_{1H} - \frac{z_5}{z_4} = 5 - \frac{26}{13} = -10.$$

Тогда первые три слагаемых в (6.2) можно вычислить:

$$J_1 = J_p \frac{\omega_{\text{дв}}^2}{\omega_1^2} + J' + J_{S_1} = 0,02 \cdot (-10)^2 + 3 + 0,2 = 5,2 \text{ кгм}^2.$$

Заменив в (6.2) отношения скоростей их аналогами, получим

$$J_{\Pi} = J_1 + m_3 v_{qs_3}^2 + J_{S_3} \omega_{q3}^2 + m_4 v_{qs_4}^2 + J_{S_4} \omega_{q4}^2 + m_5 v_{qE}^2. \quad (6.3)$$

Полученные расчётные формулы определения приведённого момента внешних сил (6.1) и приведённого момента инерции (6.3) необходимы для проверочного расчёта в одном положении механизма. Вычисление  $M_{\Pi}$  и  $J_{\Pi}$  для множества положений выполним аналитически на компьютере на основе формализации структуры механизма, методика которой изложена в разделе 6.1.

#### 6.2.4 Компьютерное определение параметров динамической модели

За начальное положение механизма принимаем его крайнее положение в начале рабочего хода –  $B_0$  на рис. 6.7. Угол, определяющий положение кривошипа  $I$  в этом положении, вычисляем аналитически по формуле  $F0 = 180^\circ + \frac{\theta}{2}$ , где  $\theta$  – угол размаха кулисы, найденный при геометрическом синтезе механизма. Он равен  $46,66^\circ$ . Следовательно,  $F0 = 203,33^\circ$ .

Составим таблицу ввода исходных данных в компьютер, используя изложенную выше методику, и введём данные в диалоговом режиме [6]. Механизм включает: начальную систему – звенья 0, 1; группу Ассура 2, 3, присоединённую к начальной системе; группу Ассура 4, 5, присоединённую к предыдущей группе и стойке.

Таблица 6.1

Результаты кодирования исходных данных

| Вводимый параметр                      | Обозначение | Значение параметра |          |
|----------------------------------------|-------------|--------------------|----------|
|                                        |             | Группа 1           | Группа 2 |
| <u>Общие параметры</u>                 |             |                    |          |
| Угол наклона оси абсцисс к горизонтали | $Q$         | 0                  |          |
| Число групп Ассура                     | $M$         | 2                  |          |
| Число положений для расчёта            | $N$         | 12                 |          |
| <u>Начальная система</u>               |             |                    |          |
| Длина кривошипа                        | $AK$        | 0,127              |          |

Продолжение табл. 6.1

|                                                                                            |            |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------|--------|
| Угловая скорость кривошипа                                                                 | $WK$       | −9,42  |        |
| Начальный угол поворота кривошипа                                                          | $F0$       | 203,33 |        |
| Число оборотов кривошипа за цикл                                                           | $I0$       | 1      |        |
| Приведённый момент инерции кривошипа                                                       | $P0$       | 5,2    |        |
| <u>Группы Ассура</u>                                                                       |            |        |        |
| Звено присоединения в предыдущей группе                                                    | $IP[K]$    | 0      | 2      |
| Длина дополнительного вектора                                                              | $TP[K]$    | 0      | 0,53   |
| Угол дополнительного вектора                                                               | $UP[K]$    | 0      | 180    |
| Вид группы Ассура                                                                          | $J[K]$     | 4      | 2      |
| Длины звеньев                                                                              | $A[K, 1]$  | 0      | 0,191  |
|                                                                                            | $A[K, 2]$  | 0      | 0      |
| Координаты соединения со стойкой                                                           | $X[K, 3]$  | 0      | 0      |
|                                                                                            | $Y[K, 3]$  | −0,32  | 0,1885 |
| Признак сборки                                                                             | $CB[K]$    | 1      | −1     |
| Длины векторов дополнительных точек                                                        | $TS[K, 1]$ | 0      | 0,095  |
|                                                                                            | $TS[K, 2]$ | 0,265  | 0      |
| Углы векторов дополнительных точек                                                         | $US[K, 1]$ | 0      | 0      |
|                                                                                            | $US[K, 2]$ | 180    | 0      |
| Массы звеньев                                                                              | $G[K, 1]$  | 0      | 20     |
|                                                                                            | $G[K, 2]$  | 17     | 56     |
| Моменты инерции звеньев                                                                    | $GI[K, 1]$ | 0      | 0,1457 |
|                                                                                            | $GI[K, 2]$ | 1,4337 | 0      |
| <u>Вопросы</u>                                                                             |            |        |        |
| Приложена ли к группе внешняя нагрузка? (0 – нет, 1 – да)                                  |            | 0      | 1      |
| Номер звена, к которому приложена нагрузка?                                                |            | —      | 2      |
| Звено, к которому приложена нагрузка, совершает поступательное движение? (0 – нет, 1 – да) |            | 0      | 1      |

После ввода параметров табл. 6.1 вводятся значения силы полезного сопротивления по положениям с учётом знака по отношению к выбранной оси  $x$ : если сила совпадает по направлению с осью  $x$ , то она имеет положительный знак, в противном случае – отрицательный. Таблица ввода силы сопротивления представлена ниже (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Значения силы полезного сопротивления, Н

|                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| $PC[0] = -180$  | $PC[6] = -2700$ |
| $PC[1] = -2700$ | $PC[7] = -180$  |
| $PC[2] = -2700$ | $PC[8] = 180$   |
| $PC[3] = -2700$ | $PC[9] = 180$   |
| $PC[4] = -2700$ | $PC[10] = 180$  |
| $PC[5] = -2700$ | $PC[11] = 180$  |

Результаты расчёта параметров динамической модели выводятся на экран компьютера в виде табл. 6.3. Для дальнейшей работы их необходимо сохранить в отдельном файле.

Таблица 6.3

| Параметры динамической модели |          |           |            |            |
|-------------------------------|----------|-----------|------------|------------|
| $I$                           | $IPR$    | $MPR$     | $PINX$     | $PINY$     |
| 0                             | 5,200000 | 0,00126   | -1514,0424 | -148,71204 |
| 1                             | 5,75108  | 217,90875 | -846,66535 | -43,66407  |
| 2                             | 6,54363  | 342,70417 | -474,45454 | 27,27533   |
| 3                             | 7,04363  | 400,28775 | -169,20791 | 62,29630   |
| 4                             | 7,11050  | 402,66831 | 78,48612   | 69,43478   |
| 5                             | 6,80958  | 363,90624 | 285,79427  | 50,52359   |
| 6                             | 6,22193  | 286,50972 | 556,60470  | 0,78718    |
| 7                             | 5,44449  | 5,73373   | 1108,08346 | -88,32821  |
| 8                             | 5,50597  | 14,99516  | 2170,21643 | -180,66474 |
| 9                             | 10,44738 | 55,34863  | 2879,15004 | 46,54285   |
| 10                            | 15,07951 | 56,66511  | -1138,1641 | 335,92260  |
| 11                            | 7,24697  | 17,70775  | -2948,3754 | -130,86046 |

В табл. 6.3 использованы следующие идентификаторы:  $IPR$  – приведённый момент инерции;  $MPR$  – приведенный момент сил

тяжести и силы полезного сопротивления;  $P_{INX}$ ,  $P_{INY}$  – проекции главного вектора сил инерции на оси  $x$  и  $y$ , соответственно<sup>2</sup>.

### 6.2.5 Проверочный расчёт

Проверим найденные с помощью компьютера параметры динамической модели  $M_{\Pi}$  и  $J_{\Pi}$  для одного из положений механизма, например, для положения 2.

*Определение приведённого момента  $M_{\Pi}$  с помощью рычага Жуковского.* На рис. 6.8 изображена: *а* – кинематическая схема механизма в положении 2; *б* – план скоростей; *в* – рычаг Жуковского с приложенными в соответствующих точках внешними силами и приведённой силой  $F_{\Pi}$ .

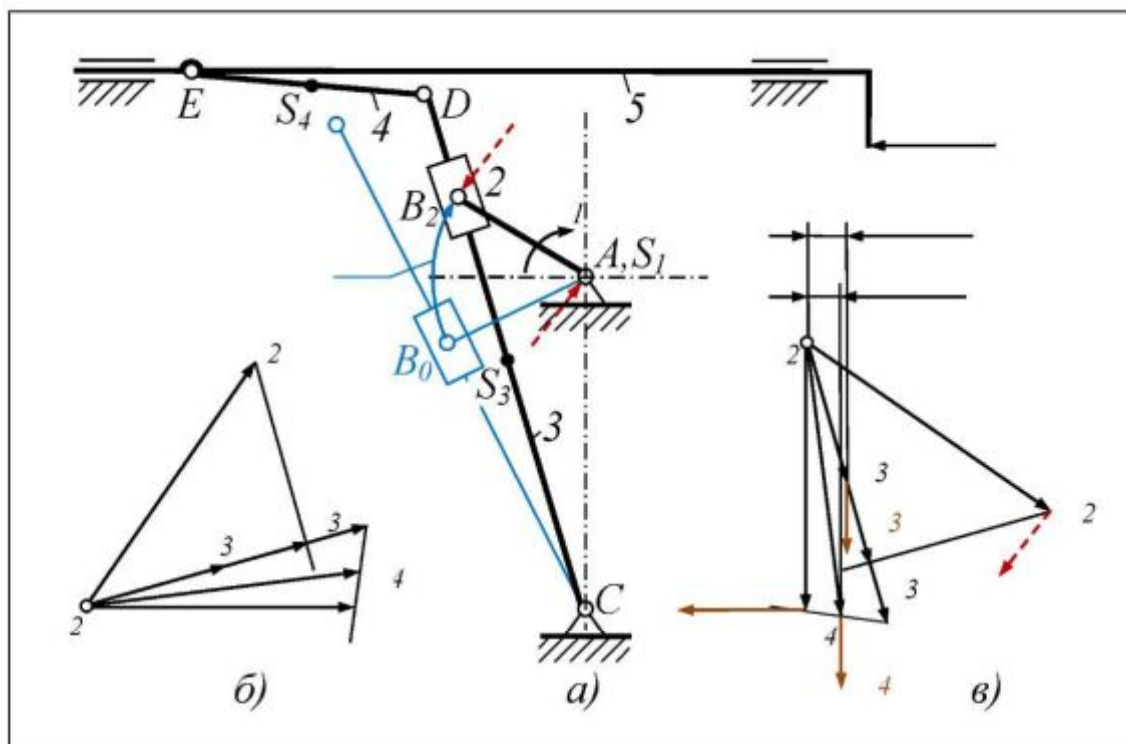


Рис. 6.8 К проверочному расчёту параметров приведения

Процедура построения плана скоростей не описывается, т.к. динамический анализ механизма обычно проводят после выполненного ранее кинематического анализа.

Напомним, что рычаг Жуковского – это повернутый на  $90^\circ$  план скоростей. Поворот выполнен по часовой стрелке, куда

<sup>2</sup> Проекции главного вектора сил инерции на оси  $x$  и  $y$  в рамках решения задачи динамического анализа и синтеза не нужны. Они необходимы для выполнения кинетостатического (силового) расчёта, который в данном учебном пособии не рассматривается.

вращается кривошип (направление поворота значения не имеет). В соответствующих точках приложены силы тяжести кулисы 3 и шатуна 4, а также сила полезного сопротивления. Сила тяжести звена 5 в точке  $e$  не приложена, т.к. её линия действия проходит через полюс  $p_2$  и момента эта сила относительно полюса не создаёт. Неизвестный приведённый момент, приложенный к кривошипу, разложен на пару сил с плечом  $l_{AB}$ . На рычаг Жуковского перенесена одна из сил пары  $F_{\Pi}$ .

Составим уравнение моментов сил относительно полюса рычага Жуковского, руководствуясь правилом: *момент силы считается положительным, если он совпадает по направлению с моментом  $F_{\Pi}$ , в противном случае он отрицательный*. В нашем примере моменты всех сил совпадают с направлением момента приведённой силы, поэтому

$$F_{\Pi} \cdot p_2 b_2 = F_{\text{пс}} \cdot p_2 e + G_3 \cdot h_{G_3} + G_4 \cdot h_{G_4}. \quad (6.4)$$

Откуда:

$$F_{\Pi} = \frac{F_{\text{пс}} \cdot p_2 e + G_3 \cdot h_{G_3} + G_4 \cdot h_{G_4}}{p_2 b_2} = \frac{2700 \cdot 49,5 + 166,7 \cdot 6 + 196,2 \cdot 5}{50} = 2712,6 \text{ Н.}$$

Плечи сил в уравнении (6.4) измеряются на рычаге Жуковского в миллиметрах. Результат расчёта получился положительным. Это означает, что направление приведённого момента было выбрано правильно. Если результат отрицательный, направление приведённого момента необходимо поменять на противоположное.

Вычислим приведённый момент внешних сил:

$$M_{\Pi} = F_{\Pi} \cdot l_{AB} = 2712,6 \cdot 0,127 = 344,5 \text{ Нм.}$$

На рис. 6.8, *a* видно, что момент приведённой силы  $F_{\Pi}$  отрицателен, т.к. препятствует вращению кривошипа.

Сравнивая полученное значение  $M_{\Pi}$  со значением приведённого момента, полученного расчётным путём (табл. 6.3 при  $I = 2$ ), получаем относительную погрешность:

$$\Delta_{M_{\Pi}} = \frac{344,5 - 342,7}{342,7} \cdot 100 \% = 0,52 \%.$$

Рассчитанная погрешность меньше допустимой (5 %) почти в 10 раз. Следовательно, расчёт приведённого момента внешних сил выполнен правильно.

*Проверка приведённого момента инерции.* Для проверки воспользуемся формулой (6.3):

$$J_{\Pi} = J_1 + m_3 v_{qS_3}^2 + J_{S_3} \omega_{q3}^2 + m_4 v_{qS_4}^2 + J_{S_4} \omega_{q4}^2 + m_5 v_{qE}^2.$$

Аналоги скоростей выразим через отношение отрезков на плане скоростей (рис. 6.8, б). Очевидно, что:

$$v_{qS_3} = \frac{v_{S_3}}{\omega_1} = \frac{p_2 s_3}{p_2 b_2} l_{AB}; \omega_{q3} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{p_2 d}{p_2 b_2} \frac{l_{AB}}{l_{CD}}; v_{qS_4} = \frac{v_{S_4}}{\omega_1} = \frac{p_2 s_4}{p_2 b_2} l_{AB}; \omega_{q4} = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{de}{p_2 b_2} \frac{l_{AB}}{l_{DE}}; v_{qE} = \frac{v_E}{\omega_1} = \frac{p_2 e}{p_2 b_2} l_{AB}.$$

Подставив полученные результаты в (6.3), вычислим приведённый момент инерции для положения 2:

$$\begin{aligned} J_{\Pi} &= J_1 + m_3 \frac{p_2 s_3}{p_2 b_2} l_{AB}^2 + J_{S_3} \frac{p_2 d}{p_2 b_2} \frac{l_{AB}}{l_{CD}}^2 + m_4 \frac{p_2 s_4}{p_2 b_2} l_{AB}^2 + \\ &\quad + J_{S_4} \frac{de}{p_2 b_2} \frac{l_{AB}}{l_{DE}}^2 + m_5 \frac{p_2 e}{p_2 b_2} l_{AB}^2 = \\ &= 5,2 + 17 \frac{25}{50} 0,127^2 + 1,4337 \frac{50}{50} \cdot \frac{0,127}{0,53}^2 + 20 \frac{46}{50} 0,127^2 + \\ &\quad + 0,1457 \frac{15}{50} \cdot \frac{0,127}{0,191}^2 + 56 \frac{46}{50} 0,127^2 = 6,3939 \text{ кгм}^2. \end{aligned}$$

Приведённый момент инерции для положения 2, найденный расчётным путём (табл. 6.3),  $J_{\Pi} = 6,54363 \text{ кгм}^2$ . Вычислим относительную погрешность:

$$\Delta_{J_{\Pi}} = \frac{6,54363 - 6,3939}{6,54363} \cdot 100\% = 2,29\%.$$

Малая погрешность расчётов подтверждает правильность вычислений приведённого момента инерции.

## 6.2.6 Построение диаграммы энергомасс

*Построение графика приведённого момента внешних сил в зависимости от угла поворота звена приведения  $\varphi$ .* Исходные данные для построения берём из третьего столбца табл. 6.3.

Выберем правую прямоугольную систему координат. Пусть максимальное значение приведённого момента  $M_{\Pi}^{\max}$  будет изображаться отрезком  $h_{\max} = 120 \text{ мм}$ . Вычислим масштабный коэффициент оси ординат:

$$\mu_M = \frac{M_{\Pi}^{\max}}{h_{\max}} = \frac{402,668}{120} = 3,36 \frac{\text{Нм}}{\text{мм}}.$$

На оси абсцисс отобразим один цикл, равный одному обороту звена приведения  $\varphi = 2\pi$ , отрезком длиной  $l = 240 \text{ мм}$ . Тогда масштабный коэффициент оси абсцисс:

$$\mu_{\varphi} = \frac{2\pi}{l} = \frac{2 \cdot 3,14}{240} = 0,026 \frac{\text{рад}}{\text{мм}}.$$

Разбив отрезок  $l = 240$  мм оси абсцисс на 12 равных частей и пронумеровав их, отложим значения  $M_{\Pi}$  условно вверх (рис. 6.9, а).

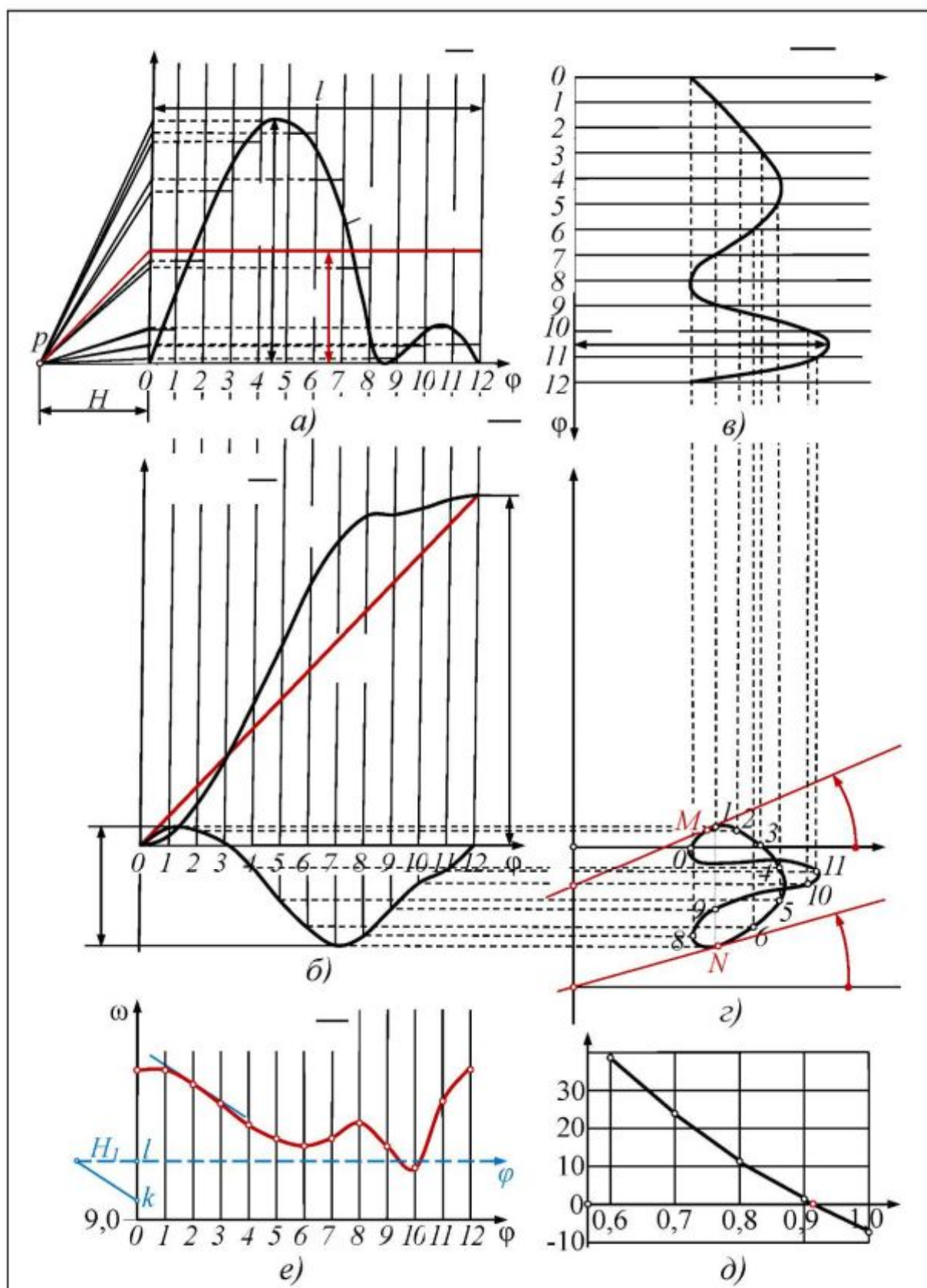


Рис. 6.9 К динамическому анализу и синтезу машины

Диаграмму работ приведённого момента (рис. 6.9, б) получим методом графического интегрирования зависимости  $M_{\pi}(\varphi)$ , приняв полюсное расстояние  $H = 80$  мм. После этого вычислим масштабный коэффициент оси ординат новой диаграммы:

$$\mu_A = \mu_{M_{\pi}} H \mu_{\varphi} = 3,36 \cdot 80 \cdot 0,026 = 7 \frac{\text{Дж}}{\text{мм}}.$$

Построение графика работы движущих сил и диаграммы избыточной работы (рис. 6.9, б) выполняем согласно п. 4,5 методики, изложенной в разделе 4.2. Графическое дифференцирование зависимости  $A_{M_d}(\varphi)$  позволит определить неизвестный ранее момент движущих сил  $M_d$ . Для этого из полюса  $p$  (рис. 6.9, а) проведём луч, параллельный графику  $A_{M_d}(\varphi)$ , до пересечения с осью ординат. Полученная горизонтальная линия изображает постоянный движущий момент. Вычислим его величину:

$$M_d = h \cdot \mu_M = 54 \cdot 3,36 = 181,2 \text{ Нм}.$$

График приведённого момента инерции  $J_{\pi}(\varphi)$  строим по результатам расчёта, приведённым во втором столбце табл. 6.3. С целью удобства дальнейшего графического исключения параметра  $\varphi$  при построении диаграммы энергомасс, ось  $\varphi$  направляем вертикально вниз (рис. 6.9, в). Эту ось разбиваем точно так же, как и ось абсцисс диаграммы  $M_{\pi}(\varphi)$ . Задавшись максимальной ординатой диаграммы  $h'_{\max} = 200$  мм, вычислим масштабный коэффициент:

$$\mu_{J_{\pi}} = \frac{J_{\pi}^{\max}}{h'_{\max}} = \frac{15,079}{200} = 0,0754 \frac{\text{кгм}^2}{\text{мм}}.$$

Построение диаграммы энергомасс выполняем известным методом графического исключения параметра  $\varphi$  из графиков  $A_{\text{изб}}(\varphi)$  и  $J_{\pi}(\varphi)$ . Отметим, что построенная диаграмма  $A_{\text{изб}}(J_{\pi})$  (рис. 6.9, г) не является зависимостью кинетической энергии системы от приведённого момента инерции, т.к. пока не известна начальная кинетическая энергия, накопленная в период разбега.

## 6.2.7 Динамический анализ поперечно-строгального станка

Динамический анализ заключается в определении коэффициента неравномерности хода машины  $\delta$ . Методика его определения изложена в п. 7 раздела 4.2.

Вычислим приближённое значение  $\delta$  по формуле

$$\delta \approx \frac{A_{\text{изб}}^{\text{max}}}{\omega_{\text{ср}}^2 J_{\text{ср}}} = \frac{A_{\text{изб}}^{\text{max}} \cdot \mu_A}{\omega_{\text{ср}}^2 J_{\text{ср}}} = \frac{62,5 \cdot 7}{9,42^2 \cdot 7,367} = 0,67,$$

где  $A_{\text{изб}}^{\text{max}}$  – высота диаграммы избыточной работы на рис. 6.9, б, измеренная в миллиметрах;  $J_{\text{ср}}$  – среднее арифметическое всех 12 значений приведённого момента инерции, взятых из второго столбца табл. 6.3.

Согласно п. 7 методики, изложенной в разделе 4.2, вычисленное округлённое приближённое значение коэффициента неравномерности  $\delta = 0,6$  примем за начальное при определении его истинного значения методом последовательных приближений. Для этого по формулам (4.3) и (4.4) вычислим экстремальные значения угловой скорости кривошипа  $\omega_{\text{max}}$  и  $\omega_{\text{min}}$ . Затем через тангенсы углов касательных к диаграмме энергомасс, вычисленные по формулам (5.4), найдём углы  $\psi_{\text{max}}$  и  $\psi_{\text{min}}$ . Далее по формуле (5.7) вычислим  $x_0$ . Изменяя теперь  $\delta$  в сторону увеличения с шагом 0,1, заново повторяем последовательность вычислений до тех пор, пока не получим отрицательное значение  $x_0$ . Результаты расчётов сведём в табл. 6.4.

Таблица 6.4

| Параметр                             | Коэффициент неравномерности $\delta$ |        |        |        |        |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
|                                      | 0,6                                  | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| $\omega_{\text{max}}, \text{с}^{-1}$ | 12,246                               | 12,717 | 13,188 | 13,659 | 14,13  |
| $\omega_{\text{min}}, \text{с}^{-1}$ | 6,594                                | 6,123  | 5,652  | 5,181  | 4,71   |
| $\text{tg } \psi_{\text{max}}$       | 0,8049                               | 0,8679 | 0,9335 | 1,001  | 1,0716 |
| $\text{tg } \psi_{\text{min}}$       | 0,2334                               | 0,2012 | 0,1715 | 0,1441 | 0,1191 |
| $\psi_{\text{max}}, \text{град}$     | 38,83                                | 40,96  | 43,03  | 45,04  | 46,98  |
| $\psi_{\text{min}}, \text{град}$     | 13,14                                | 11,38  | 9,73   | 8,19   | 6,79   |
| $x_0, \text{мм}$                     | 38,9                                 | 23,2   | 10,7   | 1,1    | – 6,3  |

По результатам расчётов строим график зависимости  $\delta(x_0)$  (рис. 6.9, в). В точке, где кривая пересекает ось  $\delta$ , и будет истинное значение  $\delta = 0,915$ .

Так как найденное значение  $\delta$  намного превышает допустимую величину ( $\delta = 0,05$ ), указанную в исходных данных, то необходимо решить задачу динамического синтеза – определение

момента инерции маховика, который бы обеспечил заданный коэффициент неравномерности.

## 6.2.8 Определение момента инерции маховика

Согласно методике, изложенной в разделе 5.2, по известной средней скорости кривошипа и заданному значению коэффициента неравномерности хода машины вычисляем допустимые значения экстремальных скоростей:

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) = 9,42 \left( 1 + \frac{0,05}{2} \right) = 9,6555 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) = 9,42 \left( 1 - \frac{0,05}{2} \right) = 9,1845 \text{ с}^{-1}.$$

Используя масштабные коэффициенты по осям диаграммы энергомасс, вычислим требуемые углы наклона касательных к этой диаграмме:

$$\text{tg } \psi_{\max} = \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_A} \omega_{\max}^2 = \frac{0,0754}{2 \cdot 7} \cdot 9,6555^2 = 0,5003477,$$

$$\psi_{\max} = 26,58^\circ;$$

$$\text{tg } \psi_{\min} = \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_A} \omega_{\min}^2 = \frac{0,0754}{2 \cdot 7} \cdot 9,1845^2 = 0,4527239,$$

$$\psi_{\min} = 24,36^\circ.$$

Под этими углами проводим касательные к диаграмме энергомасс (рис. 6.9, з). Отметим точки касания буквами *M* и *N*. Измерим длину полученного отрезка *ab* и вычислим момент инерции маховика:

$$J_M = \frac{ab \cdot \mu_A}{\delta \omega_{\text{ср}}^2} = \frac{89 \cdot 7}{0,05 \cdot 9,42^2} = 140,904 \text{ кгм}^2.$$

Таким образом, момент инерции маховика, который необходимо установить на вал кривошипа, найден.

Вычислим  $J_M$  вторым способом – аналитическим и сравним полученные результаты. Измерив в миллиметрах координаты точек *M* и *N*, воспользуемся формулой (5.7) вычисления абсциссы  $x_0$  точки пересечения касательных к диаграмме энергомасс:

$$x_0 = \frac{y_M - y_N - x_M \text{tg } \psi_{\max} + x_N \text{tg } \psi_{\min}}{\text{tg } \psi_{\max} - \text{tg } \psi_{\min}} =$$

$$= \frac{4 - -29 - 73,5 \cdot 0,5003477 + 204,5 \cdot 0,4527239}{0,5003477 - 0,4527239} = 1864,7499 \text{ мм}.$$

Теперь момент инерции маховика вычислим по формуле

$$J_M = x_0 \mu_{J_{\Pi}} = 1864,75 \cdot 0,0754 = 140,597 \text{ кгм}^2.$$

По сравнению с ранее найденным значением погрешность составляет 0,22 %. Очевидно, что оба способа сопровождались погрешностями, связанными с проведением касательных к диаграмме энергомасс и измерениями координат точек  $M$ ,  $N$  и отрезка  $ab$ . Однако первый способ представляется более предпочтительным из-за меньшего объёма вычислений. Окончательно можно принять в качестве результата среднее арифметическое значение двух найденных величин:

$$J_M = 140,751 \text{ кгм}^2.$$

Мы определили момент инерции маховика, который следует установить на валу кривошипа. Если маховик установить не на валу звена привода, а, например, на валу зубчатого колеса  $z_4$ , то, используя формулу (5.8), вычислим:

$$J_{M_4} = J_M u_{14}^2 = J_M \frac{z_4}{z_5}^2 = 140,751 \frac{13}{26}^2 = 35,188 \text{ кгм}^2.$$

Из полученного результата видно, что для уменьшения размеров маховика его следует устанавливать на более быстроходном валу. Но при этом следует учитывать диаметральные и осевые размеры этого вала, так как при недостаточной жёсткости вала с помощью маховика можно возбудить значительные крутильные колебания.

### 6.2.9 Определение закона движения машины с маховиком

Для определения закона движения необходимо знать величину начальной кинетической энергии машины, накопленной в период разгона. Длину отрезка по оси ординат диаграммы энергомасс, пропорционального начальной кинетической энергии, вычислим, используя формулу (4.8):

$$y_0 = x_0 + x_N \operatorname{tg} \psi_{\min} - y_N = 1964,7499 + 204,5 \times 0,4527239 - -29 = 965,7989 \text{ мм}.$$

Зная координаты точки пересечения касательных к диаграмме энергомасс (рис. 6.9,  $z$ ) ( $x_0 = 1964,7499 \text{ мм}$ ,  $y_0 = 965,7989 \text{ мм}$ ), вычислим ряд последовательных значений угловой скорости звена привода. Для этого воспользуемся формулой (3.19), заменив в ней  $\operatorname{tg} \psi_i$  на отношение координат

$\frac{y_0+y_i}{x_0+x_i}$ , где  $x_i, y_i$  – координаты  $i$ -й точки диаграммы энергомасс, взятые с соответствующим знаком, мм.

Результаты измерений и расчёта сведём в табл. 6.5

Таблица 6.5

Результаты расчёта скорости звена приведения

| $N$ | $y_i, \text{мм}$ | $y_0 + y_i$ | $x_i, \text{мм}$ | $x_0 + x_i$ | $\text{tg } \psi_i$ | $\omega_i, \text{с}^{-1}$ |
|-----|------------------|-------------|------------------|-------------|---------------------|---------------------------|
| 0   | 0                | 965,7989    | 69,0             | 1933,7499   | 0,499444            | 9,6468                    |
| 1   | 4,5              | 970,2989    | 76,3             | 1941,0499   | 0,499884            | 9,6510                    |
| 2   | -2,8             | 962,9989    | 86,8             | 1651,5499   | 0,493453            | 9,5887                    |
| 3   | -16,8            | 948,9989    | 93,4             | 1958,1499   | 0,484641            | 9,5027                    |
| 4   | -33              | 932,7989    | 94,3             | 1959,0499   | 0,476149            | 9,4191                    |
| 5   | -47,5            | 918,2989    | 90,3             | 1955,0499   | 0,469706            | 9,3552                    |
| 6   | -58              | 907,7989    | 82,5             | 1947,2499   | 0,466195            | 9,3201                    |
| 7   | -56              | 909,7989    | 72,2             | 1936,9499   | 0,469707            | 9,3552                    |
| 8   | -43,5            | 922,2989    | 73,0             | 1937,7499   | 0,475964            | 9,4173                    |
| 9   | -32,5            | 933,2989    | 138,6            | 2003,3499   | 0,465869            | 9,3169                    |
| 10  | -23,5            | 942,2989    | 200,0            | 2064,7499   | 0,456374            | 9,2215                    |
| 11  | -12,5            | 953,2989    | 96,1             | 1960,8499   | 0,486166            | 9,5177                    |

Для построения графической зависимости  $\omega = \omega(\varphi)$  вычислим масштабный коэффициент  $\mu_\omega$ . Так как  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  мало отличаются друг от друга, то для того, чтобы изменение скоростей на графике было более наглядным, будем выполнять отсчёт ординат не от нуля, а от значения  $\omega_0 = 9,0 \text{ с}^{-1}$ , немного меньшего, чем  $\omega_{\min}$ . Пусть высота графика будет  $h_{\max} = 100 \text{ мм}$ . Тогда масштабный коэффициент оси ординат

$$\mu_\omega = \frac{\omega_{\max} - \omega_0}{h_{\max}} = \frac{9,6555 - 9,0}{100} = 0,0066 \frac{\text{с}^{-1}}{\text{мм}}.$$

Вычислив текущие ординаты по формуле  $h_i = \frac{\omega_i - \omega_0}{\mu_\omega}, \text{мм}$ , построим график  $\omega = \omega(\varphi)$ . С целью удобства сравнительного анализа полученных зависимостей поместим график в то же поле, где расположены остальные графики и диаграммы (рис. 6.9, е).

Определение закона движения машины закончим вычислением углового ускорения звена приведения. В качестве примера определим угловое ускорение только в положении 2. Известно, что

$$\varepsilon = \varepsilon_q \omega, \quad (6.5)$$

где  $\varepsilon_q$  – аналог углового ускорения звена.

Найдём аналог углового ускорения звена приведения методом графического дифференцирования зависимости  $\omega = \omega(\varphi)$  во втором положении (рис. 6.9, *е*). Для этого проведём касательную к диаграмме  $\omega(\varphi)$  в положении 2. Параллельно ей из полюса  $p_1$  проведём луч до пересечения с осью ординат. Полюс расположен на расстоянии 35 мм от оси ординат. Получим отрезок  $kl$ , выражающий аналог углового ускорения. Чтобы его вычислить, необходимо рассчитать масштабный коэффициент новой оси  $\varepsilon_q$ , совпадающей с осью  $\omega$ , по известной формуле

$$\mu_{\varepsilon_q} = \frac{\mu_{\omega}}{H_1 \mu_{\varphi}} = \frac{0,0066}{35 \cdot 0,026} = 0,00725 \frac{\text{с}^{-1}}{\text{мм}}.$$

Вычислим аналог ускорения:  $\varepsilon_q = kl \cdot \mu_{\varepsilon_q} = 22 \cdot 0,00725 = 0,1595 \text{ с}^{-1}$ . Тогда угловое ускорение рассчитаем по формуле (6.5):  
 $\varepsilon = 0,1595 \cdot 9,5887 = 1,529 \text{ с}^{-2}$ .

Таким образом, закон движения поперечно-строгального станка с маховиком выявлен.

### 6.2.10 Определение средней мощности двигателя

Динамический анализ и синтез машинного агрегата включает подбор двигателя по его средней мощности. Среднюю мощность за цикл установившегося движения определяют по формуле

$$P_{mn} = \frac{A_{\text{ц}}}{t_{\text{ц}}} \cdot K,$$

где  $A_{\text{ц}}$  – работа движущего момента за цикл установившегося движения;  $t_{\text{ц}}$  – время цикла; коэффициент  $K$  учитывает потери на трение в кинематических парах, его рекомендуется принимать  $K = 1,25$  [4].

Учитывая, что работа движущего момента за цикл установившегося движения определяется умножением ординаты конечной точки диаграммы  $A_{M_d}$  (рис. 6.9, *б*) на масштабный коэффициент  $\mu_A$ , а время цикла выражается через среднюю угловую скорость по формуле  $t_{\text{ц}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{ср}}}$ , получим

$$P_{mn} = \frac{h''_{\text{max}} \cdot \mu_A \cdot \omega_{\text{ср}}}{2\pi} \cdot K = \frac{160 \cdot 7 \cdot 9,42}{2 \cdot 3,14} \cdot 1,25 = 2100 \text{ Вт}.$$

Таким образом, двигатель, приводящий в движение поперечно-строгальный станок, должен развивать мощность 2,1 кВт.

### 6.3 Контрольные вопросы

1. Чем объясняется необходимость сочетания компьютерных и графоаналитических методов динамического анализа и синтеза машинных агрегатов?
2. Как размещается система координат при формализации структуры механизмов?
3. Каким образом нумеруются группы Ассура при формализации структуры механизма?
4. Как нумеруются звенья и кинематические пары внутри группы Ассура?
5. Каков принцип кодирования вида структурных групп?
6. Как кодируются длины звеньев и формализуются координаты мест их присоединения к стойке?
7. Как кодируются внешние силы, приложенные к машинному агрегату?
8. Дайте объяснение уменьшению угловой скорости звена приведения поперечно-строгального станка от положения *1* до положения *6* (рис. 6.9, *е*).
9. Почему угловая скорость звена приведения поперечно-строгального станка увеличивается между положениями *6* – *8* и уменьшается между положениями *8* – *10* (рис. 6.9, *е*)?
10. Почему угловая скорость звена приведения поперечно-строгального станка резко возрастает от положения *10* до конца цикла (рис. 6.9, *е*)?

## Список рекомендуемой литературы

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М. : Альянс, 2008. – 640 с.
2. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И. И. Артоболевский, Б. В. Эдельштейн – М. : Альянс, 2009. – 256 с.
3. Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / К. В. Фролов [и др.] ; под общ. ред. К. В. Фролова. – М. : Высш. шк., 2005. – 496 с.
4. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – М. : Наука, 1990. – 590 с.
5. Попов, С. А. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / С. А. Попов, Г. А. Тимофеев. – М. : Высш. шк., 2008. – 458 с.
6. Закабунин, В. И. Теория механизмов и машин. Структура и анализ механизмов : учеб. пособие / В. И. Закабунин / Алтайск. гос. техн. ун-т им. И. И. Ползунова. – Барнаул : Изд-во АлтГТУ, 2004. – 406 с.

# Оглавление

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие.....                                                                              | 3  |
| Введение.....                                                                                 | 4  |
| Обозначения.....                                                                              | 5  |
| 1 Динамические параметры и характеристики машин.....                                          | 6  |
| 1.1 Движущие силы и моменты.....                                                              | 6  |
| 1.2 Силы и моменты сопротивления.....                                                         | 7  |
| 1.3 Силы тяжести и силы упругости пружин.....                                                 | 7  |
| 1.4 Реакции в кинематических парах.....                                                       | 8  |
| 1.5 Механические характеристики.....                                                          | 8  |
| 1.6 Работа сил.....                                                                           | 10 |
| 1.7 Кинетическая энергия машины.....                                                          | 11 |
| 1.8 Режимы работы машины.....                                                                 | 13 |
| 1.9 Контрольные вопросы.....                                                                  | 17 |
| 2 Динамическая модель машины.....                                                             | 18 |
| 2.1 Звено приведения.....                                                                     | 18 |
| 2.2 Приведение масс.....                                                                      | 20 |
| 2.3 Приведение сил.....                                                                       | 23 |
| 2.4 Определение приведённой силы с помощью рычага Жуковского.....                             | 26 |
| 2.5 Контрольные вопросы.....                                                                  | 29 |
| 3 Уравнения движения машины.....                                                              | 30 |
| 3.1 Уравнения движения в интегральной форме.....                                              | 30 |
| 3.2 Уравнения движения в дифференциальной форме.....                                          | 31 |
| 3.3 Методы решения уравнений движения.....                                                    | 32 |
| 3.3.1 Силы зависят от положения точек их приложения.....                                      | 32 |
| 3.3.2 Силы зависят от скоростей точек их приложения.....                                      | 37 |
| 3.3.3 Численный метод решения дифференциального уравнения движения.....                       | 40 |
| 3.4 Решение задач по определению закона движения.....                                         | 41 |
| 3.5 Контрольные вопросы.....                                                                  | 46 |
| 4 Динамический анализ установившегося движения.....                                           | 47 |
| 4.1 Периодические и непериодические колебания скорости звена приведения.....                  | 47 |
| 4.2 Динамический анализ машины при действии сил, зависящих от положения звена приведения..... | 50 |
| 4.3 Примеры решения задач.....                                                                | 54 |

|        |                                                                              |    |
|--------|------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.4    | Контрольные вопросы.....                                                     | 56 |
| 5      | Динамический синтез машинного агрегата.....                                  | 58 |
| 5.1    | Приближённый метод определения момента инерции маховика.....                 | 58 |
| 5.2    | Определение момента инерции маховика по диаграмме энергомасс.....            | 60 |
| 5.3    | Контрольные вопросы.....                                                     | 62 |
| 6      | Компьютерный динамический анализ и синтез машинного агрегата.....            | 63 |
| 6.1    | Формализация структуры рычажных механизмов.....                              | 63 |
| 6.2    | Компьютерный динамический анализ и синтез поперечно-строгального станка..... | 70 |
| 6.2.1  | Исходные данные.....                                                         | 70 |
| 6.2.2  | Определение приведённого момента внешних сил.....                            | 71 |
| 6.2.3  | Определение приведённого момента инерции.....                                | 71 |
| 6.2.4  | Компьютерное определение параметров динамической модели.....                 | 73 |
| 6.2.5  | Проверочный расчёт.....                                                      | 76 |
| 6.2.6  | Построение диаграммы энергомасс.....                                         | 78 |
| 6.2.7  | Динамический анализ поперечно-строгального станка.....                       | 80 |
| 6.2.8  | Определение момента инерции маховика.....                                    | 82 |
| 6.2.9  | Определение закона движения машины с маховиком.....                          | 83 |
| 6.2.10 | Определение средней мощности двигателя.....                                  | 85 |
| 6.3    | Контрольные вопросы.....                                                     | 86 |
|        | Список рекомендуемой литературы.....                                         | 87 |